Esercizi di logica matematica 06–07

Settimana 5

1. Esercizi $2, 3, 4, 9$ pag. 80; $1, 2$ pag. 95-96; 1,2,4, 6,7 pag. 98-99 in in van Dalen - *Logic and Structure, 4a ed.*

2. Provare che le seguenti *non* sono, in generale, logicamente valide (cercare controesempi che coinvolgono formule e strutture molto semplici):

   (a) $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$;

   (b) $(\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x)) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$.

3. Sia $\mathbf{A}$ una $L$-struttura, per un fissato linguaggio del primo ordine $L$. Un un sottoinsieme $B$ di $A$ è *definibile* in $\mathbf{A}$ se esiste una $L$-formula $\varphi(v)$ con esattamente una variabile libera tale che

$$B = \{a \in A : \mathbf{A} \models \varphi[a]\}.$$

   (a) Generalizzare la nozione di definibilità a sottoinsiemi di $A^n$, $n > 0$.

   (b) Provare che se $B$ e $C$ sono sottoinsiemi di $A$ definibili in $\mathbf{A}$, anche $A \setminus B$, $B \cup C$, $B \cap C$ e $B \setminus C$ lo sono.

   (c) Si consideri la struttura $\mathbf{A} = \langle \mathbf{N}^+, | \rangle$, con $\mathbf{N}^+$ l'insieme dei naturali positivi e $m|n$ se e soltanto se $m$ divide $n$. Provare che l'insieme $\{1\}$ e l'insieme dei numeri primi sono definibili in $\mathbf{A}$.

   Un intero positivo $n$ si dice *libero da quadrati* se per nessun primo $p$ si ha $p^2|n$. Provare che l'insieme degli interi positivi liberi da quadrati è definibile in $\mathbf{A}$.

4. Sia $\Sigma$ un insieme di enunciati. Diciamo che $\Sigma$ ha *modelli finiti arbitrariamente grandi* se, per ogni naturale $n$, esiste un modello di $\Sigma$ di cardinalità almeno $n$.

   Usando un argomento di compattezza, provare che se un insieme $\Sigma$ di enunciati ha modelli finiti arbitrariamente grandi, allora $\Sigma$ ha un modello infinito.

   *Suggerimento*:

   (a) Sia $\lambda_n$ l'enunciato che esprime la proprietà "esistono almeno $n$ elementi distinti" (scrivere formalmente $\lambda_n$).

   (b) Sia $\Sigma' = \Sigma \cup \{\lambda_n : n \in \mathbf{N}\}$. Provare che l'ipotesi su $\Sigma$ implica la finita soddisfacibilità di $\Sigma'$.

   (c) Concludere che $\Sigma'$ è soddisfacibile.

(d) Osservare che ogni modello di $\Sigma'$ è infinito.

Dedurre che, ad esempio, la classe dei gruppi finiti non è assiomatizzabile nel linguaggio del primo ordine per i gruppi.

5. Provare che esistono strutture che soddisfano gli stessi enunciati di $\underline{\mathbf{N}} = \langle \mathbf{N}, +, \cdot, s, 0, 1 \rangle$ (dove $s$ è la funzione *successore*) in cui esistono elementi non nulli che hanno infinitamente molti divisori.

   *Suggerimento*:

   (a) Espandere il linguaggio di $\mathbf{N}$ con un nuovo simbolo di costante $c$.

   (b) Sia $\delta_n$ l'enunciato che esprime la proprietà "$c$ ha almeno $n$ divisori distinti". Scrivere formalmente $\delta_n$.

   (c) Provare la soddisfacibilità di $Th(\mathbf{N}) \cup \{\delta_n : n \in \mathbf{N}\}$ e concludere.