DIARIO DEL CORSO DI MATHEMATICS FOR DATA SCIENCE

TRENTO, A.A. 2018/19

DOCENTI: ANDREA CARANTI, SIMONE UGOLINI

Nota. La descrizione di lezioni non ancora svolte si deve intendere come una previsione/pianificazione.

Lezione 1. (Ugolini) martedí 18 settembre 2018 (1 ora)

Introduzione al corso. Soluzioni di un'equazione lineare in una incognita. Soluzioni di un'equazione lineare in due incognite. Soluzioni di un sistema lineare in due incognite (cenni). Piano cartesiano.

Lezione 2. (Ugolini) giovedí 20 settembre 2018 (2 ore)

Equazione cartesiana di una retta nel piano. Vettori applicati nel piano. Equivalenza fra vettori applicati nel piano. Vettori di $\mathbf{R}^2$. Lunghezza di un vettore. Moltiplicazione di uno scalare per un vettore.

Lezione 3. (Ugolini) martedí 25 settembre 2018 (1 ora)

Somma fra vettori di $\mathbf{R}^2$, sue proprietà e interpretazione geometrica. Ricerca delle soluzioni di sistemi lineari con 2 equazioni lineari in 2 incognite usando il metodo di eliminazione. Interpretazione geometrica dei 3 casi possibili (soluzione unica, infinite soluzioni e nessuna soluzione) come posizione reciproca di due rette nel piano.

Lezione 4. (Ugolini) giovedí 27 settembre 2018 (2 ore)

Se $a, b \in \mathbf{R}$ non sono entrambi nulli, allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione $ax + by = c$ sono della forma

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$$

con $t \in \mathbf{R}$. Equazione parametrica di una retta nel piano. Passaggio da equazione parametrica a equazione implicita (cartesiana) e viceversa. L'insieme $\mathbf{R}^n$ delle n-ple di numeri reali. Generalizzazione delle operazioni sui vettori di $\mathbf{R}^2$ ai vettori di $\mathbf{R}^n$. Cenni alla definizione di spazio vettoriale. Scrittura matriciale di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Matrici (notazioni).

Date: Trento, A. A. 2018/19.

Lezione 5. (Caranti) martedí 2 ottobre 2018 (1 ora)

Ancora matrici. Matrici dei coefficienti di un sistema lineare: matrice incompleta e matrice completa. Le matrici costituiscono un modo compatto per rappresentare le cosiddette funzioni lineari (solo un brevissimo cenno).

Somma di matrici: si può fare solo quando le matrici hanno la stessa forma $m \times n$.

Prodotto di matrici. Il caso del prodotto di una matrice $1 \times n$ (vettore riga) per una matrice $n \times 1$ (vettore colonna). Prodotto scalare: interpretazione in termini dell'angolo fra due vettori (solo un breve cenno). Prodotto di una matrice $m \times k$ per una matrice $k \times n$.

Esempi. Date due matrici a, b, può essere possibile fare il prodotto ab ma non quello ba. Anche quando si possono fare entrambi, può ben essere $ab \neq ba$.

Matrice identica o identità $\mathbf{1}$ (anche scritta I, o magari $\mathbf{1}_n$ o I_n per indicare che si tratta di una matrice $n \times n$).

Somma e prodotto fra matrici soddisfano le sguenti proprietà (solo enunciato), quando le somme e i prodotti indicati si possono fare:

$$\begin{cases} a(b+c) = ab + ac, \\ (b+c)a = ba + ca, \\ (ab)c = a(bc). \end{cases}$$

Lezione 6. (Ugolini) giovedí 4 ottobre 2018 (2 ore)

Se un sistema $Ax = b$ ha una soluzione x_0, allora tutte e sole le soluzioni del sistema sono della forma $x_0 + y$, con y soluzione del sistema omogeneo associato $Ax = O$. Sottospazi vettoriali. L'insieme delle soluzioni di $Ax = O$ un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$. Sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulla matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo che trasformano il sistema in un sistema equivalente. Interpretazione di tali operazioni con il prodotto di matrici elementari. Matrici diagonali. Sistemi lineari a scalini.

Lezione 7. (Caranti) martedí 9 ottobre 2018 (1 ora)

Risoluzione di un sistema di equazioni lineari omogenee mediante le operazioni elementari.

Lezione 8. (Caranti) giovedí 11 ottobre 2018 (2 ore)

Ancora sistemi di equazioni lineari omogenee mediante le operazioni elementari.
Rango per righe e per colonne. Basi. Vettori linearmente (in)dipendenti.

Lezione 9. (Ugolini) martedí 16 ottobre 2018 (1 ora)

Matrici identit. Trasposta di una matrice. Il rango per righe uguale al rango per colonne e coincide con il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti (solo enunciato). Come ricavare una base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo dalla forma RREF della matrice dei coefficienti (inizio).

Lezione 10. (Ugolini) giovedí 18 ottobre 2018 (2 ore)

Come ricavare una base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo dalla forma RREF della matrice dei coefficienti (continuazione). Esempi. Se la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo ha rango k, allora lo spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione $n - k$. Quest'ultimo numero detto la nullit del sistema lineare. Esercizi su sistemi di generatori, vettori linearmente indipendenti e basi. Sistemi lineari non-omogenei. Matrice completa. Se nella riduzione a gradini della matrice completa compare un pivot nell'ultima colonna, allora il sistema non ha soluzione.

Lezione 11. (Ugolini) martedí 23 ottobre 2018 (1 ora)

Teorema di Rouché-Capelli: un sistema lineare $Ax = b$, dove A una matrice $m \times n$, ha soluzioni se e solo se $rg(A) = rg([A|b])$. Inoltre, qualora esistano soluzioni, si ha che se $n = rg(A)$ allora la soluzione unica, mentre se $n > rg(A)$ vi sono infinite soluzioni che dipendono da $n - rg(A)$ parametri liberi (variabili libere). Esercizi sulla ricerca delle soluzioni di un sistema lineare non-omogeneo.

Lezione 12. (Caranti) giovedí 25 ottobre 2018 (2 ore)

Discussione dei concetti di

- sistemi di vettori linearmente indipendenti,
- sistemi di generatori,
- basi,

e delle relazioni fra di essi. Se $m > n$, allora m vettori in $\mathbf{R}^n$ sono linearmente indipendenti.

Determinante di una matrice quadrata. Definizione e metodo di calcolo mediante i pivot. Proprietà:

- se una matrice ha due righe o colonne eguali, allora il determinante è zero;
- scambiando due righe o colonne di una matrice, il determinante cambia di segno;
- il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Calcolo del determinante di una matrice 2×2. Formula di Laplace e formula con le diagonali per il calcolo del determinante di una matrice 3×3.

Matrici invertibili. Una matrice invertibile ha determinante diverso da zero. Inizio del viceversa: esempi del metodo di calcolo della matrice inversa.

Lezione 13. (Ugolini) martedí 30 ottobre 2018 (1 ora)

Operazioni elementari di riga e determinante di una matrice. Esempio di calcolo del determinante di una matrice 3×3 attraverso la riduzione a gradini, con il metodo di Sarrus e con il metodo di Laplace rispetto a due righe diverse. Esempio di calcolo del determinante di una matrice 4×4 attraverso la riduzione a gradini e con il metodo di Laplace.

Lezione 14. martedí 31 ottobre 2018 (3 ore)

Caranti + Ugolini
Prima prova intermedia.

Lezione 15. (Ugolini) martedí 6 novembre 2018 (2 ore)

Matrici triangolari e loro determinante. Determinante delle matrici elementari di Gauss. Le matrici elementari sono invertibili: $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$, $D_i(k)^{-1} = D_i(k^{-1})$, $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$. Algoritmo per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata A il cui determinante diverso da 0 tramite riduzione in forma RREF $[I_n|B]$ della matrice a blocchi $[A|I_n]$. Esempi.

Lezione 16. (Ugolini) giovedí 8 novembre 2018 (2 ore)

Calcolo dell'inversa di una matrice 3×3. Formula per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile 2×2. Definizione di spazio vettoriale. Esempi: $\mathbb{R}^n$, spazio delle matrici $m \times n$, spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, spazio $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Spazio vettoriale $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ generato da n vettori $v_1, \dots, v_n$ di uno spazio vettoriale V. Esempio di spazio generato da due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ (piano nello spazio passante per l'origine).

Lezione 17. (Ugolini) martedí 13 novembre 2018 (1 ora)

Equazioni parametriche di rette e piani nello spazio. Esempi. Estrazione di una base da un sistema di generatori: se $v_1, \dots, v_n$ sono n vettori non nulli di uno spazio vettoriale V, allora una parte di essi è una base di V.

Lezione 18. (Ugolini) giovedí 15 novembre 2018 (2 ore)

Teorema del completamento: dati k vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V e una base $b_1, \dots, b_n$ di V, è possibile completare il sistema di vettori $v_1, \dots, v_k$ ad una base aggiungendo alcuni dei vettori $b_1, \dots, b_n$. Corollari per uno spazio vettoriale V di dimensione n. Se dei vettori $v_1, \dots, v_k$ di V sono linearmente indipendenti, allora $k \leq n$. Ogni sistema di generatori di V è formato da almeno n vettori. Se U è un sottospazio di V, allora $\dim(U) \leq n$. Se $\dim(U) = n$, allora $U = V$. Esercizi.

Lezione 19. (Ugolini) martedí 20 novembre 2018 (1 ora)

Esercizio su basi di $\mathbf{R}_2[x]$. Funzioni lineari: definizione. Le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$ definite da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ non sono lineari. Se f è una funzione lineare fra due spazi vettoriali V e W, allora $f(O_V) = O_W$. Una funzione lineare $f : V \to W$ è univocamente determinata dai valori che assume su una base di V. Inoltre tali valori possono essere scelti arbitrariamente in W.

Lezione 20. (Caranti) giovedí 22 novembre 2018 (2 ore)

Gioco del tris e isomorfismo.

Logaritmo e isomorfismi.

Un isomorfismo di spazi vettoriali è una funzione lineare che sia una biiezione. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n (su $\mathbf{R}$), e $v_1, \dots, v_n$ ne è una base, allora la funzione

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}^n \to V \\ &(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \end{aligned}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Funzioni lineari $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Una funzione lineare si può rappresentare in termini di matrici: il caso di uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Lezione 21. (Ugolini) martedí 27 novembre 2018 (1 ora)

Matrice associata ad una funzione lineare fra due spazi vettoriali V e W di dimensione 2 con basi assegnate su V e W. Esempi di scrittura della matrice associata ad una funzione lineare da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ rispetto a basi diverse.

Lezione 22. (Caranti) giovedí 29 novembre 2018 (2 ore)

Esempi di scrittura della matrice associata ad una funzione lineare da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ rispetto a basi diverse.

Lezione 23. (Caranti) martedí 4 dicembre 2018 (1 ora)

Autovalori e autovettori. Polinomio caratteristico (inizio).

Lezione 24. (Caranti) giovedí 6 dicembre 2018 (2 ore)

Polinomio caratteristico. Siano V uno spazio vettoriale (diciamo di dimensione n), e $f : V \to V$ una funzione lineare. Un numero (reale) λ si dice un *autovalore* di f se esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$. (Se ammettessi anche $v = 0$, allora ogni numero λ sarebbe un autovalore, dato che $f(0) = 0 = \lambda 0$, decisamente poco interessante.)

In termini della matrice $n \times n$ A associata a f rispetto a una base fissata, abbiamo che esiste un vettore $X \neq 0$ (colonna alto n) tale $AX = \lambda X$. Notando che che $\lambda X = (\lambda I)X$, dove I è la matrice identica/identità $n \times n$, abbiamo dunque $0 = AX - (\lambda I)X = (A - \lambda I)X$. Dunque questo sistema di n equazioni lineari omogenee in n incognite ha una soluzione $X \neq 0$, e questo capita esattamente quando $A - \lambda I$ *non* ha rango massimo, ovvero $\det(A - \lambda I) = 0$. Ora $\det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado n in λ, che si dice *polinomio caratteristico* di A (o di f — vedremo che non dipende dalla base scelta). Le radici del polinomio caratteristico sono duque gli autovalori di f (cioè di A).

Esempi.

Lezione 25. (Ugolini) martedí 11 dicembre 2018 (1 ora)

Calcolo di autovalori, autovettori (e autospazi) di due matrici 3×3.

Lezione 26. (Caranti) giovedí 13 dicembre 2018 (2 ore)

Matrici diagonalizzabili. Molteplicità algebrica e geometrica. Il prodotto di matrici corrisponde alla composizione di funzioni lineari: formula $B = T^{-1}AT$.

Lezione 27. (Ugolini) martedí 18 dicembre 2018 (1 ora)

Ripasso.

Lezione 28. (Caranti) giovedí 20 dicembre 2018 (2 ore)

Ripasso.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, via Sommarive 14, 38123 Trento

E-mail address: `andrea.caranti@unitn.it`

URL: `http://www.science.unitn.it/~caranti/`