

SETTIMANA 6

1. Sia φ un enunciato del primo ordine del linguaggio della teoria dei campi vero in tutti i campi di caratteristica zero. Provare che esiste un primo p tale che φ è vero in tutti i campi di caratteristica $\geq p$.

Suggerimento: ricordare che se un enunciato è vero in campi di caratteristica positiva arbitrariamente grande, allora esso è vero anche in qualche campo di caratteristica zero.

2. Provare che, per ogni sistema finito di equazioni lineari a coefficienti interi che non ha soluzioni in nessun campo di caratteristica zero, esiste un primo q tale che, per tutti i primi $p \geq q$, il sistema non ha soluzioni modulo p .

Suggerimento: esprimere la proprietà di esistenza di una soluzione per un sistema di equazioni nel linguaggio dei campi ed usare l'esercizio precedente.

3. Un *campo ordinato* è un campo F con una relazione d'ordine totale che soddisfa le proprietà seguenti per ogni $a, b, c \in F$

- (a) se $a < b$ allora $a + c < b + c$ e
- (b) se $a < b$ e $0 < c$, allora $ac < bc$.

Esempio: il campo dei numeri reali con la relazione d'ordine usuale è un campo ordinato.

- (a) Scegliere un opportuno linguaggio L per la teoria dei campi ordinati e scrivere esplicitamente un insieme di assiomi per tale teoria.
- (b) Provare che tutti i campi ordinati sono di caratteristica zero (e dunque infiniti).
- (c) Un campo ordinato F si dice *archimedeo* se per ogni $a, b \in F$ con $0 < a < b$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $b < na$ (al solito, na è un'abbreviazione per $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ volte}}$).

Provare che la proprietà di archimedeicità non è esprimibile nel linguaggio del primo ordine dei campi ordinati.

Suggerimento: con un argomento di compattezza, costruire un opportuno campo non archimedeo.

- (d) Provare che in un campo ordinato non archimedeo esistono elementi $0 < a$ tali che $a < \frac{1}{n}$, per ogni naturale positivo n (ora $\frac{1}{n}$ sta per $(n1)^{-1}$). Si osservi che il punto (b) garantisce che $\frac{1}{n}$ sia definito per ogni naturale positivo n).

Dunque, in un campo ordinato non archimedeo ci sono elementi *infinitesimi* (ed anche elementi *infiniti*!).

4. (a) Sia $\mathbf{A} = \langle A, < \rangle$ un ordine parziale finito (quindi A è finito e $<$ è una relazione binaria su A antiriflessiva e transitiva). Provare che esiste un ordine totale su A che estende $<$.

(b) Come nel punto precedente, ma con \mathbf{A} di cardinalità arbitraria.

Quindi: ogni relazione di ordine parziale su un insieme è estendibile ad un ordine totale.

Suggerimento: (a) per induzione sulla cardinalità di \mathbf{A} ; (b) estendere il linguaggio con un simbolo di costante c_a per ogni elemento di A . Sia Φ l'insieme di tutti gli enunciati atomici veri nella struttura espansa $\mathbf{A}_A = \langle A, <, (a)_{a \in A} \rangle$ e sia

$$\Phi' = \Phi \cup \{\text{assiomi di ordine totale}\}.$$

Sfruttando (a), provare che Φ' è soddisfacibile ed osservare che ogni modello di Φ' contiene una copia isomorfa di \mathbf{A} .

5. La dimostrazione del Corollario 3.2.12 (iii) a pag. 115 di van Dalen, *Logic and Structure*, 4a ed., non è corretta. Perché?
6. Esercizi 6, 8 (cfr. con l'esercizio 4–10), 9, 10, 12, 13, pag. 117; 17 pag 118 in van Dalen, *Logic and Structure*, 4a ed.

Attenzione: modificare il punto (iv) dell'esercizio 10 come segue: scrivere un enunciato σ tale che, per ogni insieme A , A è infinito se e soltanto se esiste una funzione $f : A \rightarrow A$ per cui $\langle A, f \rangle \models \sigma$.

7. Provare il seguente:

Teorema di Vaught: Sia \mathcal{L} un linguaggio numerabile del primo ordine e sia T una \mathcal{L} -teoria senza modelli finiti e κ -categorica per qualche cardinale infinito $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Allora T è completa.

Suggerimento: si supponga T non completa e siano \mathbf{A} e \mathbf{B} due modelli di T tali che $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$. Applicando i teoremi di Löwenheim–Skolem (dove si usa il fatto che T non ha modelli finiti?), provare che esistono \mathbf{A}' e \mathbf{B}' modelli di T di cardinalità κ tali che $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}'$. Dedurre una contraddizione.

8. Sia $\mathbf{N} = \langle \mathbf{N}, +, \cdot, s, 0 \rangle$ il modello standard degli assiomi di \mathbf{PA} . Usando un argomento di compattezza (o di cardinalità) provare che esiste un modello nonstandard (i.e. non isomorfo al modello standard) numerabile ${}^*\mathbf{N} = \langle {}^*\mathbf{N}, \dots \rangle$ di $Th(\mathbf{N})$.

Senza perdita di generalità supponiamo $\mathbf{N} \subseteq {}^*\mathbf{N}$. Provare che:

- (a) non esiste nessuna formula $\varphi(v)$ tale che ${}^*\mathbf{N} \models \varphi[a]$ se e soltanto se $a \in \mathbf{N}$. In altre parole: l'insieme dei naturali standard non è definibile in nessun modello nonstandard di $Th(\mathbf{N})$.

Suggerimento: per ogni formula $\varphi(v)$, l'enunciato

$$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))) \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

appartiene a $Th(\mathbf{N})$.

- (b) se $\varphi(v)$ è una formula tale che per ogni $m \in \mathbf{N}$ esiste $n \in \mathbf{N}$ con $n > m$ e ${}^*\mathbf{N} \models \varphi[n]$, allora esiste $a \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ per cui ${}^*\mathbf{N} \models \varphi[a]$.

L'asserzione precedente è nota come *Overspill Lemma* (*Lemma di Traboccamento*).