Esercizi di logica matematica 06–07

Settimana 4

1. Provare il seguente, noto come *Teorema di deduzione*:

   Teorema Le seguenti sono equivalenti per ogni $\Gamma \subseteq$ PROP ed ogni $\alpha, \beta \in$ PROP:

   (a) $\Gamma, \alpha \vdash \beta$;

   (b) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

2. Esercizio 7 pag. 55 in Van Dalen, *Logic and Structure, 4a ed.*

3. Si assumano tutti i comnnettivi come primitivi. Provare che le seguenti valgono per un insieme massimale consistente Φ di formule proposizionali:

   (a) se $\Phi \nvdash \alpha$, allora $\Phi \vdash \neg\alpha$, per ogni formula α;

   (b) se $\Phi \vdash \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$, allora $\Phi \vdash \alpha_i$ per qualche $1 \leq i \leq n$.

   Mostrare, con un controesempio, che (a) e (b) non valgono, in generale, per Φ consistente, ma non massimale consistente.

   Suggerimento: per (a) si veda l'esercizio 3–1.

4. Scrivere un enunciato (cioè una formula senza variabili libere) privo di simboli non logici (= è un simbolo logico, ed è quindi ammesso) che sia

   (a) vero in tutte le strutture con almeno 3 elementi;

   (b) vero in tutte le strutture con esattamente 3 elementi;

   (c) vero in tutte le strutture con meno di 3 elementi.

5. In un linguaggio adeguato per la struttura $\langle \mathbf{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, f \rangle$, dove f è una funzione unaria su $\mathbf{R}$, scrivere un enunciato che esprime

   (a) la continuità di f in 0;

   (b) l'uniforme continuità di f.

6. Il *linguaggio dei campi* ha come simboli extralogici + (somma); − (opposto), · (prodotto), 0 (elemento neutro additivo); 1 (elemento neutro moltiplicativo).

   Si noti che non c'è un simbolo per l'operazione di inverso moltiplicativo (perché?). Si noti anche che, per semplicità, usiamo come simboli alcuni che ci aiutano a scrivere le formule.

(a) Scrivere gli assiomi di campo nel linguaggio appena descritto (con particolare attenzione per quello di esistenza dell'inverso moltiplicativo);

(b) Scrivere una famiglia di enunciati del linguaggio del primo ordine per la teoria dei campi che sono veri in tutti e soli i campi algebricamente chiusi.

Suggerimento: ricordare che un polinomio è univocamente individuato dai coefficienti: per ogni $n > 1$, quantificando sui coefficienti, esprimere la proprietà "ogni polinomio di grado n ha una radice nel campo".

Osservazione: Si dimostra che non esiste nessuna assiomatizzazione finita (cioè con un numero finito di assiomi) della classe dei campi algebricamente chiusi nel linguaggio dei campi.

7. In un opportuno linguaggio del primo ordine scrivere gli assiomi di spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$.

   *S*uggerimento: nel dominio di uno spazio vettoriale, ci sono i *vettori* e non gli *scalari*. Gli assiomi di gruppo abeliano non danno problemi. Per ogni $k \in \mathbf{K}$, introdurre nel linguaggio un simbolo unario di funzione f_k per la moltiplicazione per lo scalare k.

8. Sia L un fissato linguaggio del primo ordine. Una classe $\mathcal{K}$ di L-strutture si dice *assiomatizzabile* se esiste un insieme Φ di L-enunciati tale che, per ogni struttura L-struttura $\mathbf{A}$ si ha

$$\mathbf{A} \in \mathcal{K} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A} \models \Phi.$$

   Diremo che la classe $\mathcal{K}$ è *finitamente assiomatizzabile* se esiste un insieme finito Φ come sopra.

   Esempio: nell'esercizio 6(b) si chiede di provare che la classe dei campi algebricamente chiusi è assiomatizzabile nel linguaggio dei campi e si afferma che tale classe non è finitamente assiomatizzabile.

Ricordiamo che un campo è di caratteristica zero se non esiste nessun intero positivo k tale che $k1 = 0$, altrimenti la caratteristica è il minimo tra gli interi positivi k tali che $k1 = 0$. Si vede immediatamente che la caratteristica di un campo è zero, oppure un numero primo.

Esempio: Il campo $\mathbf{Q}$ dei razionali ha caratteristica zero. Il campo $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ delle classi resto modulo p, ha caratteristica p, per ogni primo p.

Fissato un linguaggio del primo ordine adeguato ad esprimere gli assiomi di campo, provare che

(a) Per ogni primo p, la classe dei campi di caratteristica p è finitamente assiomatizzabile.

(b) La classe dei campi di caratteristica zero è assiomatizzabile.

9. (Dopo aver visto gli esempi 1, 2, 3, 6, 7 del paragrafo 2.7 in van Dalen - *Logic and Structure, 4a ed.*), esercizi 1 - 8, 10, 14 pag. 90.

10. Usando soltanto un simbolo di predicato binario (ma nessun simbolo di funzione), scrivere un enunciato α privo di modelli finiti (cioè modelli con universo finito) e tale che, per ogni insieme infinito A, esiste un modello di α con universo A.