

TRENTO, A.A. 2011/12
CORSO DI ALGEBRA
FOGLIO DI ESERCIZI # 14

Esercizio 14.1. Sia H un sottogruppo del gruppo G , dunque

- $1 \in H$,
- se $a \in H$, allora $a^{-1} \in H$.
- se $a, b \in H$, allora $a \cdot b \in H$,

Si mostri che la relazione su G data da aRb se e solo se $a \cdot b^{-1} \in H$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 14.2. Sia H un sottoinsieme non vuoto del gruppo G . Si definisca su G la relazione data da aRb se e solo se $a \cdot b^{-1} \in H$.

Si mostri che se R è una relazione di equivalenza, allora H è un sottogruppo di G .

Esercizio 14.3. Che succederebbe nell'esercizio 14.2 se non chiedessi che H è non vuoto? Vale sempre l'implicazione?

Esercizio 14.4. A una relazione di equivalenza si chiede di essere riflessiva, simmetrica e transitiva.

Se una relazione R è simmetrica e transitiva, deve essere per forza anche riflessiva?

(SUGGERIMENTO: Si potrebbe pensare di sí, perché se aRb , allora per la simmetria anche bRa , e dunque per la transitività aRa . Ma sarà veramente cosí?)

Esercizio 14.5. Sia G un gruppo. Ricordiamo che un sottoinsieme H di G si dice un *sottogruppo* di G se valgono

- (1) $1 \in H$,
- (2) se $a, b \in H$, allora $ab \in H$,
- (3) se $a \in H$, allora $a^{-1} \in H$.

Si mostri che sono equivalenti, per $H \subseteq G$,

- H è un sottogruppo di G , e
- (1) $H \neq \emptyset$,
- (2) se $a, b \in H$, allora $ab^{-1} \in H$.

Esercizio 14.6. L'esercizio precedente è scritto assumendo che G sia un gruppo moltiplicativo $(G, \cdot, 1)$.

Lo si riscriva per un gruppo additivo $(G, +, 0)$.

Esercizio 14.7 (Facoltativo). Sia G un gruppo *finito*.

Si mostri che sono equivalenti, per $H \subseteq G$,

- H è un sottogruppo di G , e
- (1) $1 \in H$,
- (2) se $a, b \in H$, allora $ab \in H$.

Esercizio 14.8. Si mostri che i sottogruppi di \mathbf{Z} sono della forma $n\mathbf{Z} = \{nz : z \in \mathbf{Z}\}$, cioè l'insieme dei multipli di $n \in \mathbf{Z}$, secondo la traccia seguente.

- Ogni $n\mathbf{Z}$ è un sottogruppo di \mathbf{Z} .
- Viceversa, sia H un sottogruppo di \mathbf{Z} . Se $H = \{0\}$, allora $H = 0\mathbf{Z}$.
- Sia dunque $H \neq \{0\}$. Sia $a \in H \setminus \{0\}$. Ora $a, -a \in H$, dato che H è un sottogruppo, dunque H contiene un intero positivo.
- L'insieme $\{a \in H : a > 0\} \subseteq \mathbf{N}^*$ è non vuoto, dunque ha un minimo n .
- $n\mathbf{Z} \subseteq H$.
- $H \subseteq n\mathbf{Z}$. Per questo, sia $a \in H$, e lo si divida con resto per n . Il resto sta in H , dunque...

Esercizio 14.9. Si mostri che i sottogruppi di \mathbf{Z} sono anche ideali di \mathbf{Z}

Esercizio 14.10. Sia A un dominio euclideo. Si mostri che ogni suo ideale è *principale*, nel senso che ogni ideale I di A è della forma $I = cA = \{ca : a \in A\}$ per un opportuno $c \in I$.

La dimostrazione è una estensione di quella fatta nell'Esercizio 14.8 per mostrare chi sono i sottogruppi di \mathbf{Z} . Si noti innanzitutto che se $I = \{0\}$, allora $I = 0A$.

Se invece $I \neq \{0\}$, sia $c \in I$, $c \neq 0$, con norma minima fra gli elementi di I diversi da 0. Si mostri che se $a \in I$, allora il resto r della divisione di a per c ha norma minore di quella di c , e dunque deve essere $r = 0$. Da questo segue che $I = cA$.

Esercizio 14.11. Sia G un gruppo, e H un suo sottogruppo.

Si mostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti

- (1) per ogni $a \in G$ si ha $aH = Ha$;
- (2) per ogni $a \in G$ si ha $a^{-1}Ha = H$;
- (3) per ogni $a \in G$ si ha $a^{-1}Ha \subseteq H$.

Qui si intende $aH = \{ah : h \in H\}$, $Ha = \{ha : h \in H\}$, $a^{-1}Ha = \{a^{-1}ha : h \in H\}$.

(SUGGERIMENTO: Il punto meno ovvio è mostrare che (3) implica (2). Sia $b \in G$. Da un lato prendendo $a = b$ in (3) si ha $b^{-1}Hb \subseteq H$. Dall'altro, prendendo $a = b^{-1}$ in (3) si ha $(b^{-1})^{-1}Hb^{-1} = bHb^{-1} \subseteq H$, e moltiplicando a destra per b e a sinistra per b^{-1} si ottiene $H \subseteq b^{-1}Hb$, da cui $H = b^{-1}Hb$.)

E questo dovrebbe essere tutto,

Buone Feste!