Anelli e Domini Euclidei

Considerazioni di tipo geometrico relative ad alcuni anelli

Pietro Zanoni

Università degli Studi, facoltà di Scienze

Qui comincia la sventura...

Siamo a conoscenza del fatto che non tutti i sottoanelli di $\mathbb{C}$ della forma $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$ sono Domini Euclidei Forti.

Qui comincia la sventura...

Siamo a conoscenza del fatto che non tutti i sottoanelli di $\mathbb{C}$ della forma $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$ sono Domini Euclidei Forti. In altre parole, dati $a, b \in A$, $b \neq 0$, non sempre esistono $q, r \in A$ tali che è possibile effettuare la divisione con resto così definita:

Qui comincia la sventura...

Siamo a conoscenza del fatto che non tutti i sottoanelli di $\mathbb{C}$ della forma $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$ sono Domini Euclidei Forti. In altre parole, dati $a, b \in A$, $b \neq 0$, non sempre esistono $q, r \in A$ tali che è possibile effettuare la divisione con resto così definita:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ \|r\| < \|b\| \end{cases}$$

Qui comincia la sventura...

Siamo a conoscenza del fatto che non tutti i sottoanelli di $\mathbb{C}$ della forma $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$ sono Domini Euclidei Forti. In altre parole, dati $a, b \in A$, $b \neq 0$, non sempre esistono $q, r \in A$ tali che è possibile effettuare la divisione con resto così definita:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ \|r\| < \|b\| \end{cases}$$

A differenza di quanto accade su $\mathbb{Z}$, q e b in generale non sono unici.

Divisione su $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

A partire dalla definizione precedente, ottengo la seguente condizione sufficiente a garantire che un anello è Dominio Euclideo Forte:

Divisione su $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

A partire dalla definizione precedente, ottengo la seguente condizione sufficiente a garantire che un anello è Dominio Euclideo Forte:
$\forall w \in \mathbb{C}$ devono esistere

$$\begin{cases} q \in \mathbb{Z}[\sqrt{-m}] \\ t \in \mathbb{C} \quad t.c. \quad \|t\| < 1 \\ t.c. \quad ab^{-1} = q + t \end{cases}$$

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}$

I i termini q, t, ab^{-1} possono essere scomposti in questo modo:

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

I i termini q, t, ab^{-1} possono essere scomposti in questo modo:

$$\begin{cases} q = q_1 + q_2\sqrt{-m} \\ t = t_1 + t_2\sqrt{-m} \\ ab^{-1} = q + t = z_1 + z_2\sqrt{-m} \end{cases}$$

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

I i termini q, t, ab^{-1} possono essere scomposti in questo modo:

$$\begin{cases} q = q_1 + q_2\sqrt{-m} \\ t = t_1 + t_2\sqrt{-m} \\ ab^{-1} = q + t = z_1 + z_2\sqrt{-m} \end{cases}$$

In seguito useremo questa simbologia.

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}$

Sviluppando la condizione $\|t\| < 1$ giungo a questa disequazione:

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2 < 1$$

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}$

Sviluppando la condizione $\|t\| < 1$ giungo a questa disequazione:

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2 < 1$$

La considero in funzione di $z_1, z_2\sqrt{m}$ e pensando $q_1, q_2\sqrt{m}$ come parametri.

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

Sviluppando la condizione $\|t\| < 1$ giungo a questa disequazione:

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2 < 1$$

La considero in funzione di $z_1, z_2\sqrt{m}$ e pensando $q_1, q_2\sqrt{m}$ come parametri.
Osservo che questa disuguaglianza è analoga a quella che descrive l'interno d'un cerchio, ossia $(x-a)^2 + (y-b)^2 < 1$.

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

Dunque la precedente disequazione individua un cerchio aperto di raggio unitario centrato in $q_1 + q_2\sqrt{-m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$.

Condizioni sulla divisione in $\mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$

Dunque la precedente disequazione individua un cerchio aperto di raggio unitario centrato in $q_1 + q_2\sqrt{-m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$. Quindi è possibile effettuare la divisione con resto tra $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$ se e solo se esiste $q_1 + q_2\sqrt{-m} \in \mathbb{Z}[i]$ tale che il punto che rappresenta ab^{-1} ricade all'interno del cerchio di raggio unitario centrato in $q_1 + q_2\sqrt{-m}$.

Gli interi di Gauss

Considero l’anello $\mathbb{Z}[i]$, noto anche come insieme degli *interi di Gauss* e ripenso al significato delle affermazioni precedenti.

Gli interi di Gauss

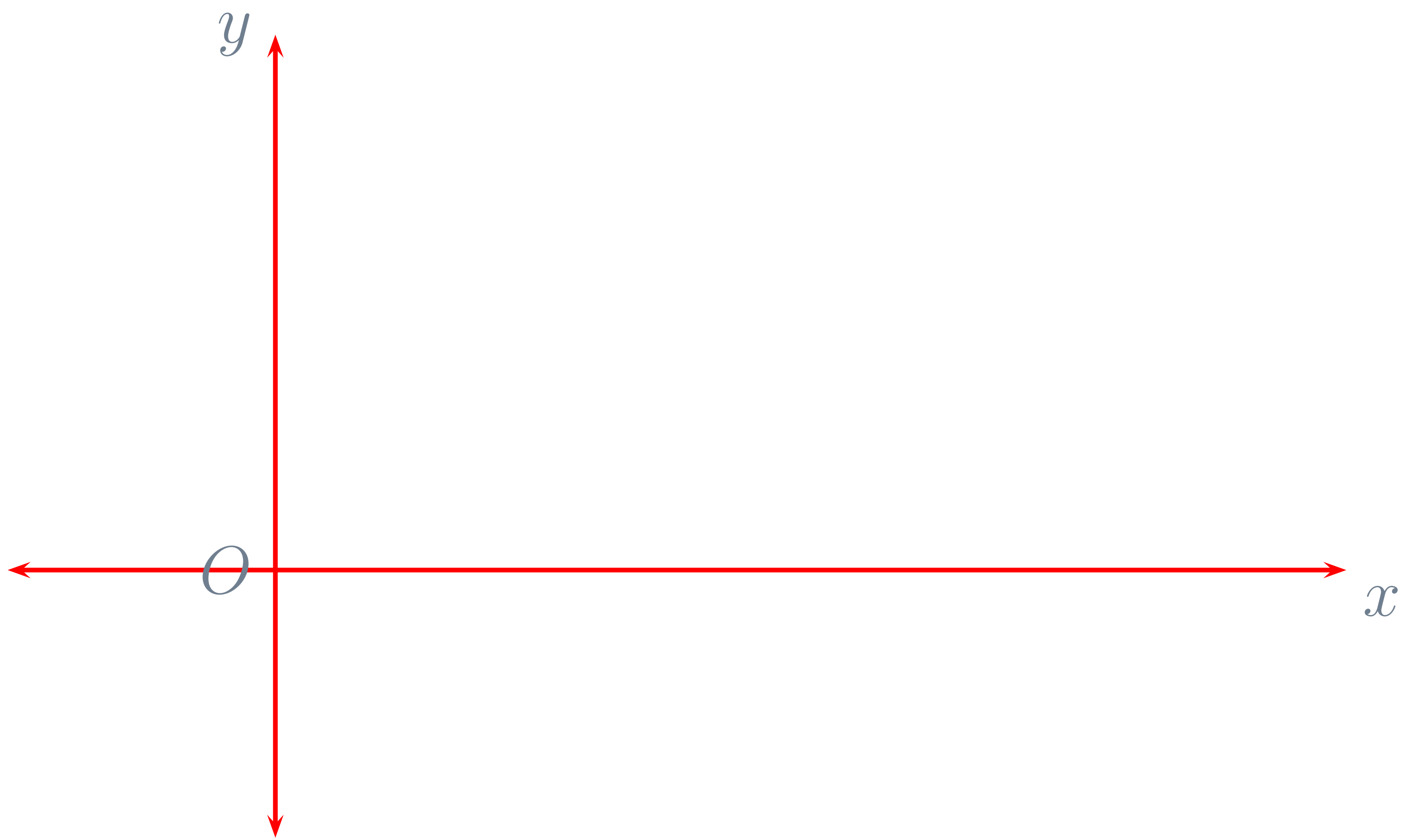
Considero l'anello $\mathbb{Z}[i]$, noto anche come insieme degli *interi di Gauss* e ripenso al significato delle affermazioni precedenti.

$\mathbb{Z}[i]$ è Dominio Euclideo Forte se e solo se per ogni punto di $\mathbb{C}$ sul piano complesso esiste un cerchio di raggio unitario centrato in un elemento di $\mathbb{Z}[i]$ che lo contiene.

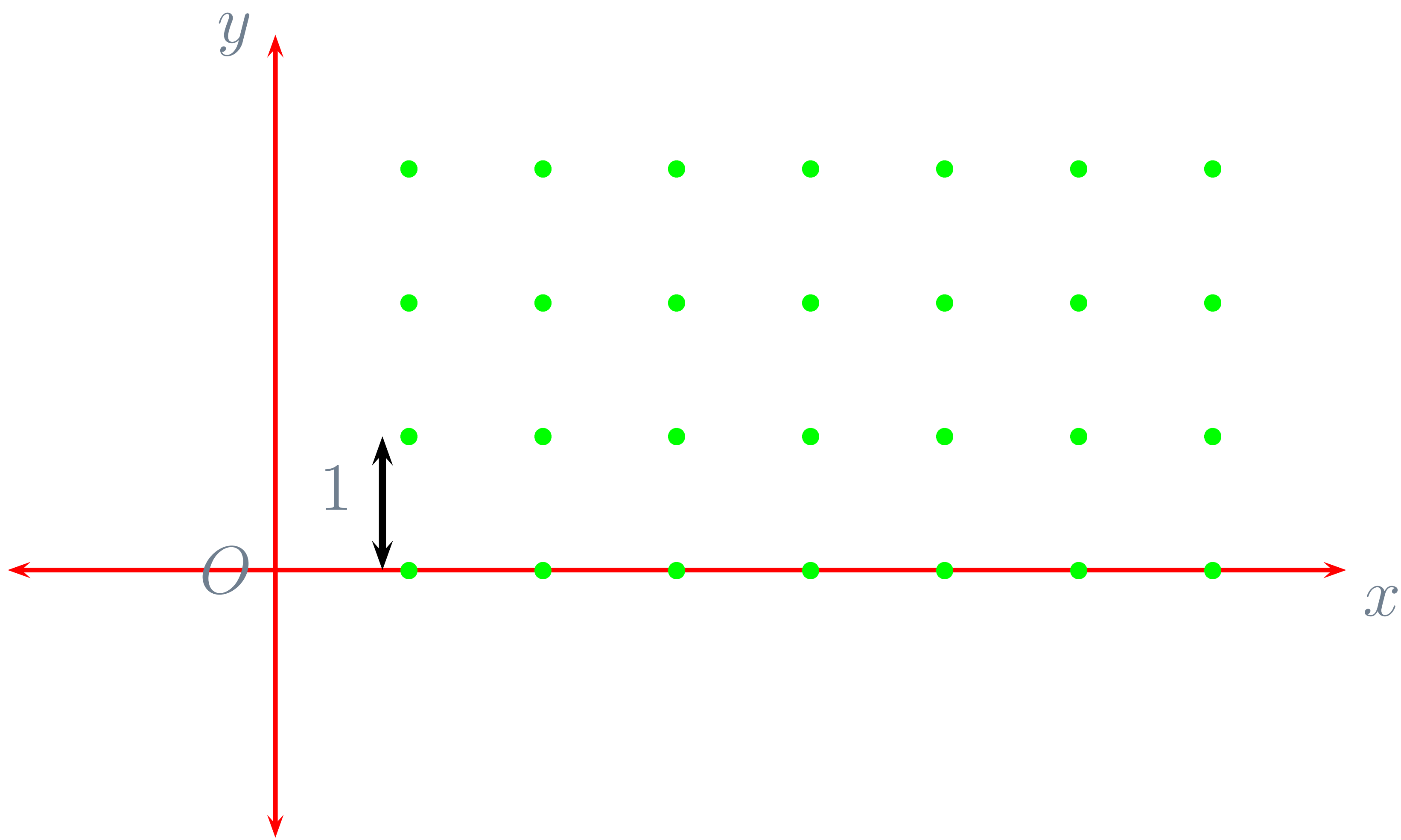
Gli interi di Gauss

Considero l'anello $\mathbb{Z}[i]$, noto anche come insieme degli *interi di Gauss* e ripenso al significato delle affermazioni precedenti.
$\mathbb{Z}[i]$ è Dominio Euclideo Forte se e solo se per ogni punto di $\mathbb{C}$ sul piano complesso esiste un cerchio di raggio unitario centrato in un elemento di $\mathbb{Z}[i]$ che lo contiene.
I cerchi di questo genere devono quindi costituire un *ricoprimento aperto* di $\mathbb{C}$. Da un punto di vista grafico è immediato accorgersene.

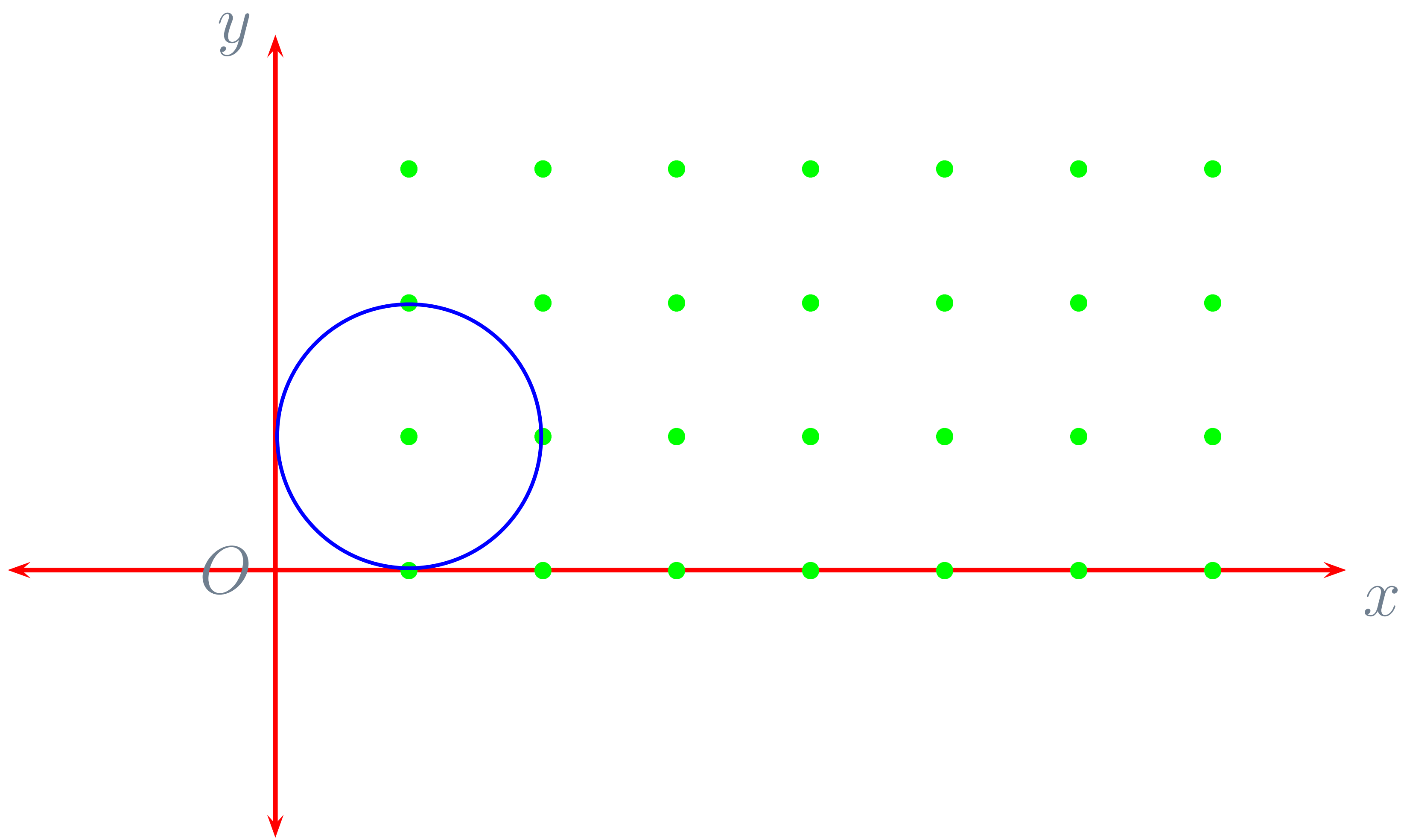
Copertura aperta di $\mathbb{C}$



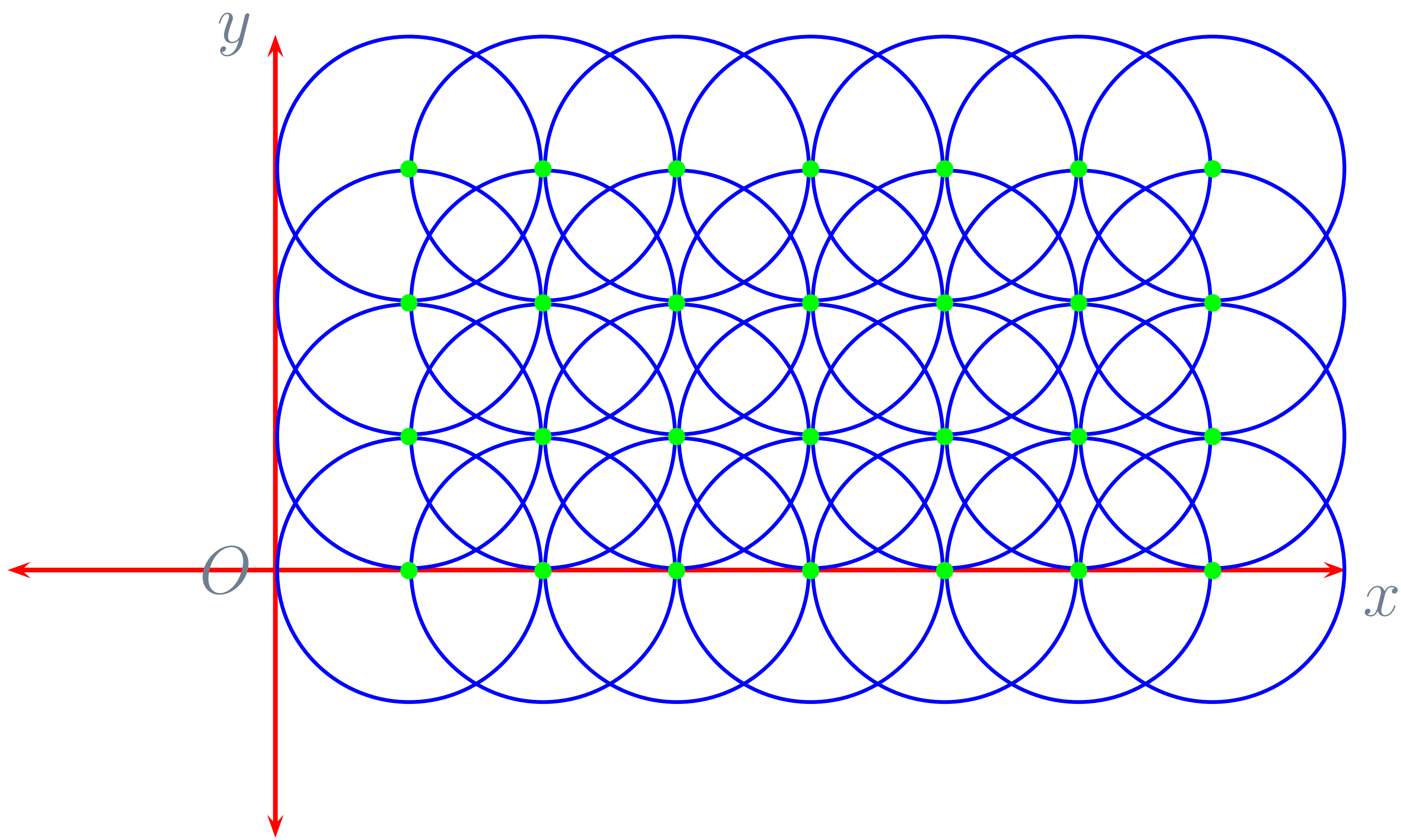
Copertura aperta di $\mathbb{C}$



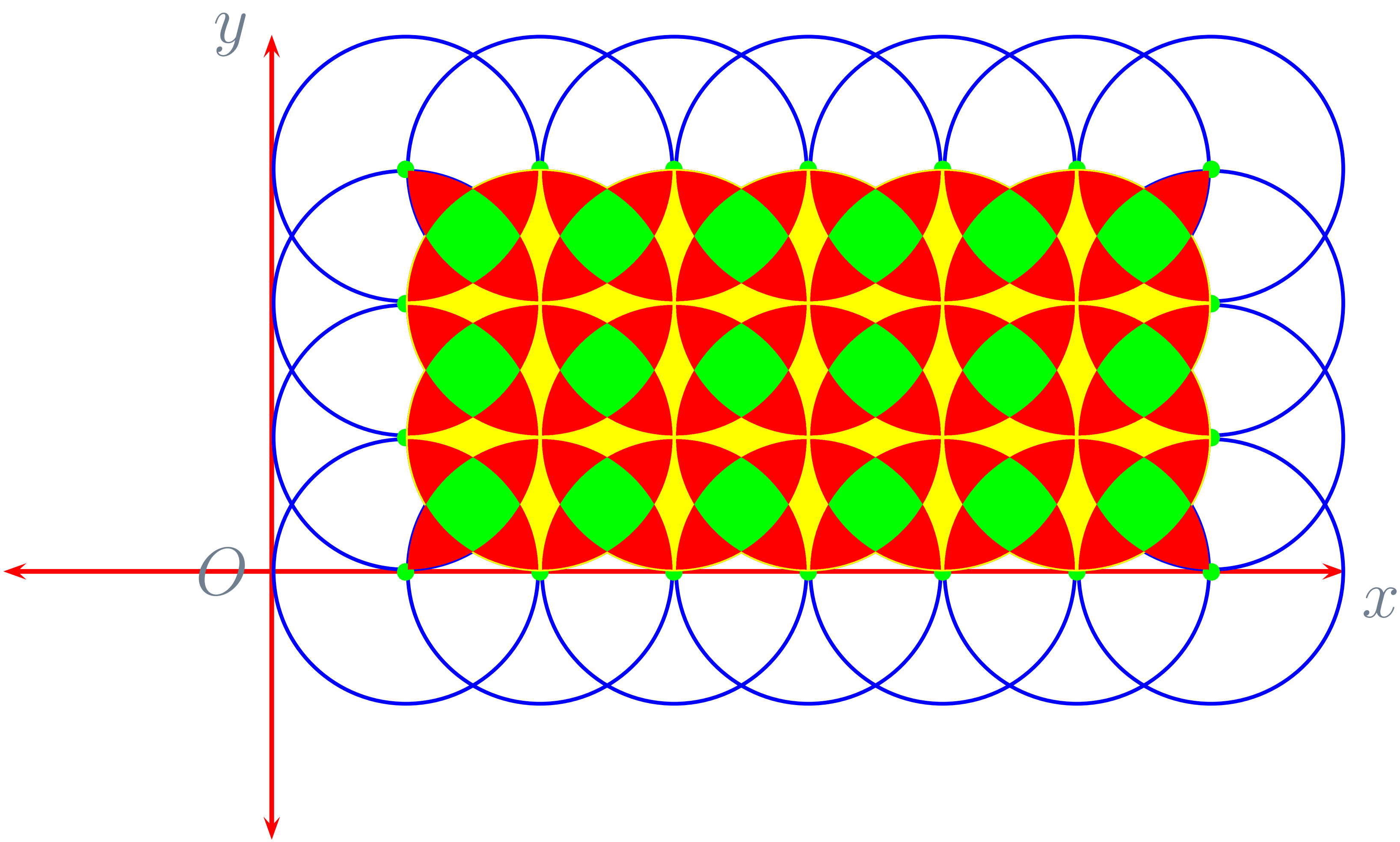
Copertura aperta di $\mathbb{C}$



Copertura aperta di $\mathbb{C}$



Copertura aperta di $\mathbb{C}$



Unicità di resto e quoziente

In generale, i punti del piano complesso sono coperti da più d'un cerchio; ve ne sono fino a 4.

Unicità di resto e quoziente

In generale, i punti del piano complesso sono coperti da più d'un cerchio; ve ne sono fino a 4. Per questo è possibile effettuare la divisione in più modi:

$$\begin{aligned}(5+7i) &= (0+i)(3-5i)+4i \\ &= (-1+i)(3-5i)+(3-i) \\ &= (0+2i)(3-5i)+(-5+i) \\ &= (-1+2i)(3-5i)+(-2-4i)\end{aligned}$$

Condizioni più restrittive

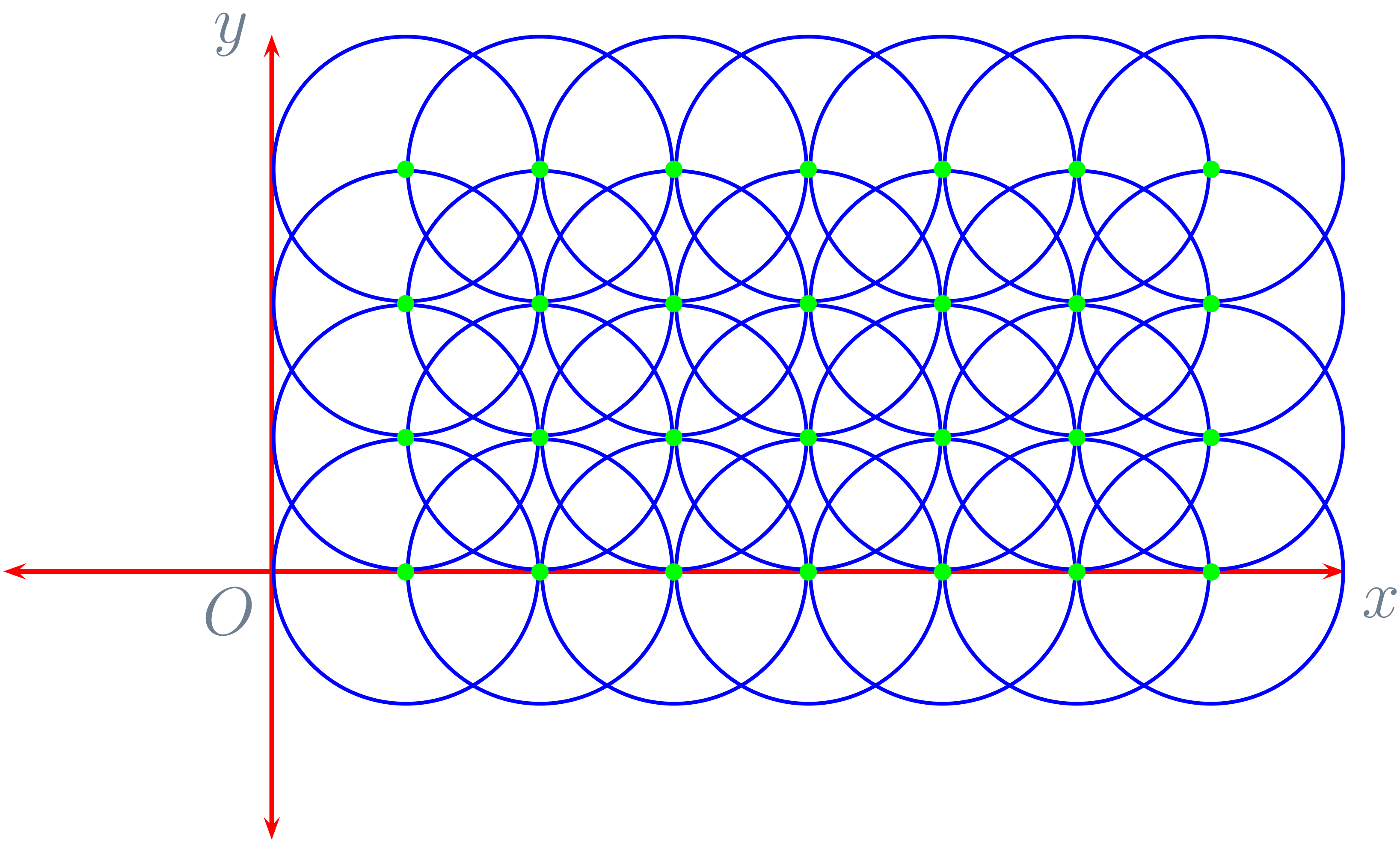
È possibile coprire $\mathbb{C}$ tramite regioni di area minore rispetto ai cerchi di raggio unitario. Questo risultato si ottiene imponendo condizioni più restrittive sul resto della divisione.

Condizioni più restrittive

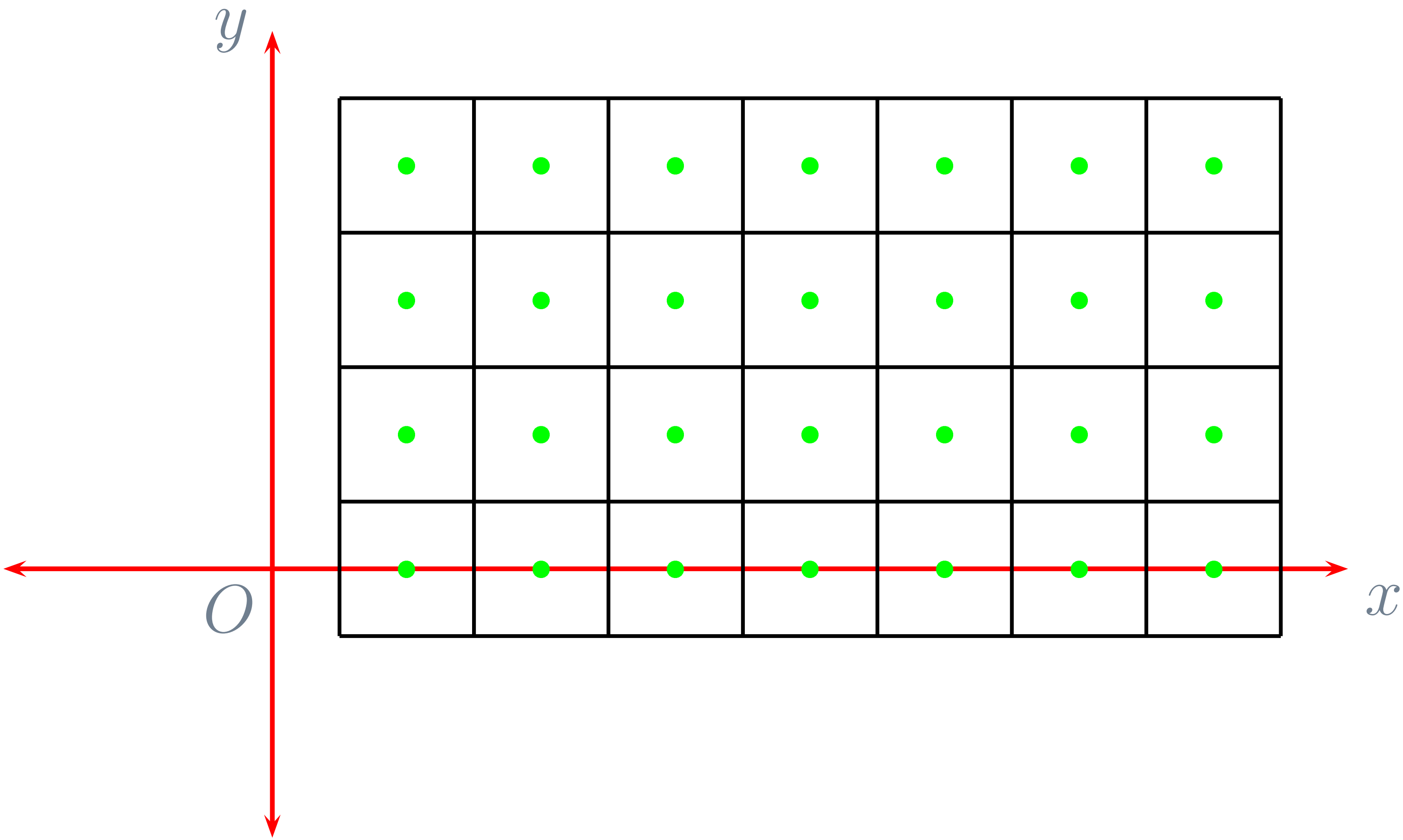
È possibile coprire $\mathbb{C}$ tramite regioni di area minore rispetto ai cerchi di raggio unitario.
Questo risultato si ottiene imponendo condizioni più restrittive sul resto della divisione.

$$\begin{cases} ab^{-1} = (q_1 + iq_2) + (t_1 + it_2) \\ \|t_1\| \leq \frac{1}{2}, \|t_2\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Copertura alternativa di $\mathbb{C}$



Copertura alternativa di $\mathbb{C}$



L’anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

Analizziamo ora l’anello dato da $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

Analizziamo ora l'anello dato da $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Partendo dalle disequazioni viste in precedenza, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

Analizziamo ora l'anello dato da $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
Partendo dalle disequazioni viste in precedenza, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ devono esistere

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

Analizziamo ora l'anello dato da $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
Partendo dalle disequazioni viste in precedenza, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ devono esistere

$$\begin{cases} q \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \\ t \in \mathbb{C} \quad t.c. \quad \|t\| < 1 \\ t.c. \quad ab^{-1} = q + t \end{cases}$$

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

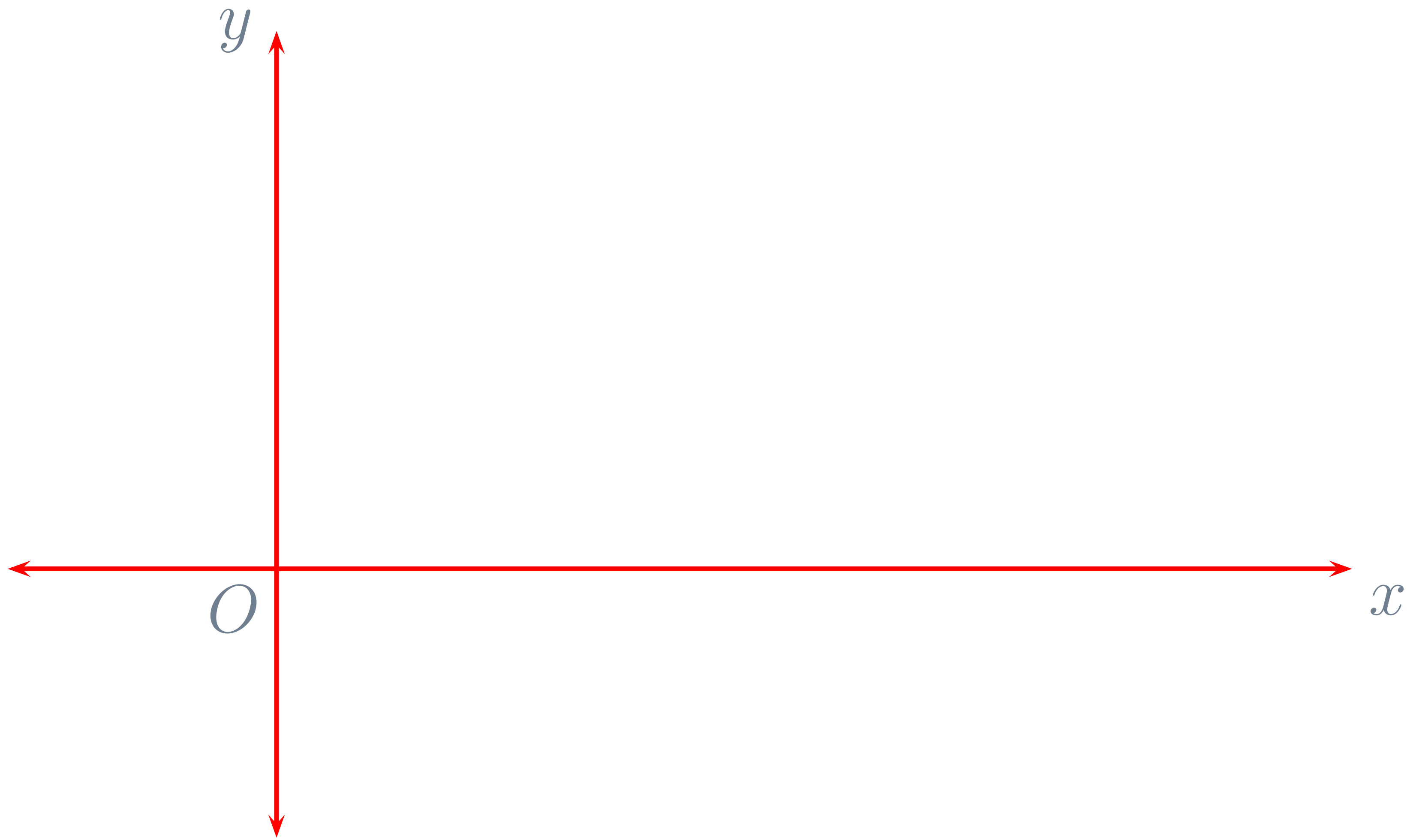
Ripetendo le osservazioni fatte in precedenza per gli interi di Gauss, concludo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ è un Dominio Euclideo Forte *se e solo se* è interamente coperto dai cerchi dati dalla disequazione

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

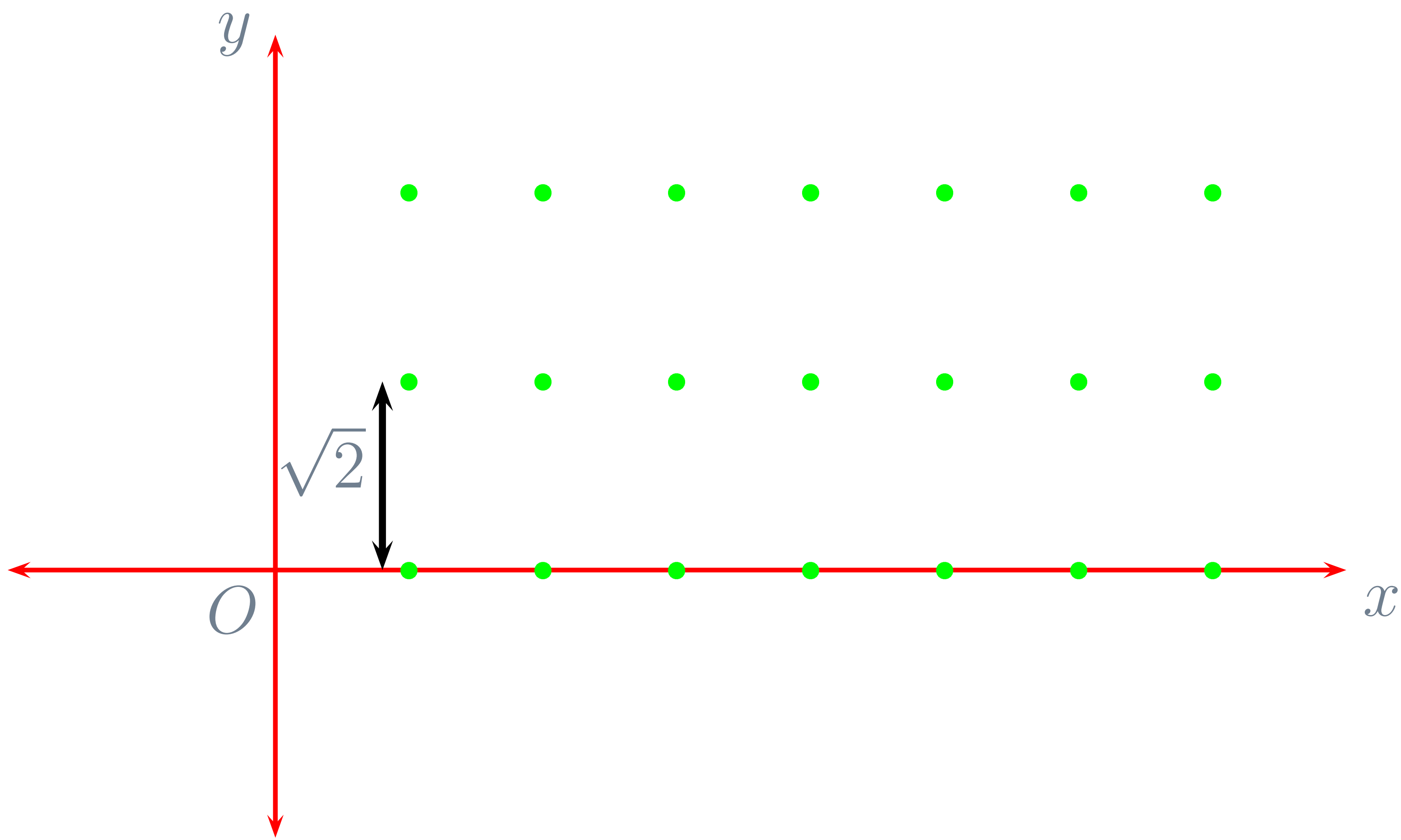
Ripetendo le osservazioni fatte in precedenza per gli interi di Gauss, concludo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ è un Dominio Euclideo Forte *se e solo se* è interamente coperto dai cerchi dati dalla disequazione

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{2} - q_2\sqrt{2})^2 < 1$$

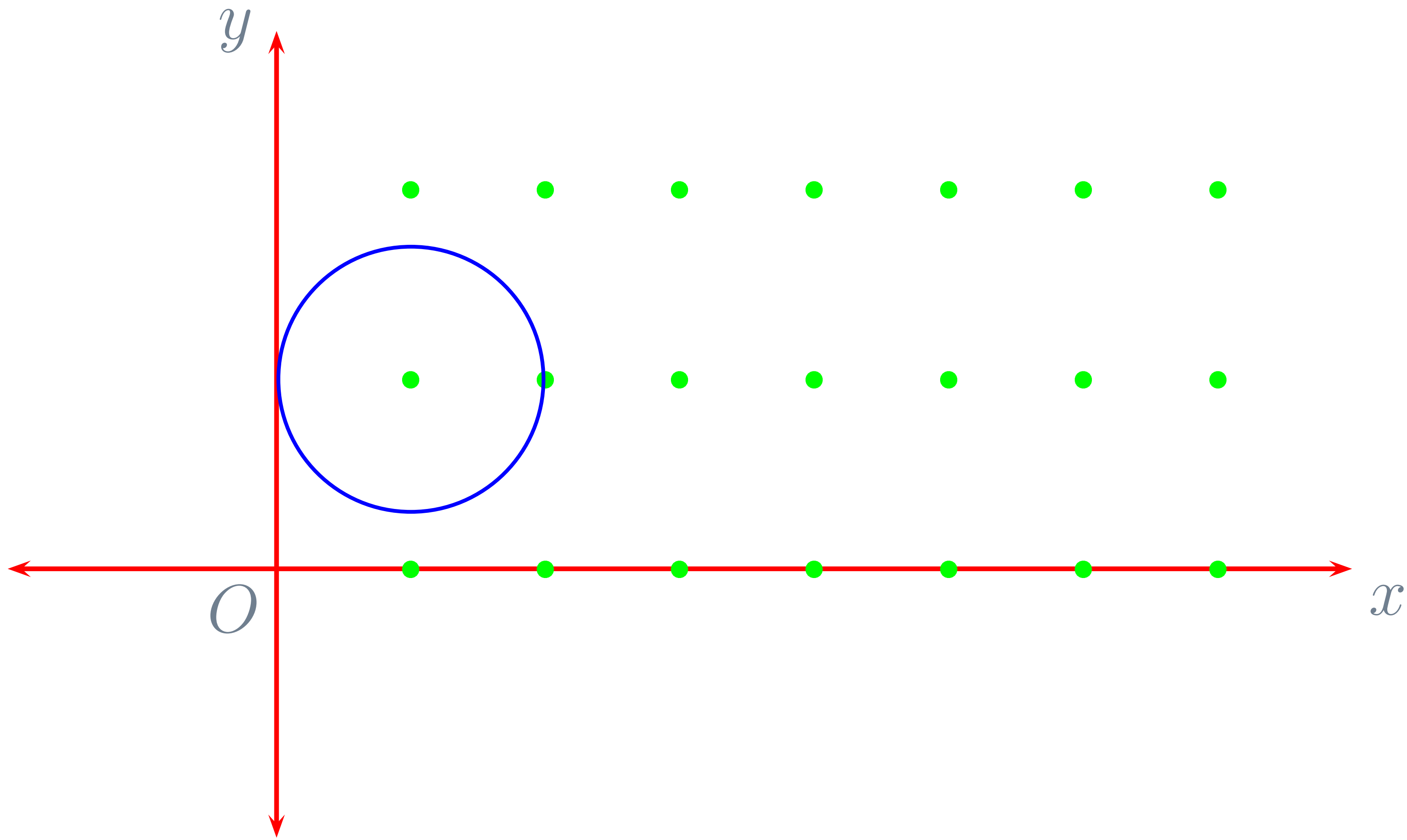
Copertura aperta di $\mathbb{C}$



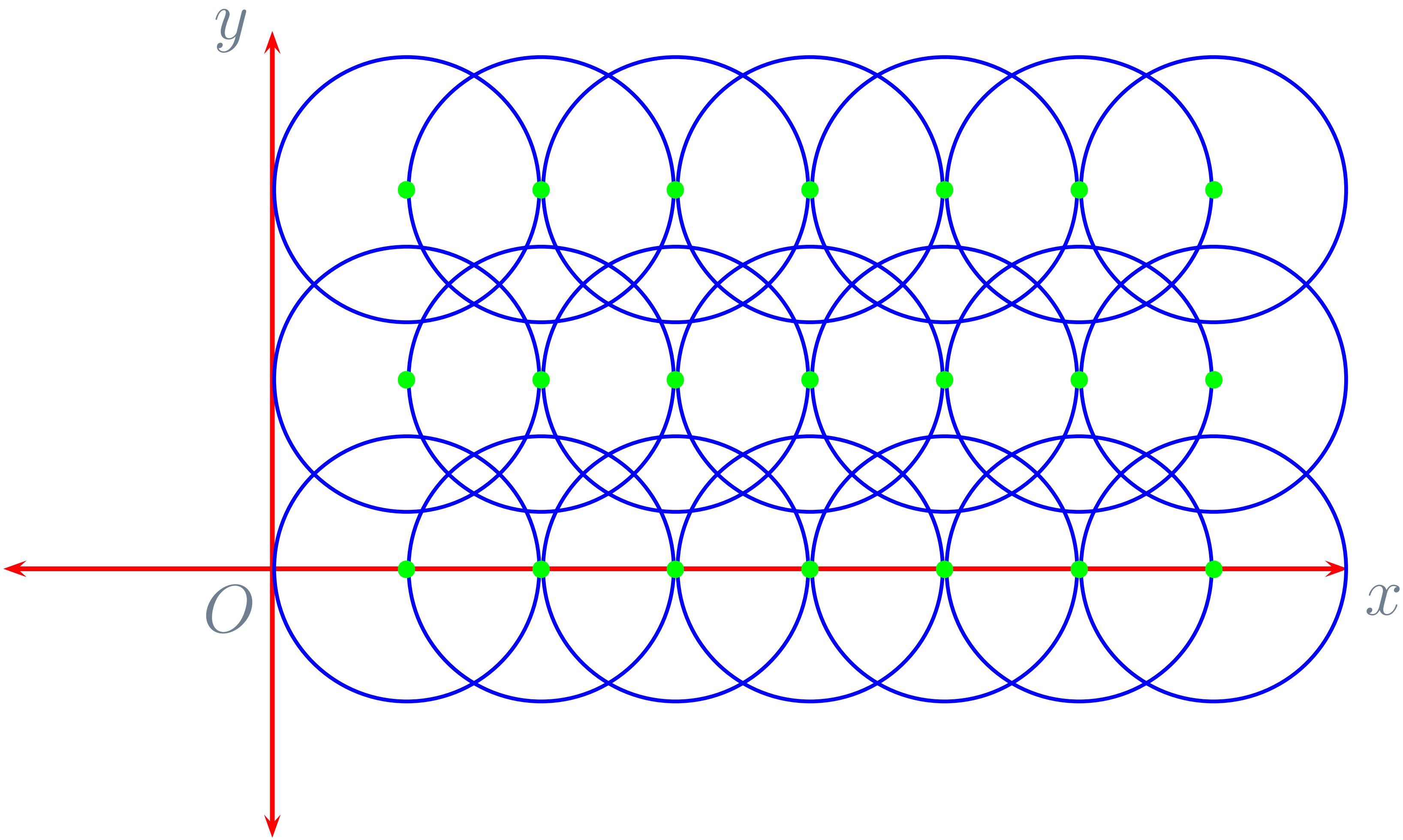
Copertura aperta di $\mathbb{C}$



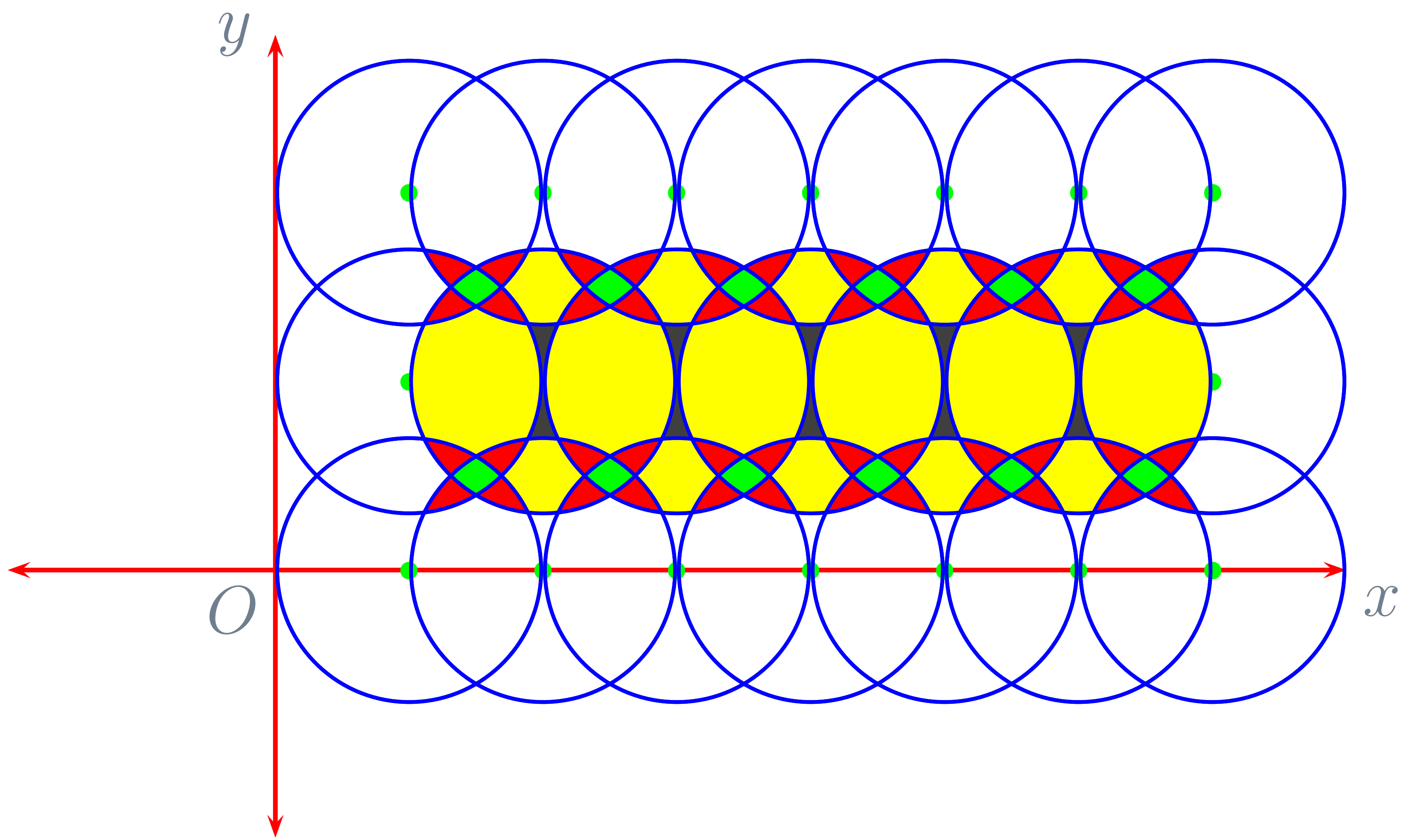
Copertura aperta di $\mathbb{C}$



Copertura aperta di $\mathbb{C}$



Copertura aperta di $\mathbb{C}$



Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

- È un Dominio Euclideo Forte;
- Poiché i cerchi aperti si sovrappongono in determinate regioni, devo poter effettuare la divisione con resto in più modi.
- È possibile realizzare una copertura alternativa per $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ imponendo una condizione più restrittiva sul resto, come già avevamo fatto su $\mathbb{Z}[i]$.

Unicità di resto e quoziente

Ecco un esempio di divisione non unica tra elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

Unicità di resto e quoziente

Ecco un esempio di divisione non unica tra elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

$$\begin{aligned}
(1+3\sqrt{-2}) &= (0+0)(2-4\sqrt{-2})+(1+3\sqrt{-2})\\
&= (-1+0)(2-4\sqrt{-2})+(3-\sqrt{-2})\\
&= (0+\sqrt{-2})(2-4\sqrt{-2})+(-7+\sqrt{-2})\\
&= (-1+\sqrt{-2})(2-4\sqrt{-2})+(-5-3\sqrt{-2})
\end{aligned}$$

Condizioni più restrittive

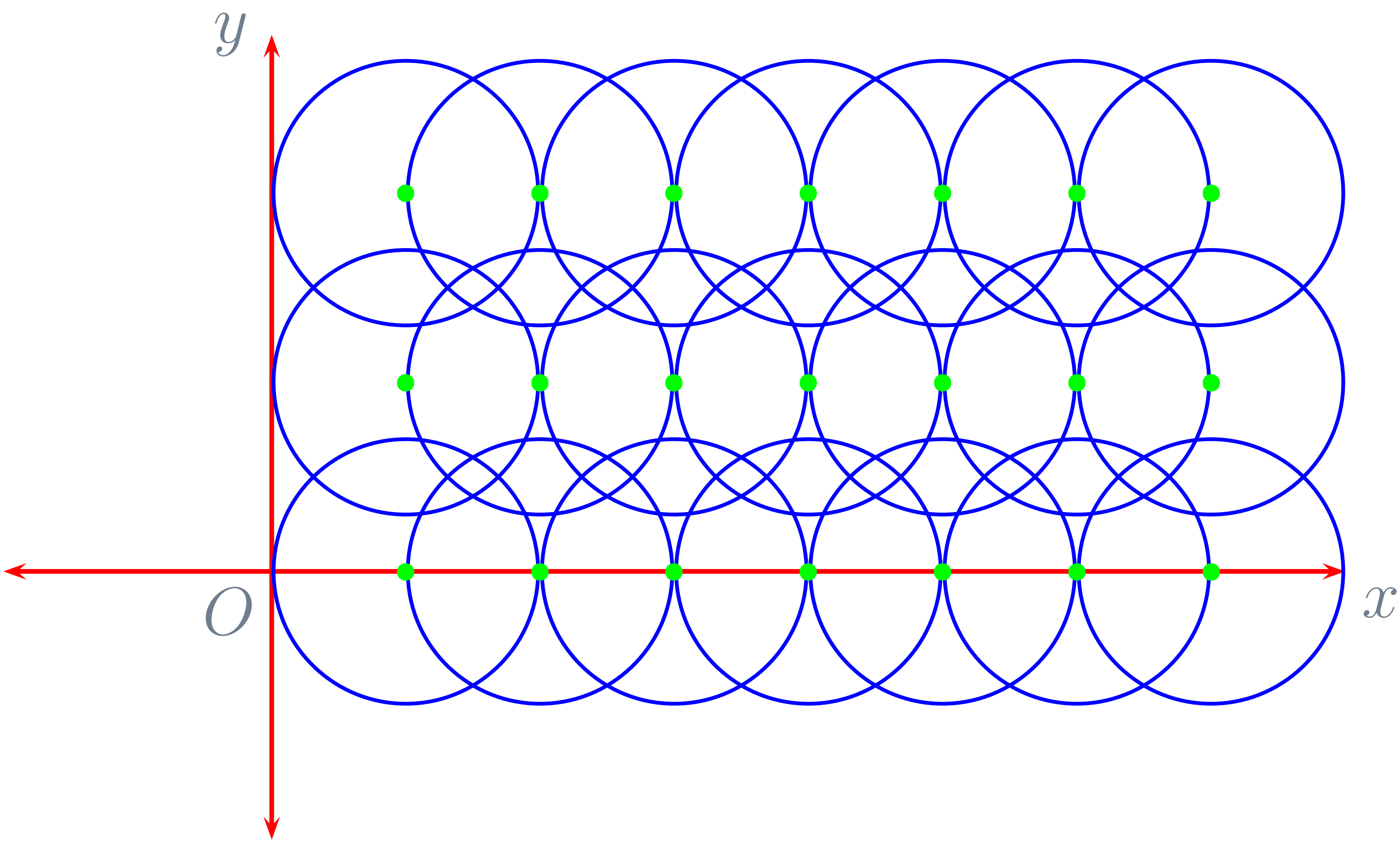
È possibile coprire $\mathbb{C}$ tramite regioni di area minore rispetto ai cerchi di raggio unitario imponendo condizioni più restrittive sul resto della divisione:

Condizioni più restrittive

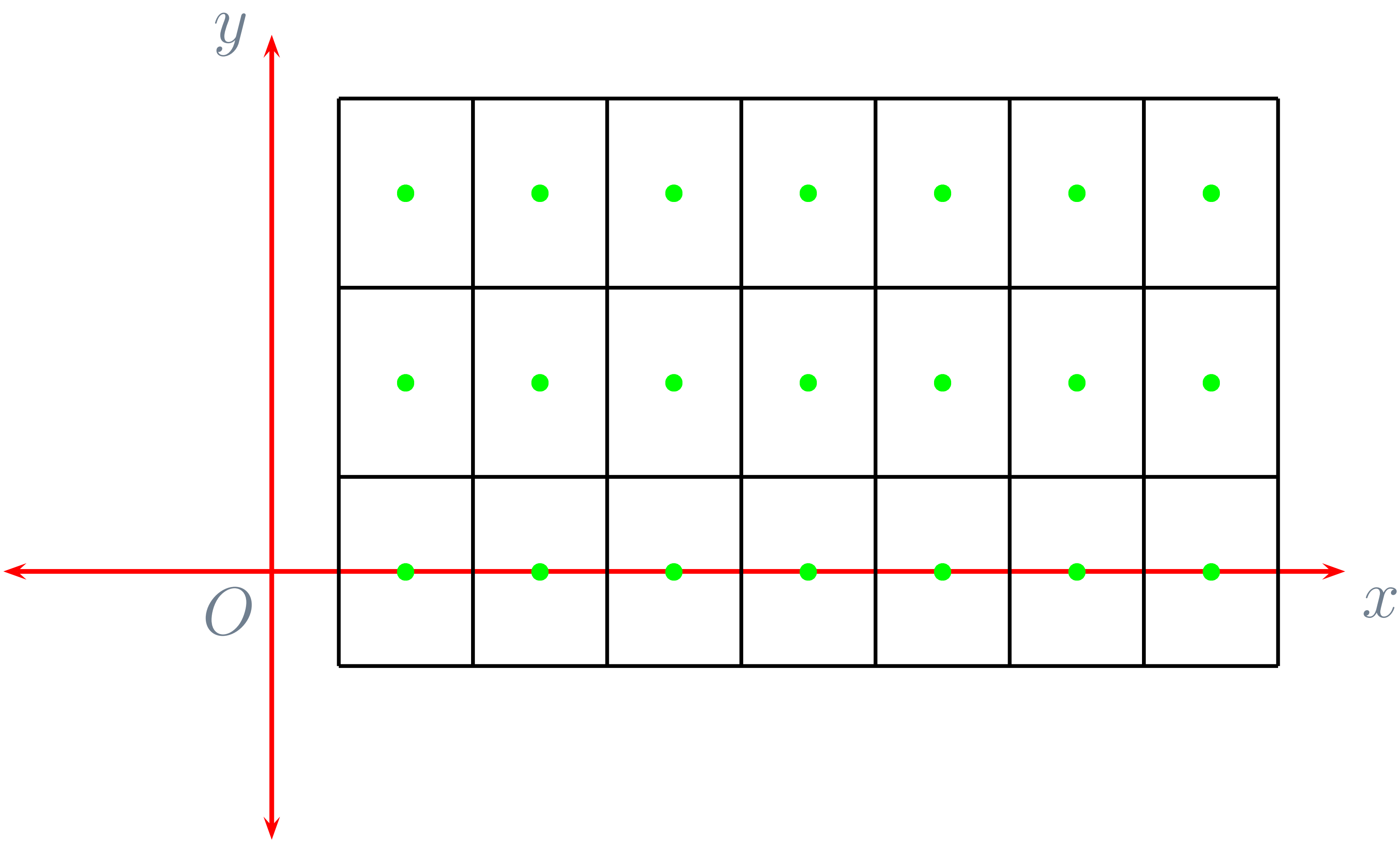
È possibile coprire $\mathbb{C}$ tramite regioni di area minore rispetto ai cerchi di raggio unitario imponendo condizioni più restrittive sul resto della divisione:

$$\begin{cases} ab^{-1} = q_1 + iq_2\sqrt{2} + t_1 + it_2\sqrt{2} \\ \|t_1\| \leq \frac{1}{2}, \|t_2\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Copertura alternativa di $\mathbb{C}$



Copertura alternativa di $\mathbb{C}$



L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Analizziamo ora l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Analizziamo ora l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
A partire dalle disequazioni viste in precedenza, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Analizziamo ora l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
A partire dalle disequazioni viste in precedenza, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ devono esistere

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Analizziamo ora l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
A partire dalle disequazioni viste in precedenza, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ devono esistere

$$\begin{cases} q \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \\ t \in \mathbb{C} \quad t.c. \quad \|t\| < 1 \\ t.c. \quad w = q + t \end{cases}$$

Divisione su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

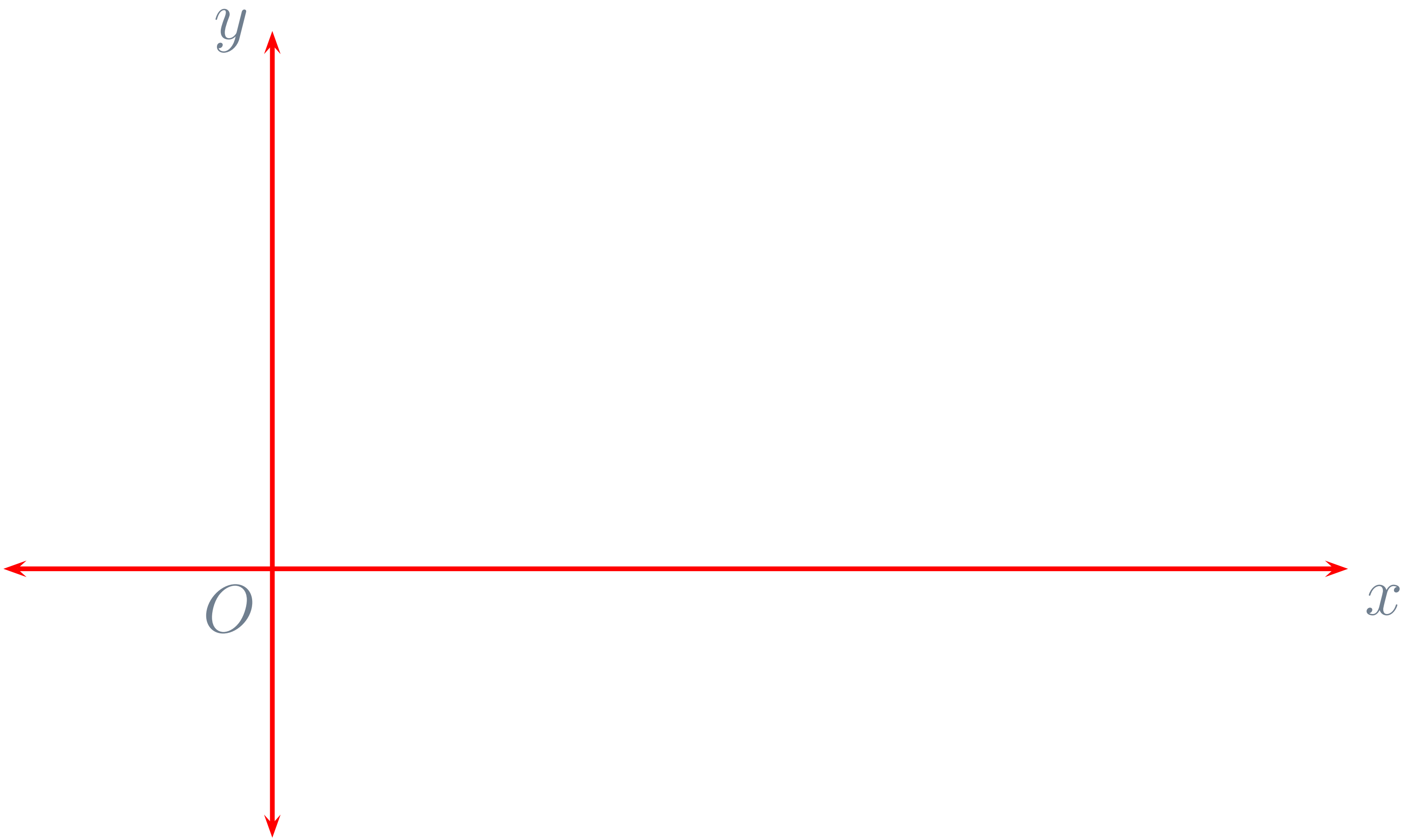
Ripetendo le osservazioni fatte in precedenza per gli interi di Gauss, concludo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è un Dominio Euclideo Forte *se e solo se* è interamente coperto dai cerchi dati dalla disequazione

Divisione su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

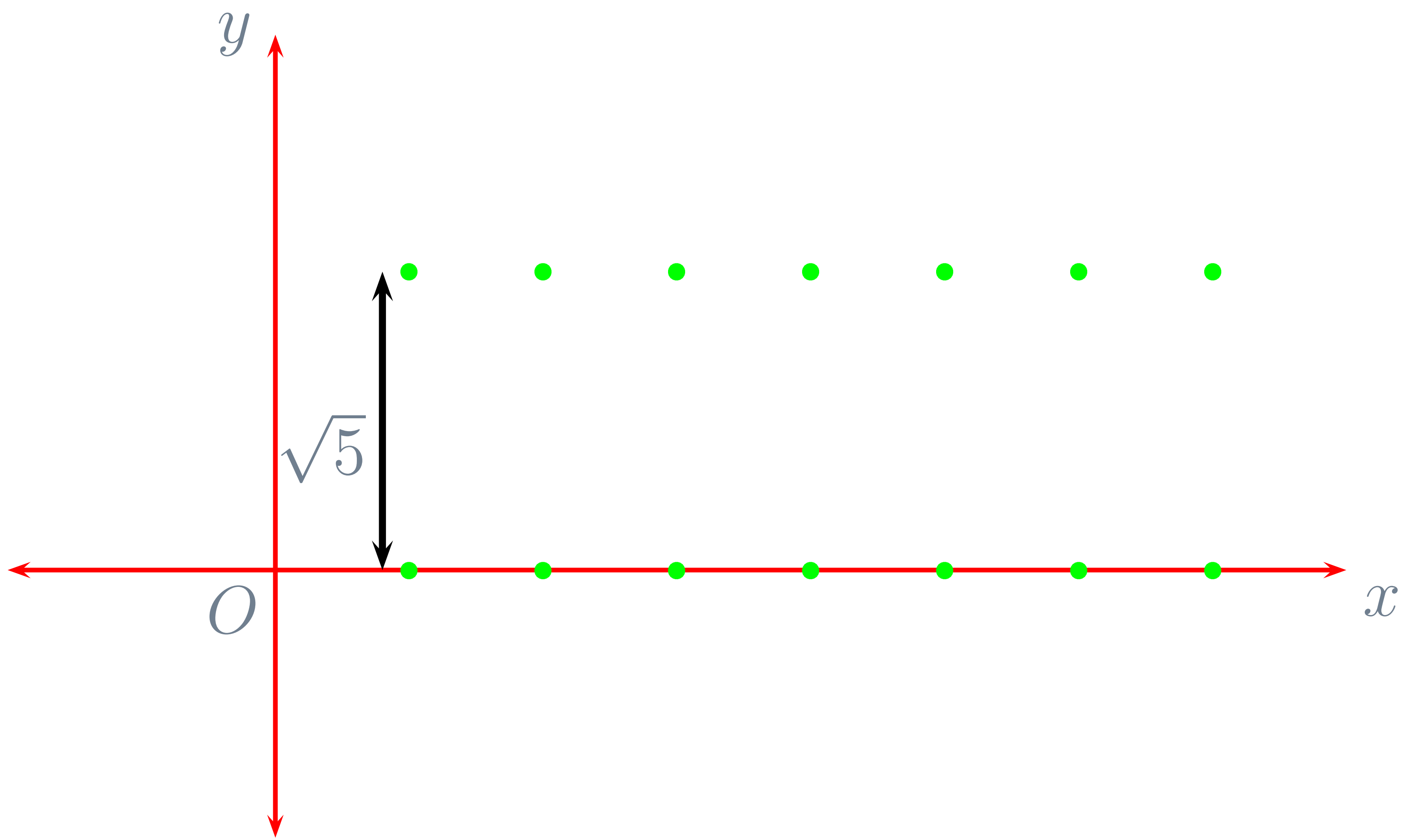
Ripetendo le osservazioni fatte in precedenza per gli interi di Gauss, concludo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è un Dominio Euclideo Forte *se e solo se* è interamente coperto dai cerchi dati dalla disequazione

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{5} - q_2\sqrt{5})^2 < 1$$

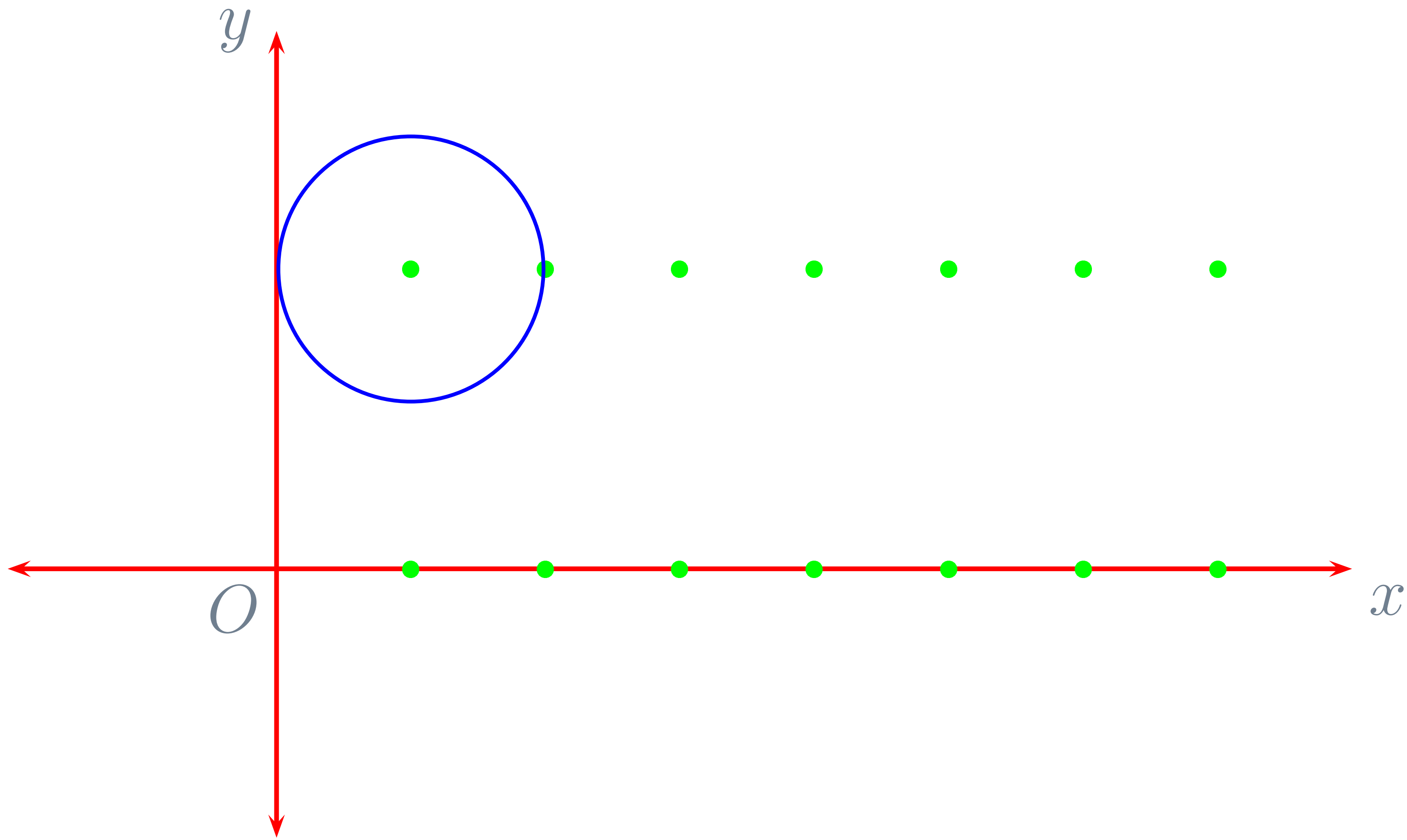
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$



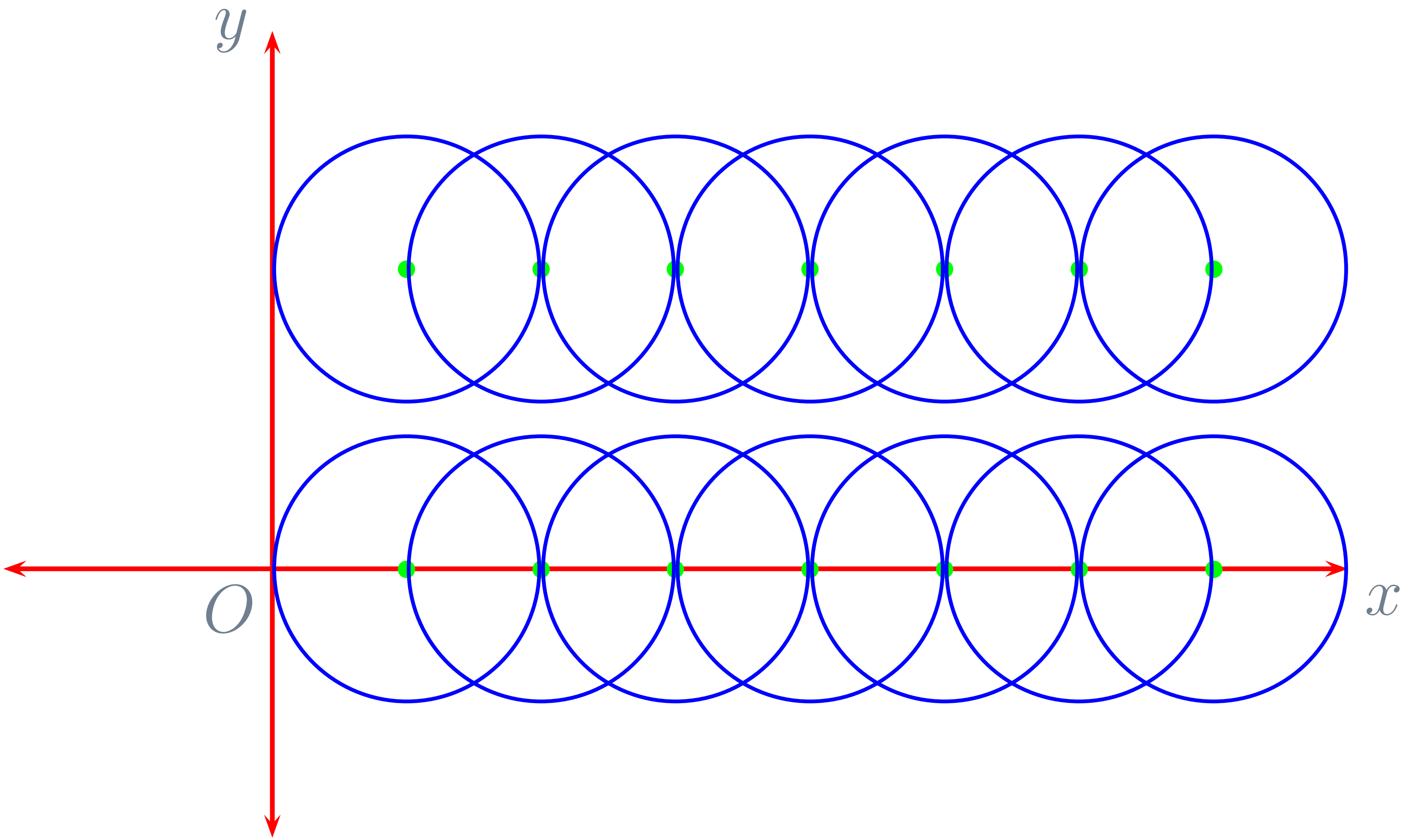
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$



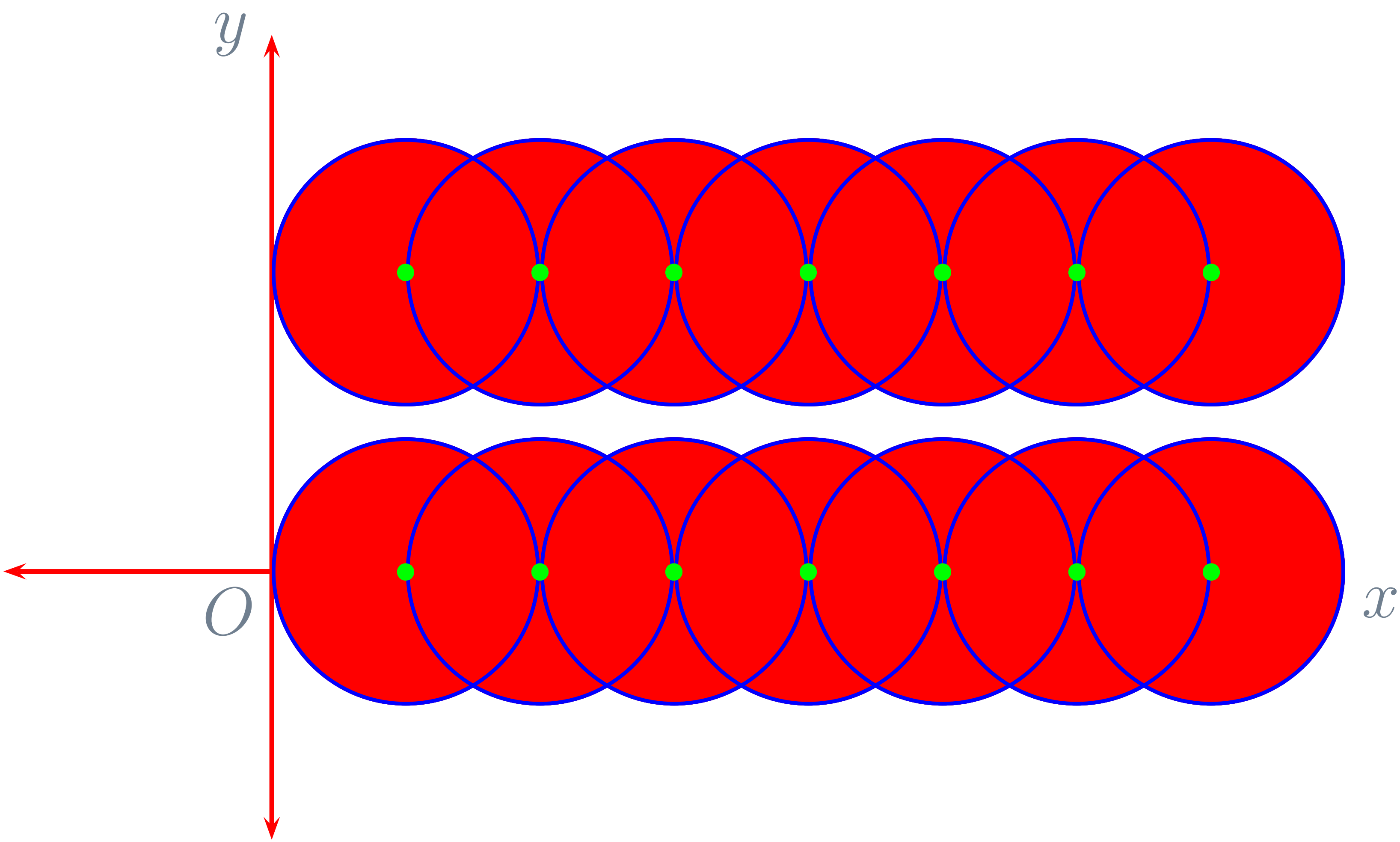
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$



Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$



Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$



Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Risulta evidente dalle immagini presentate come i cerchi di equazione

$$1 > (z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{2} - q_2\sqrt{2})^2$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Ne concludiamo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ **non è** un Dominio Euclideo Forte.

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

È immediato osservare che su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non vale la fattorizzazione unica:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$$

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

È immediato osservare che su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non vale la fattorizzazione unica:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$$

Questo fatto è dato dall'impossibilità di effettuare la divisione con resto. Se è possibile fattorizzare in più modi un numero, è impossibile effettuare l'algoritmo di Euclide tra due fattori delle diverse fattorizzazioni.

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Consideriamo l'esempio: osservo che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide a 2 e $1 + i\sqrt{5}$.

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Consideriamo l'esempio: osservo che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide a 2 e $1 + i\sqrt{5}$.

$$\frac{1 + i\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{5}$$

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Consideriamo l'esempio: osservo che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide a 2 e $1 + i\sqrt{5}$.

$$\frac{1 + i\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{5}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{5}$ non cade in alcun cerchio aperto, di conseguenza non è un quoziente che permetta di effettuare la divisione con resto.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo infine l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo infine l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
Partendo sempre dalle disequazione viste inizialmente, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo infine l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
Partendo sempre dalle disequazione viste inizialmente, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ devono esistere

L’anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo infine l’anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
Partendo sempre dalle disequazione viste inizialmente, ottengo la seguente condizione per poter svolgere la divisione con resto su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ devono esistere

$$\begin{cases} q \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \\ t \in \mathbb{C} \quad t.c. \quad \|t\| < 1 \\ t.c. \quad ab^{-1} = q + t \end{cases}$$

Divisione su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

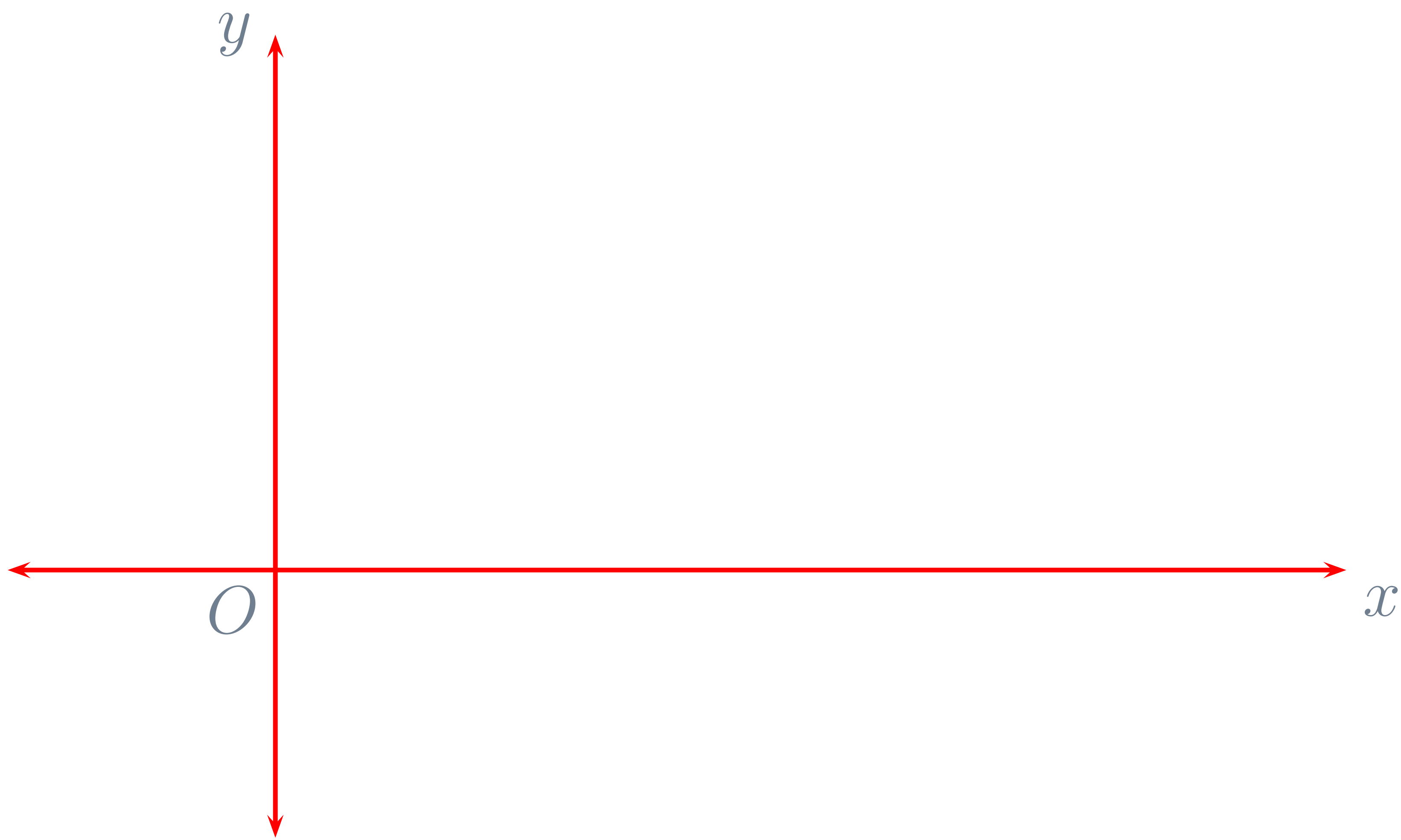
Ripetendo le osservazioni fatte in precedenza per gli altri anelli in esame, concludo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ è un Dominio Euclideo Forte *se e solo se* è interamente coperto dai cerchi dati dalla disequazione

Divisione su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

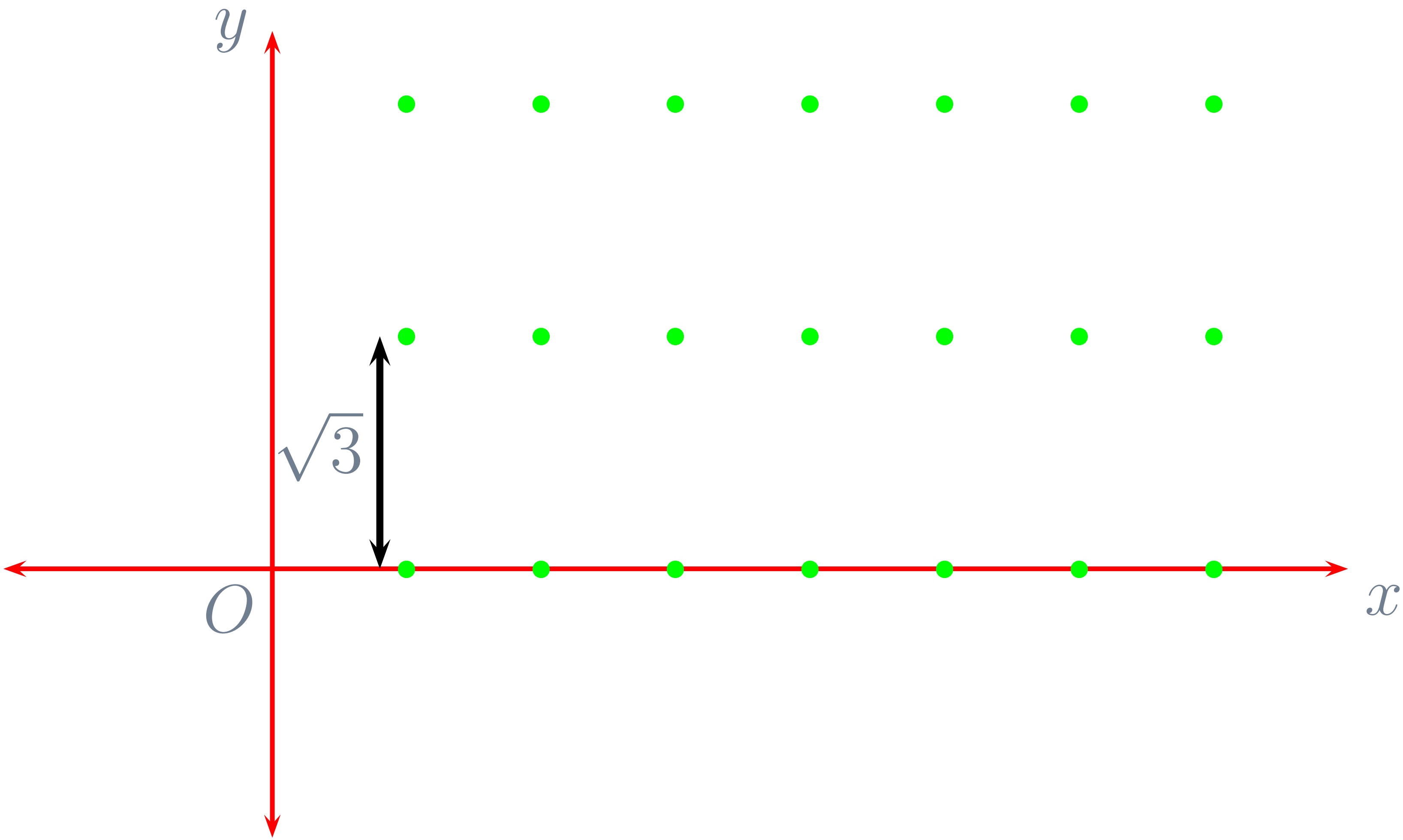
Ripetendo le osservazioni fatte in precedenza per gli altri anelli in esame, concludo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ è un Dominio Euclideo Forte *se e solo se* è interamente coperto dai cerchi dati dalla disequazione

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{3} - q_2\sqrt{3})^2 < 1$$

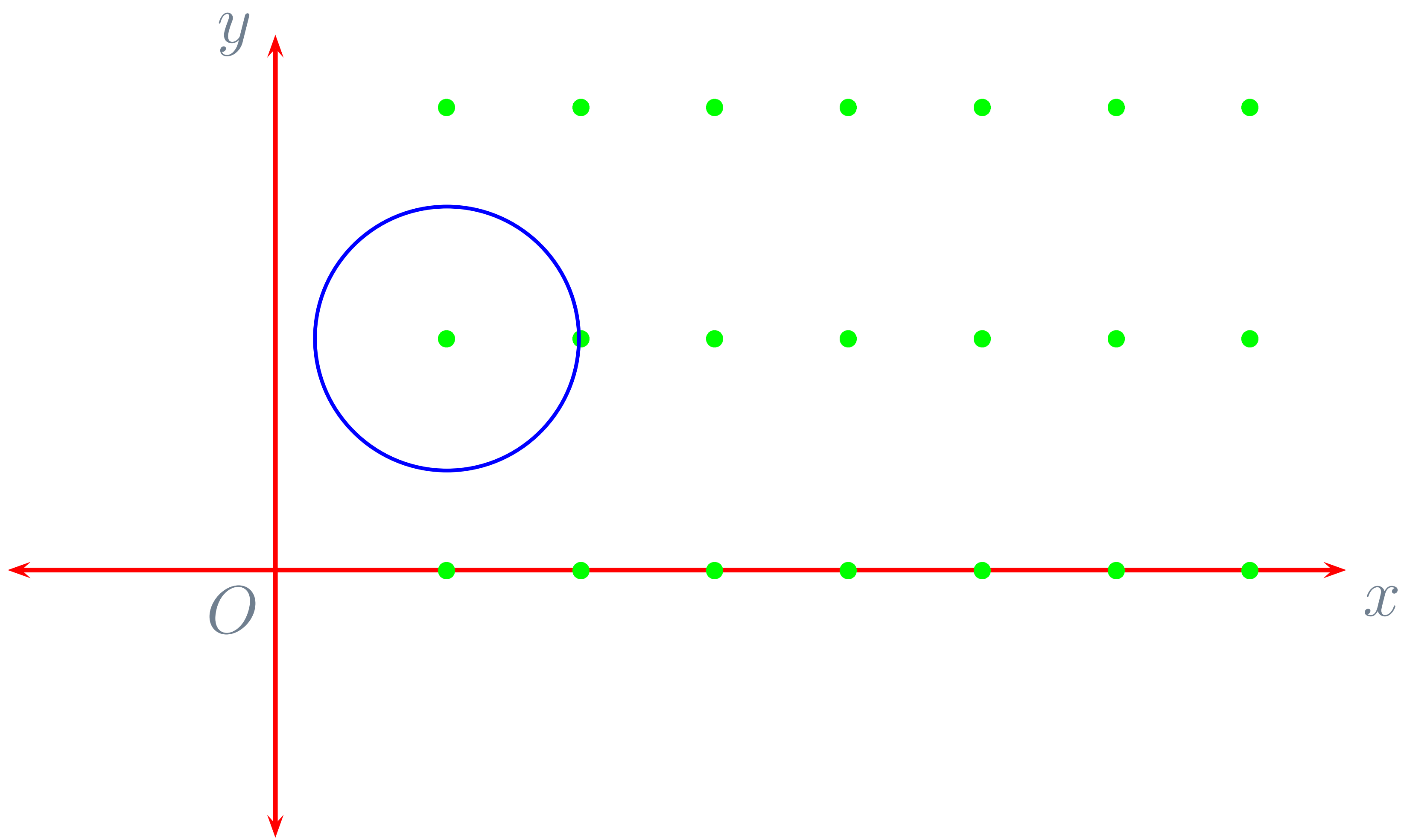
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



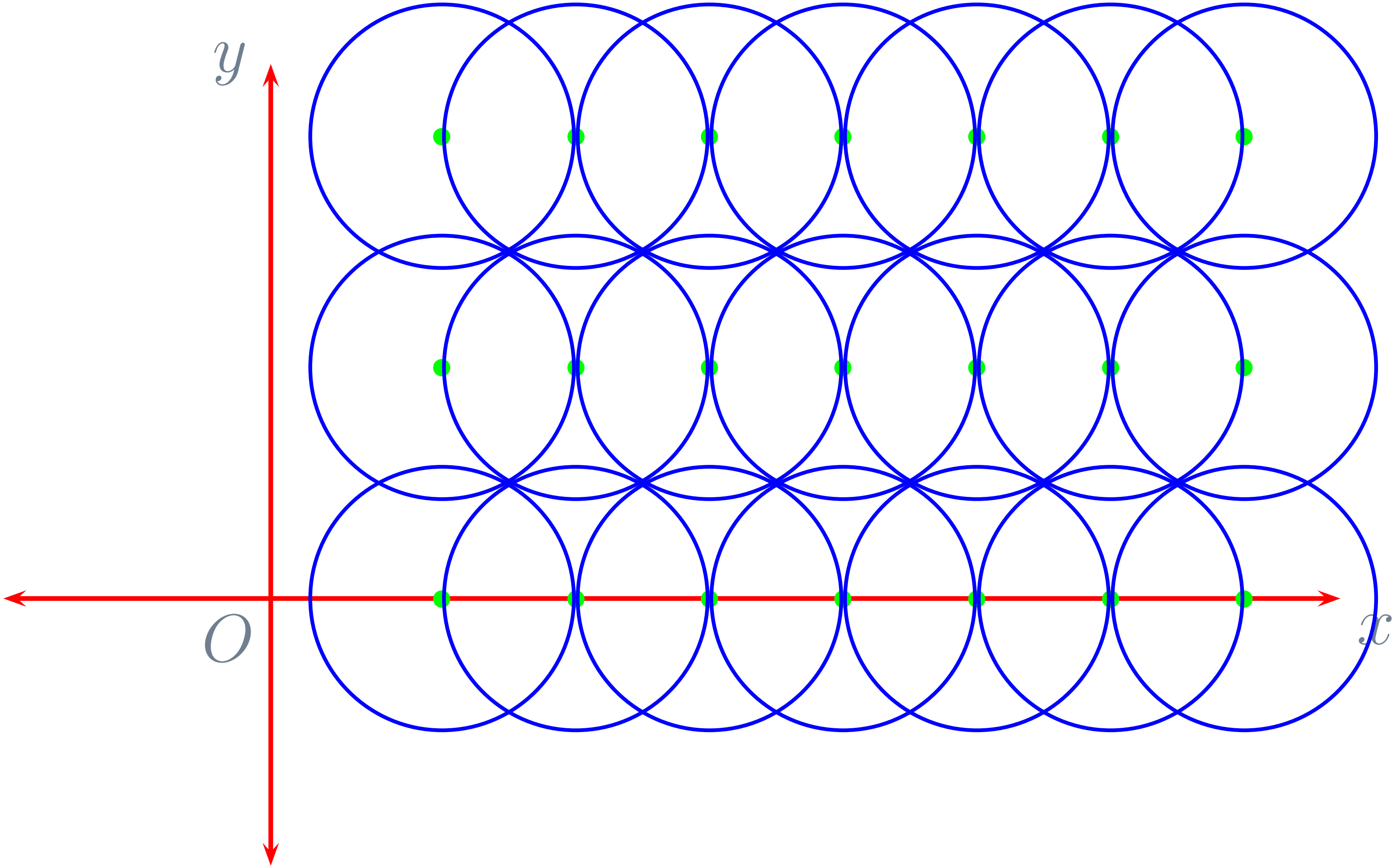
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



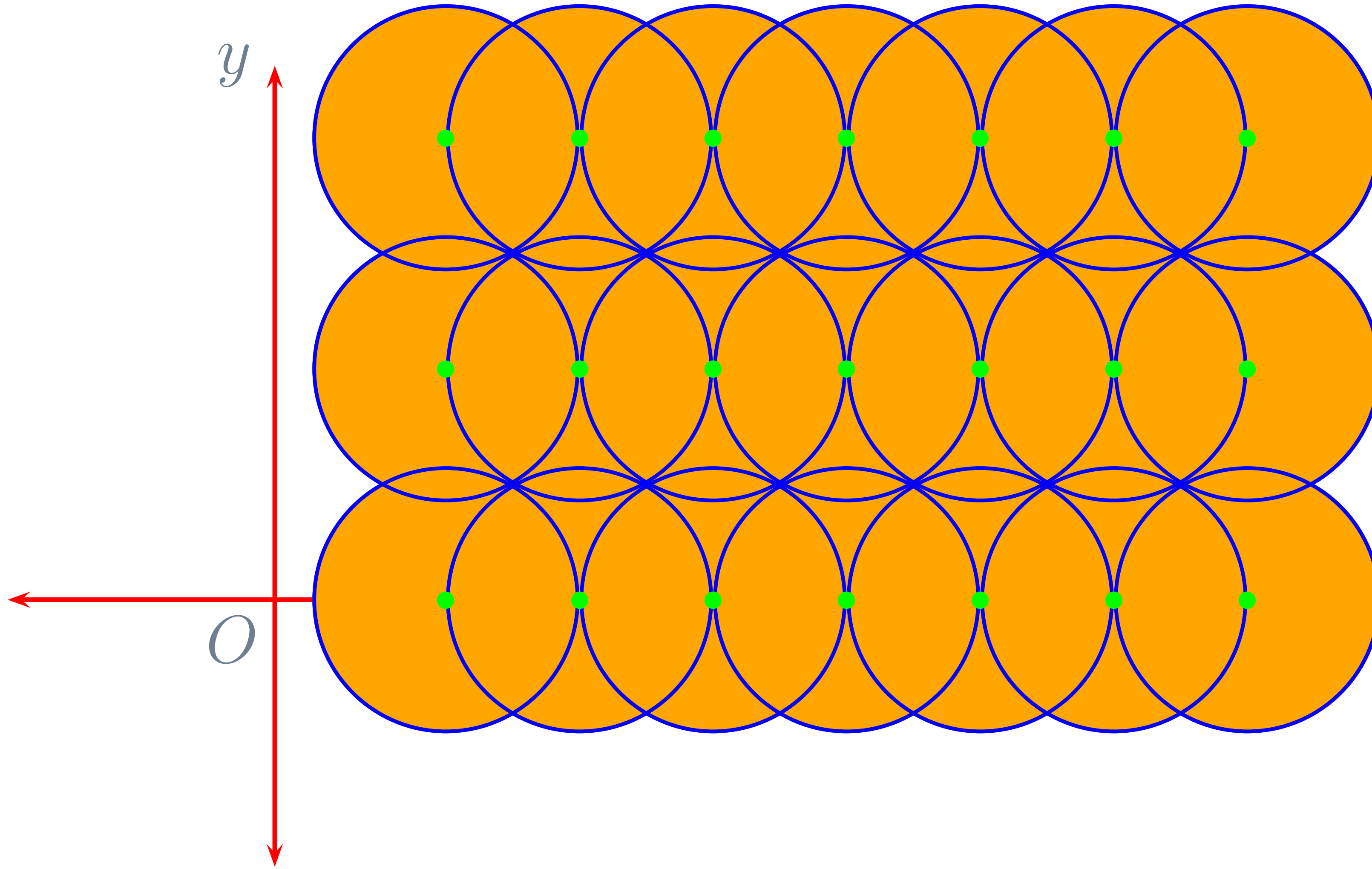
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



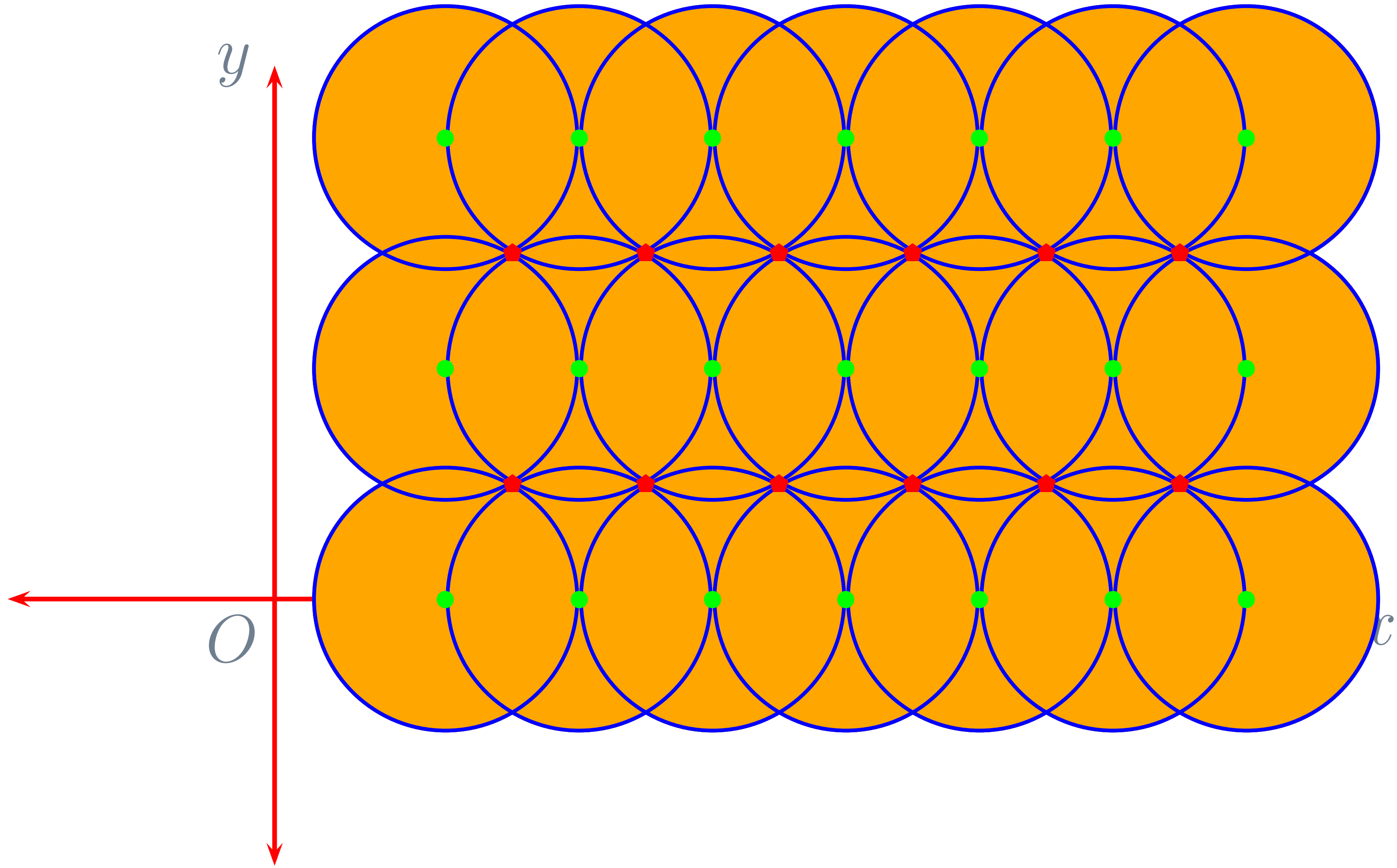
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



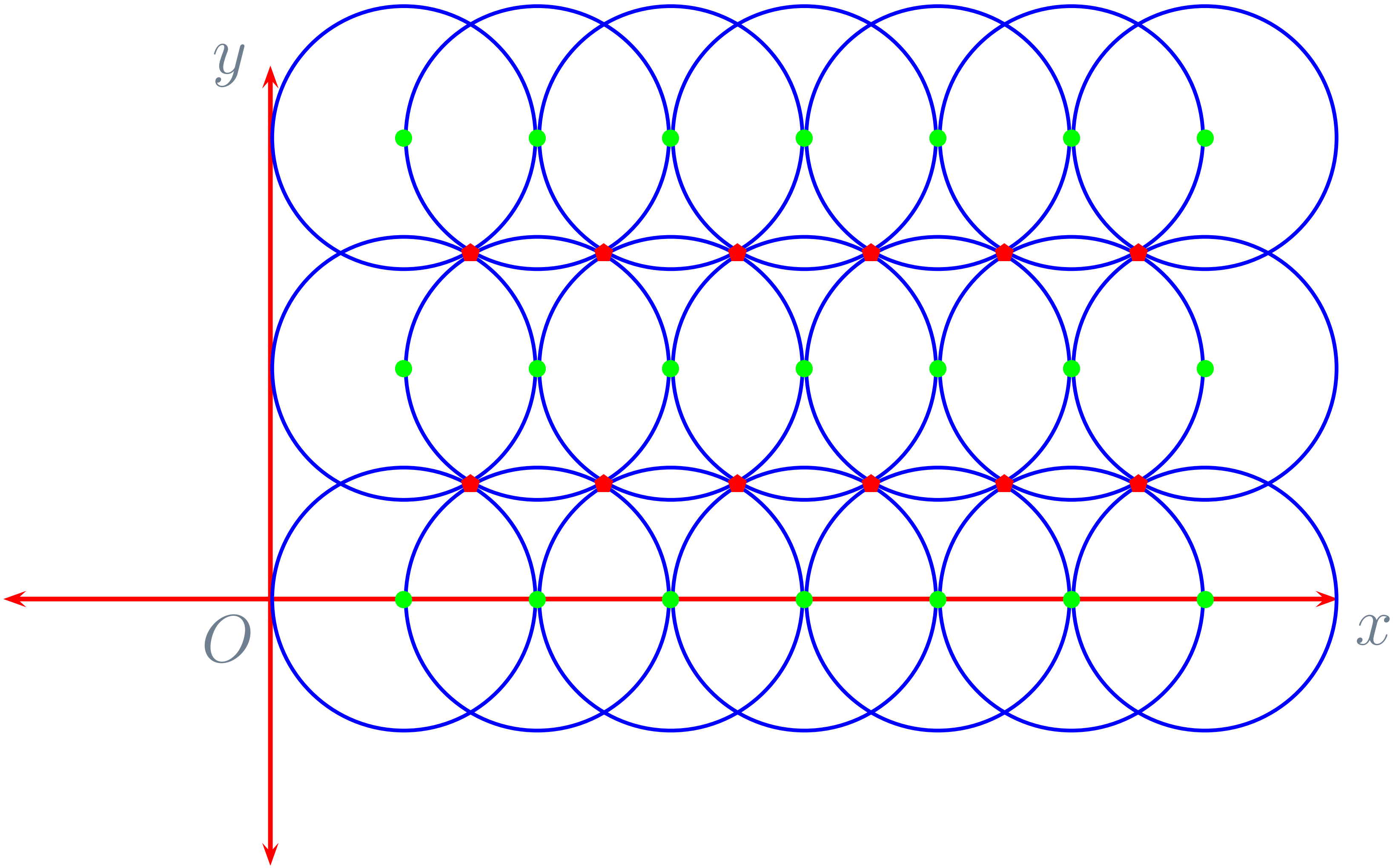
Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



Cerchi aperti su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$



Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

I cerchi aperti d'equazione

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{3} - q_2\sqrt{3})^2 < 1$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{C}$: i punti della forma $n_1 + n_2\sqrt{-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ non sono compresi in alcun cerchio aperto.

Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

I cerchi aperti d'equazione

$$(z_1 - q_1)^2 + (z_2\sqrt{3} - q_2\sqrt{3})^2 < 1$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{C}$: i punti della forma $n_1 + n_2\sqrt{-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ non sono compresi in alcun cerchio aperto.
Ne concludiamo che $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ **non è** un Dominio Euclideo Forte.

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

È immediato osservare che su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non vale la fattorizzazione unica:

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3})$$

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

È immediato osservare che su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non vale la fattorizzazione unica:

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3})$$

Come avevamo notato sull'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, la possibilità di fattorizzare un numero in più modi è strettamente legata all'eventualità di non poter svolgere l'algoritmo di Euclide tra i fattori delle diverse fattorizzazioni.

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo l'esempio: osservo che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide a 2 e $1 + i\sqrt{3}$.

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo l'esempio: osservo che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide a 2 e $1 + i\sqrt{3}$.

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

Ultime osservazioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

Consideriamo l'esempio: osservo che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide a 2 e $1+i\sqrt{3}$.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ non ricade entro alcun cerchio aperto, di conseguenza non è un quoziente che permetta di effettuare la divisione con resto.

Il caso degli anelli reali

Su un anello del tipo $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ è definita la norma

$$\|t\| = \|t_1 + t_2\sqrt{m}\| = |t_1^2 - mt_2^2|$$

Il caso degli anelli reali

Su un anello del tipo $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ è definita la norma

$$\|t\| = \|t_1 + t_2\sqrt{m}\| = |t_1^2 - mt_2^2|$$

La condizione $\|t\| < 1$ mi porta all'equazione

$$|(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2| < 1$$

che individua aree delimitate da iperboli.

Il caso degli anelli reali

Su un anello del tipo $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ è definita la norma

$$\|t\| = \|t_1 + t_2\sqrt{m}\| = |t_1^2 - mt_2^2|$$

La condizione $\|t\| < 1$ mi porta all'equazione

$$|(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2| < 1$$

che individua aree delimitate da iperboli.
Un anello di questo genere è D.E.F se le aree definite da $\|t\| < 1$ e centrate nei punti $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$.

Esempi riguardanti gli anelli reali

Consideriamo ora, a livello di esempio, alcuni anelli reali, del tipo $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

- L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, che non è D.E.F. perché alcuni punti di $\mathbb{R}^2$ non sono coperti.
- L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, che è D.E.F..
- L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, al cui riguardo si nota che le superfici iperboliche non coprono interamente $\mathbb{R}^2$: restano scoperte delle aree di misura finita non nulla.

Osservazioni sulla resa grafica

Le aree denotate dall'equazione

$$|(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2| < 1$$

sono delimitate da iperboli; quindi alcuni punti di $\mathbb{R}^2$ sono coperti da infinite di queste superfici.

Osservazioni sulla resa grafica

Le aree denotate dall'equazione

$$|(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2| < 1$$

sono delimitate da iperboli; quindi alcuni punti di $\mathbb{R}^2$ sono coperti da infinite di queste superfici. Questa caratteristica rende molto difficile rendere graficamente la copertura del piano.

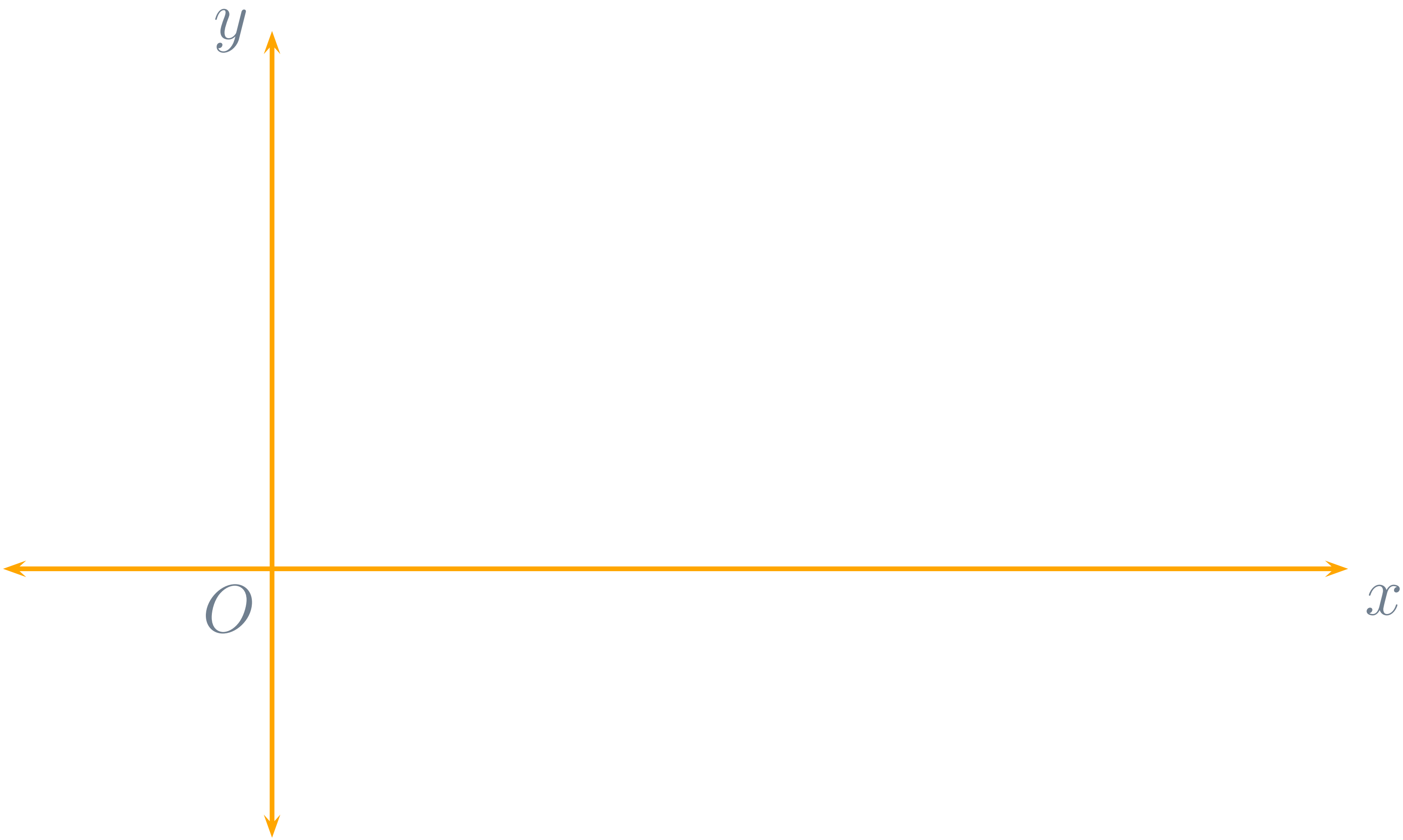
Osservazioni sulla resa grafica

Le aree denotate dall'equazione

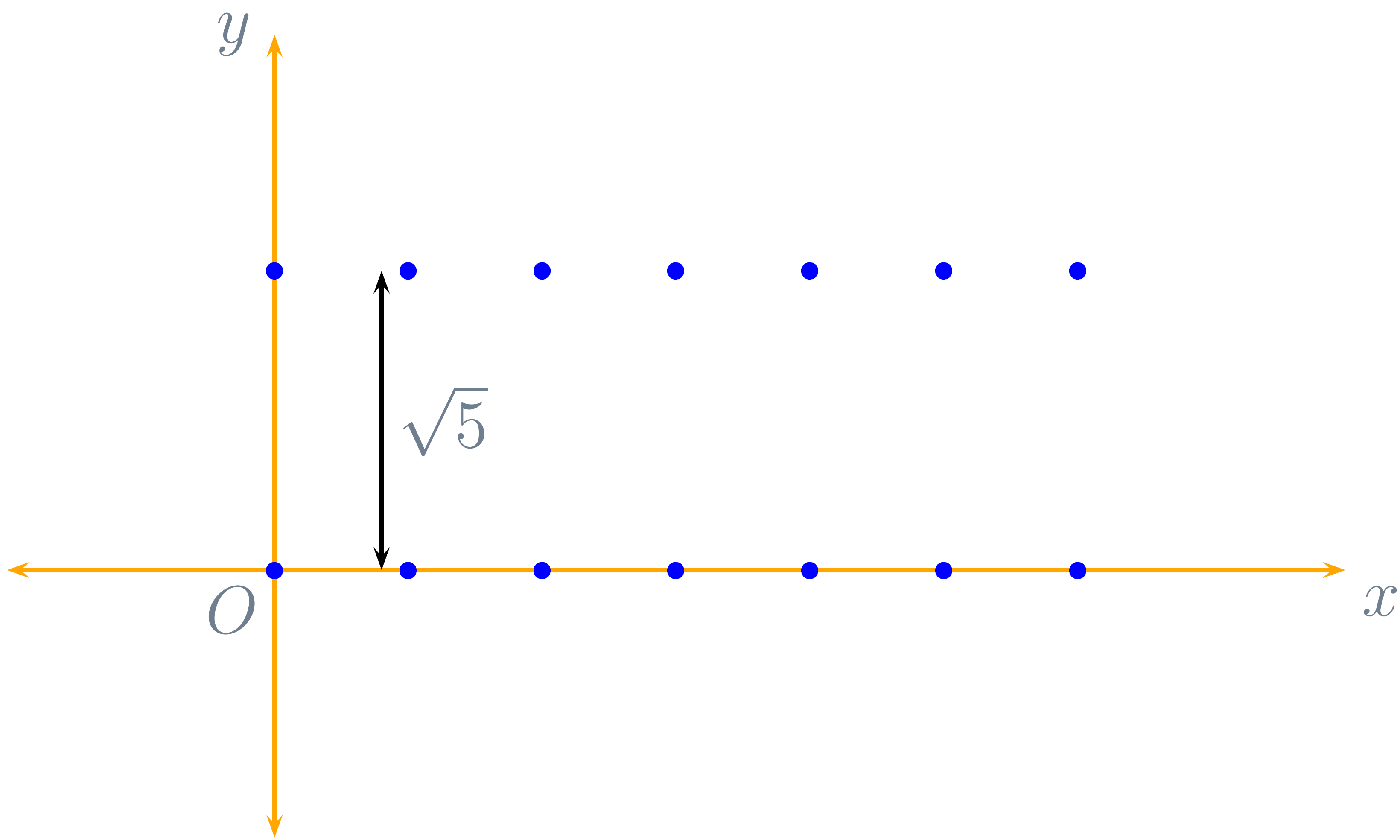
$$|(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{m} - q_2\sqrt{m})^2| < 1$$

sono delimitate da iperboli; quindi alcuni punti di $\mathbb{R}^2$ sono coperti da infinite di queste superfici. Questa caratteristica rende molto difficile rendere graficamente la copertura del piano. Le raffigurazioni che seguono, rappresentando solo un numero finito di aree iperboliche, non hanno quindi carattere dimostrativo, bensì esemplificativo.

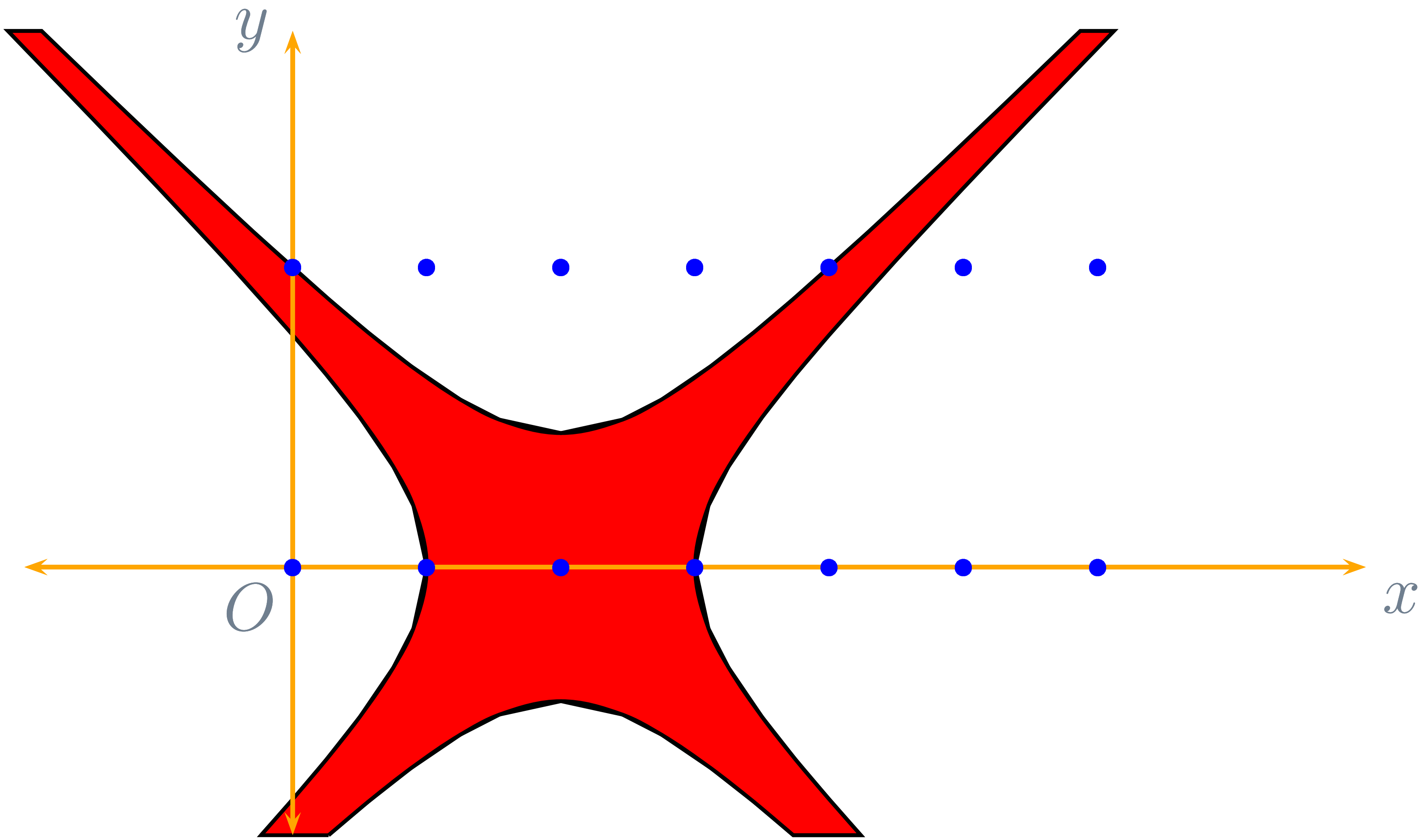
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



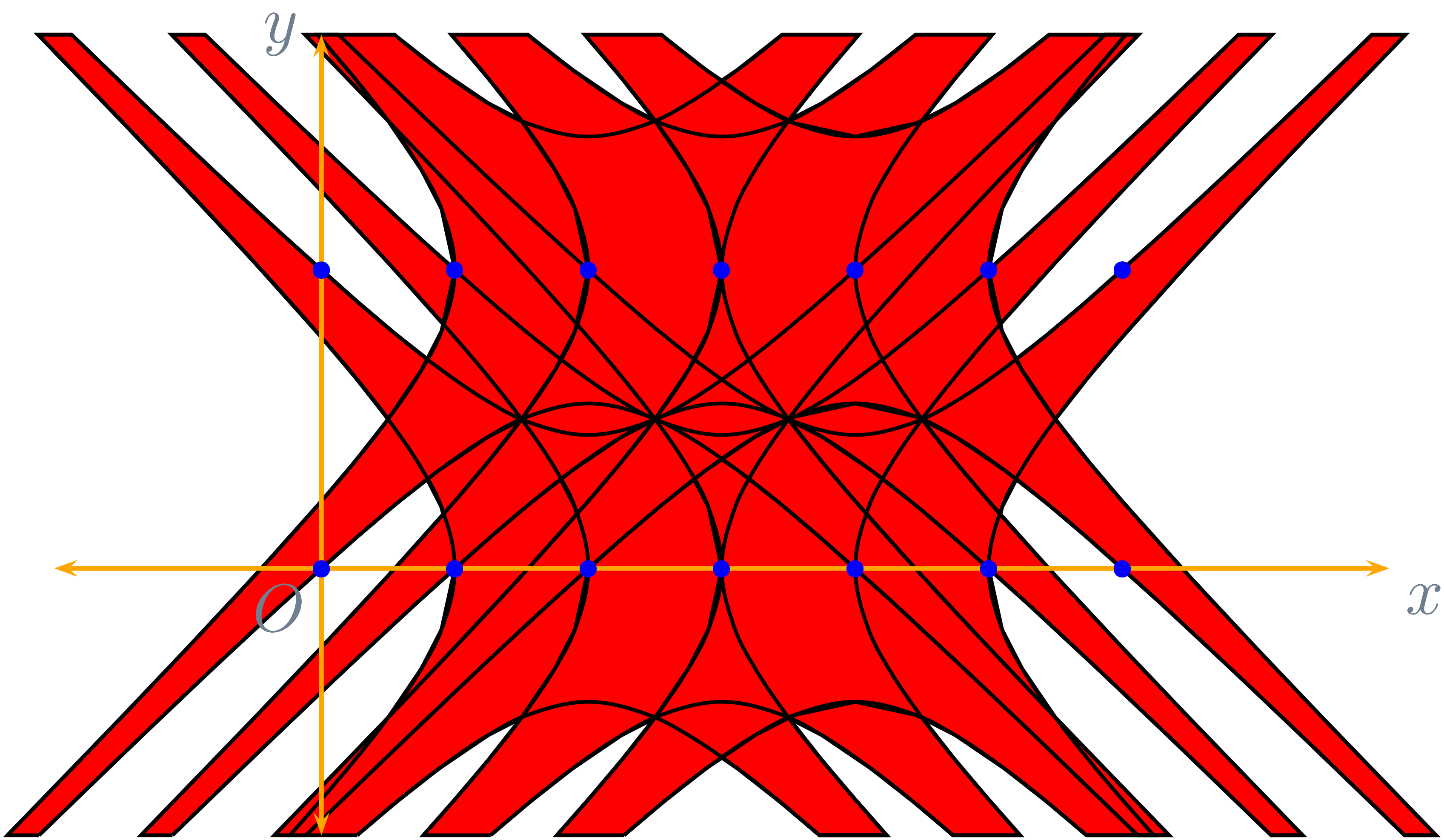
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



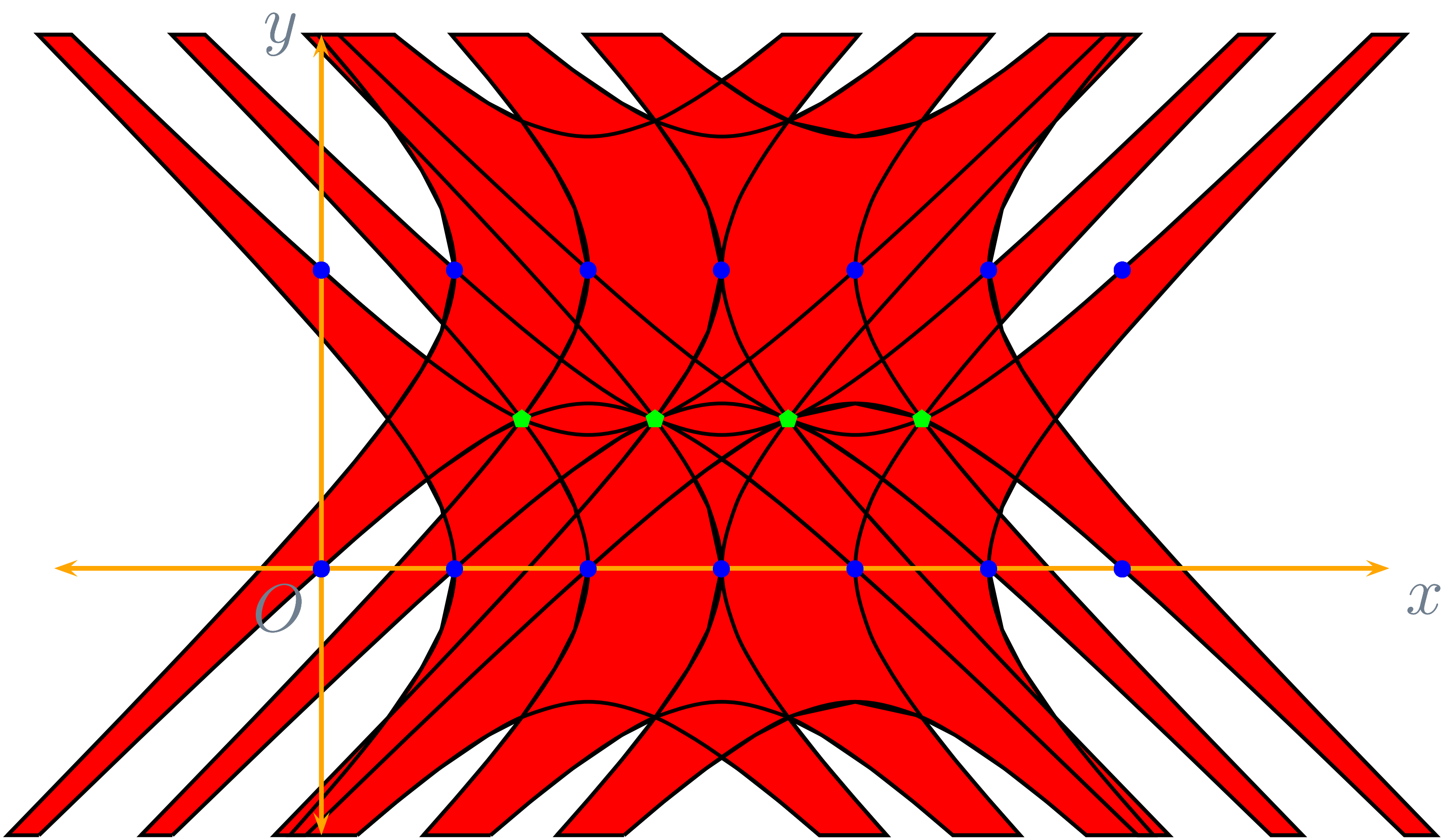
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



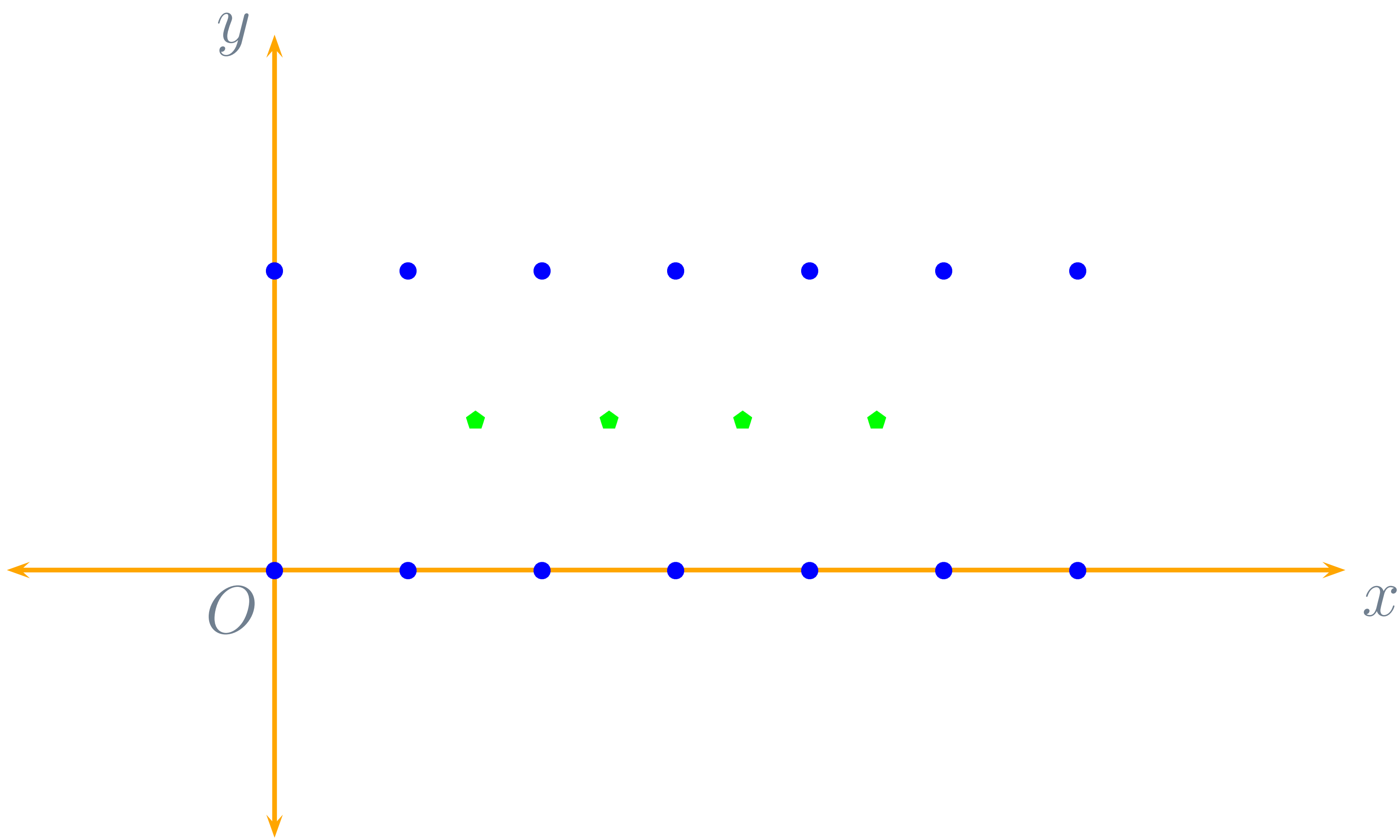
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



L’anello $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{5} - q_2\sqrt{5})^2|$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$:

Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{5} - q_2\sqrt{5})^2|$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$: i punti della forma $n_1 + n_2\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ non sono compresi nella superficie coperta.

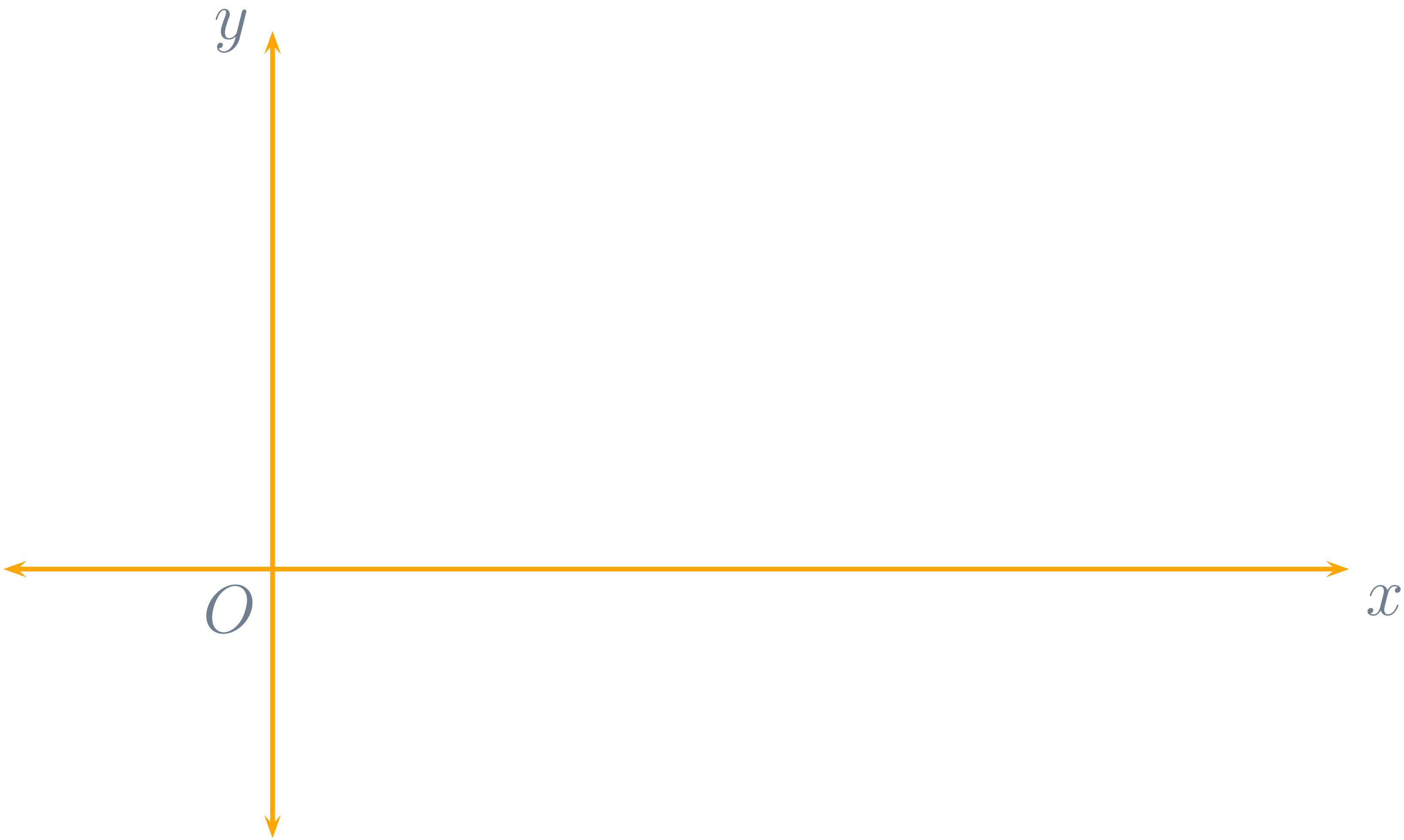
Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

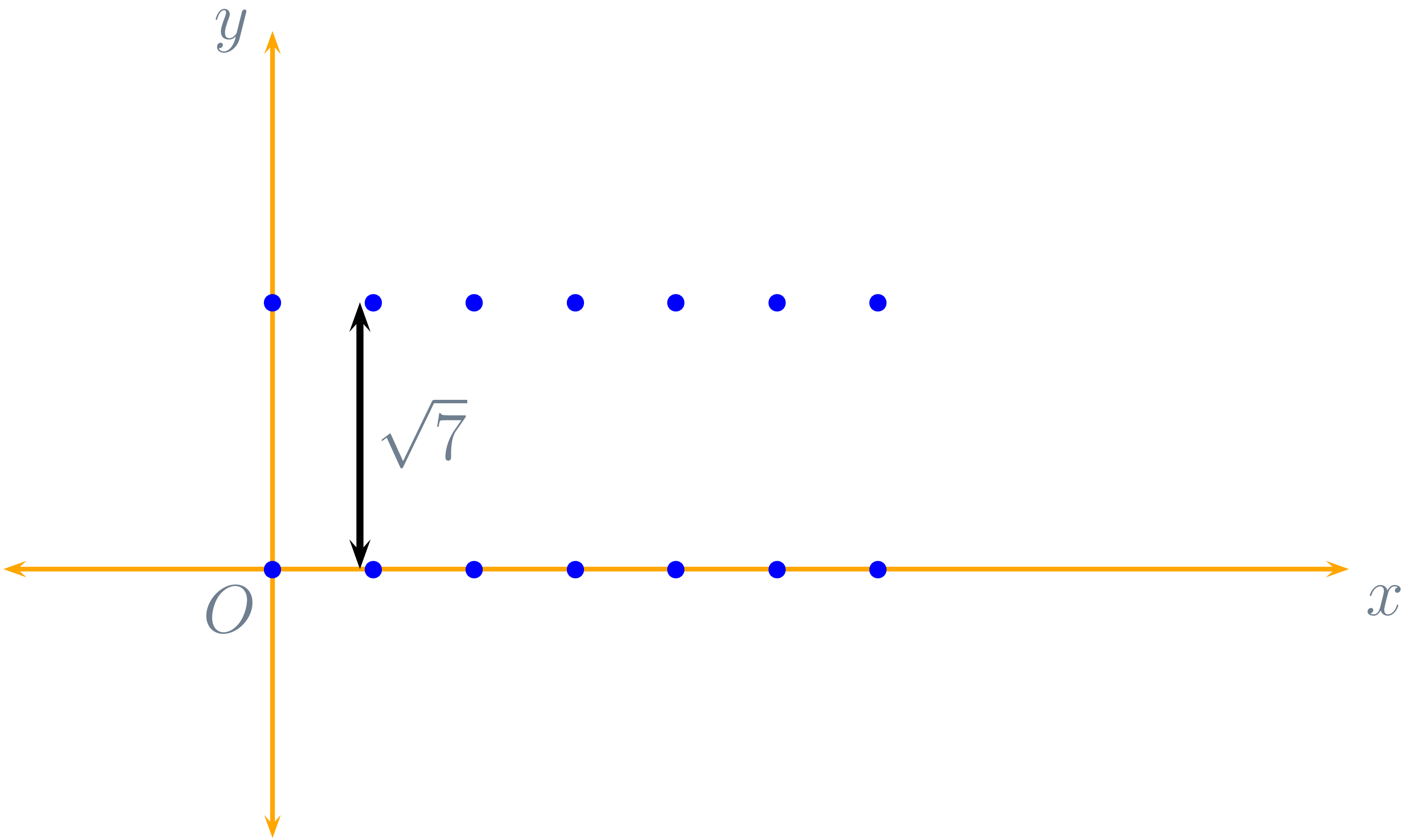
$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{5} - q_2\sqrt{5})^2|$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$: i punti della forma $n_1 + n_2\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ non sono compresi nella superficie coperta.
Ne concludiamo che $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ **non è** un Dominio Euclideo Forte.

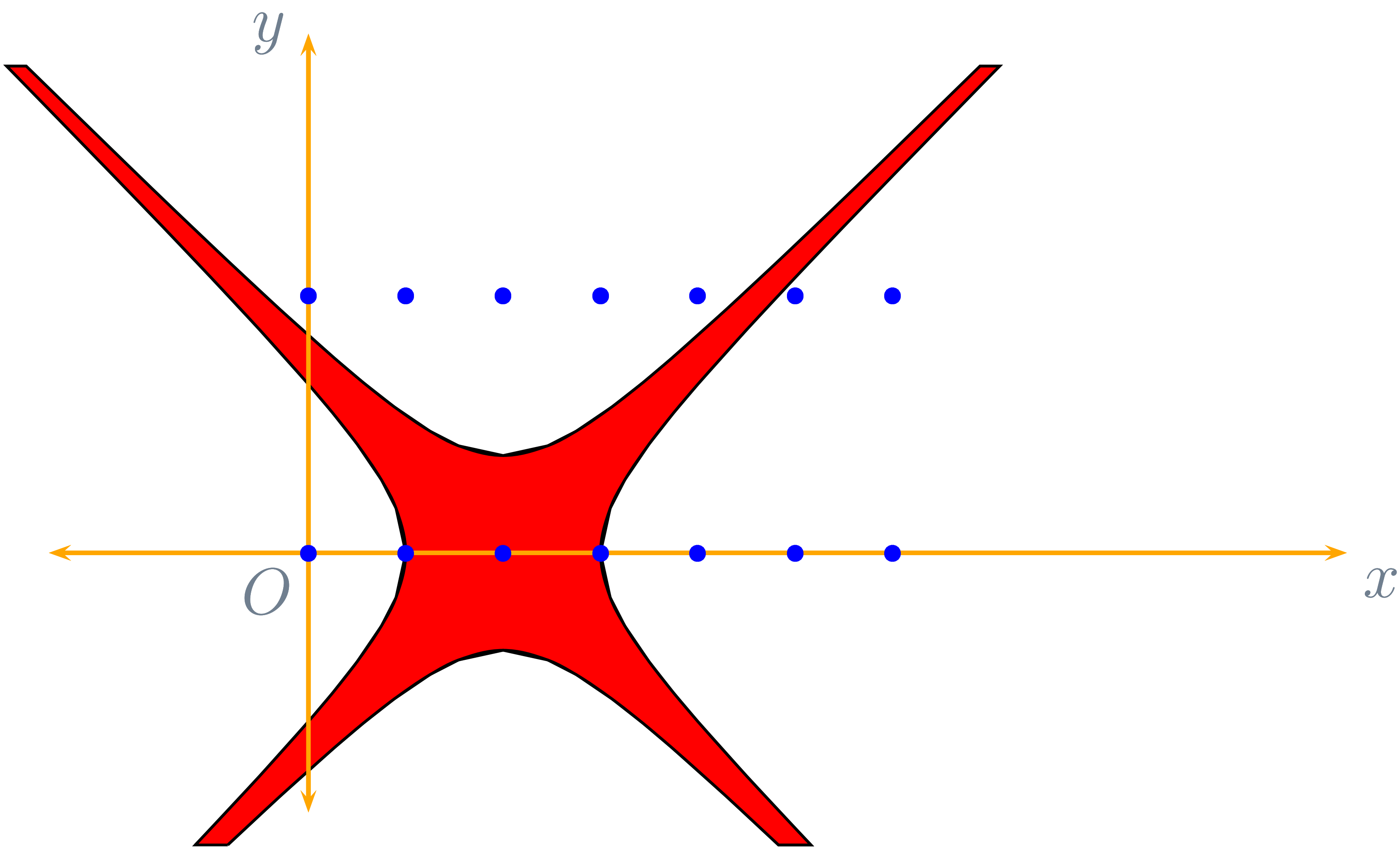
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$



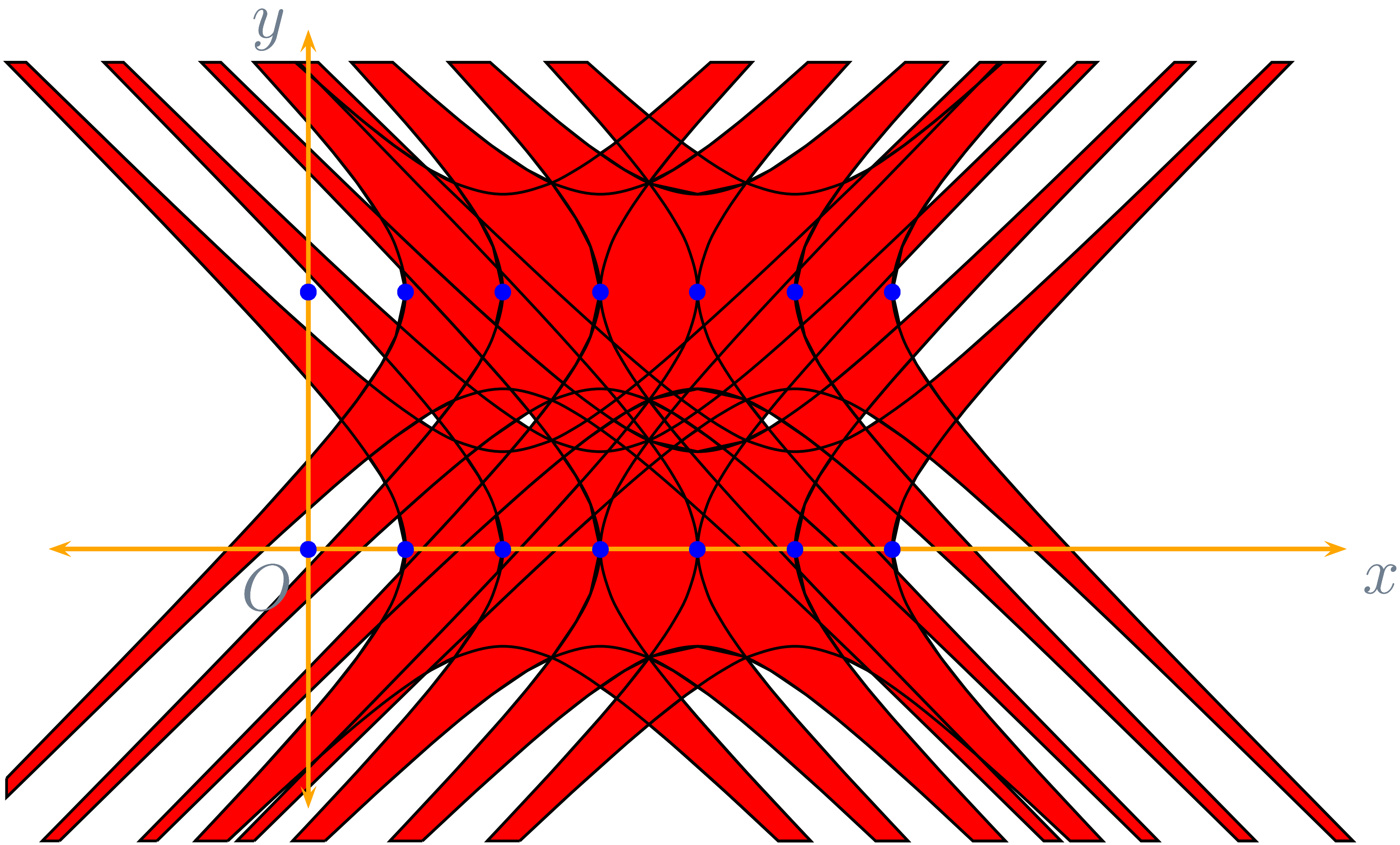
L’anello $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$



L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$



L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$



Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{7} - q_2\sqrt{7})^2|$$

costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$.

Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$

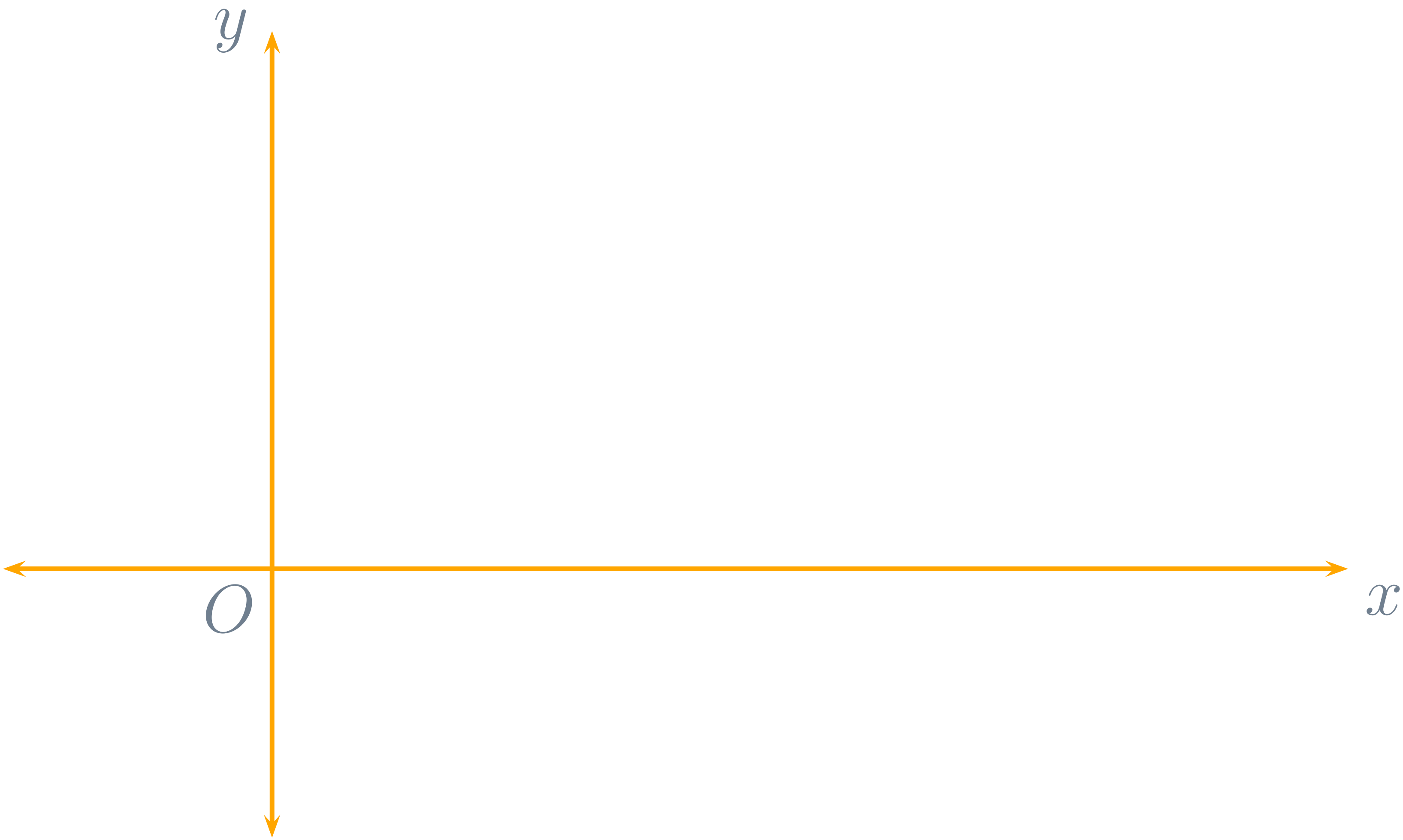
Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{7} - q_2\sqrt{7})^2|$$

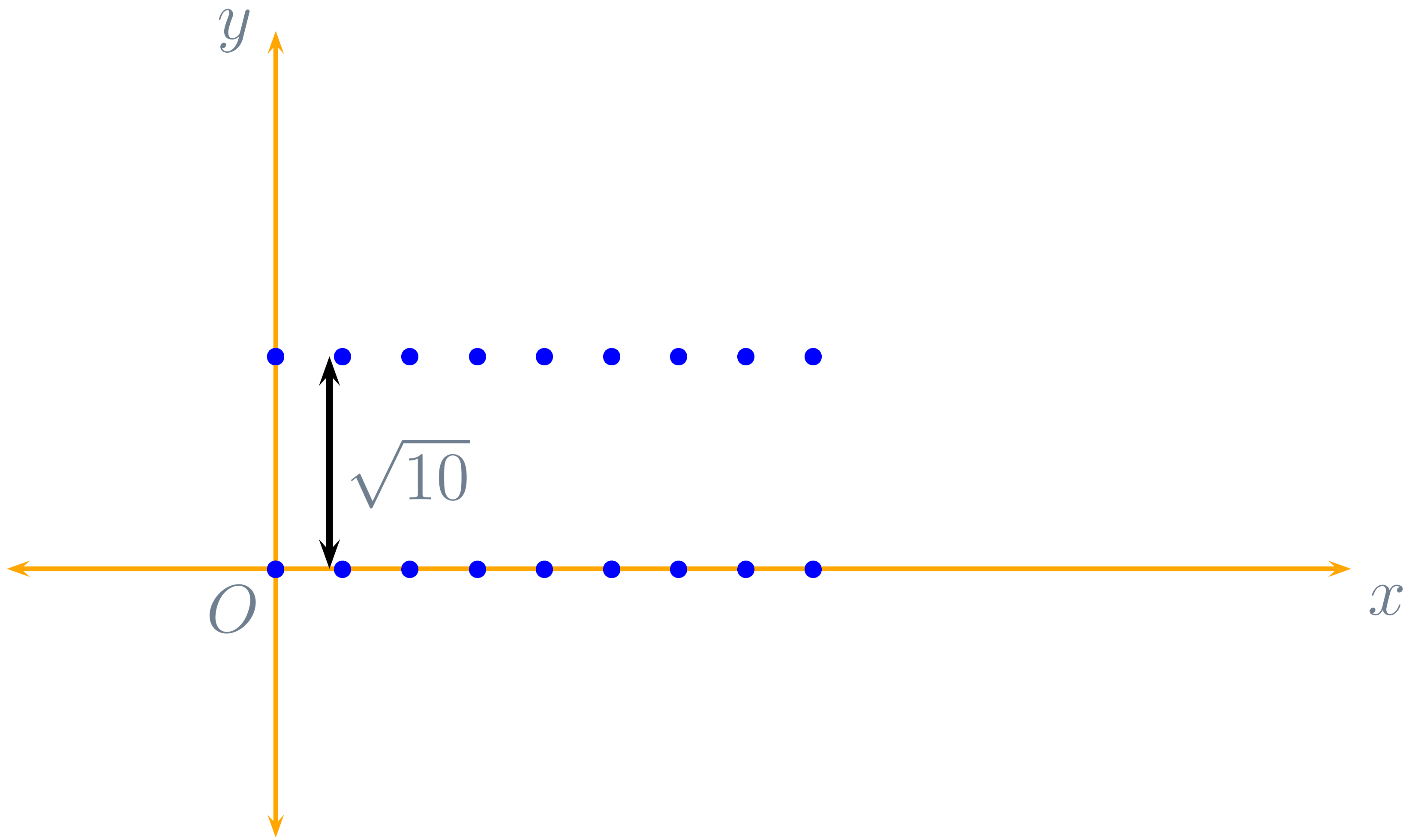
costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$.

Quindi $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ **è** un Dominio Euclideo Forte.

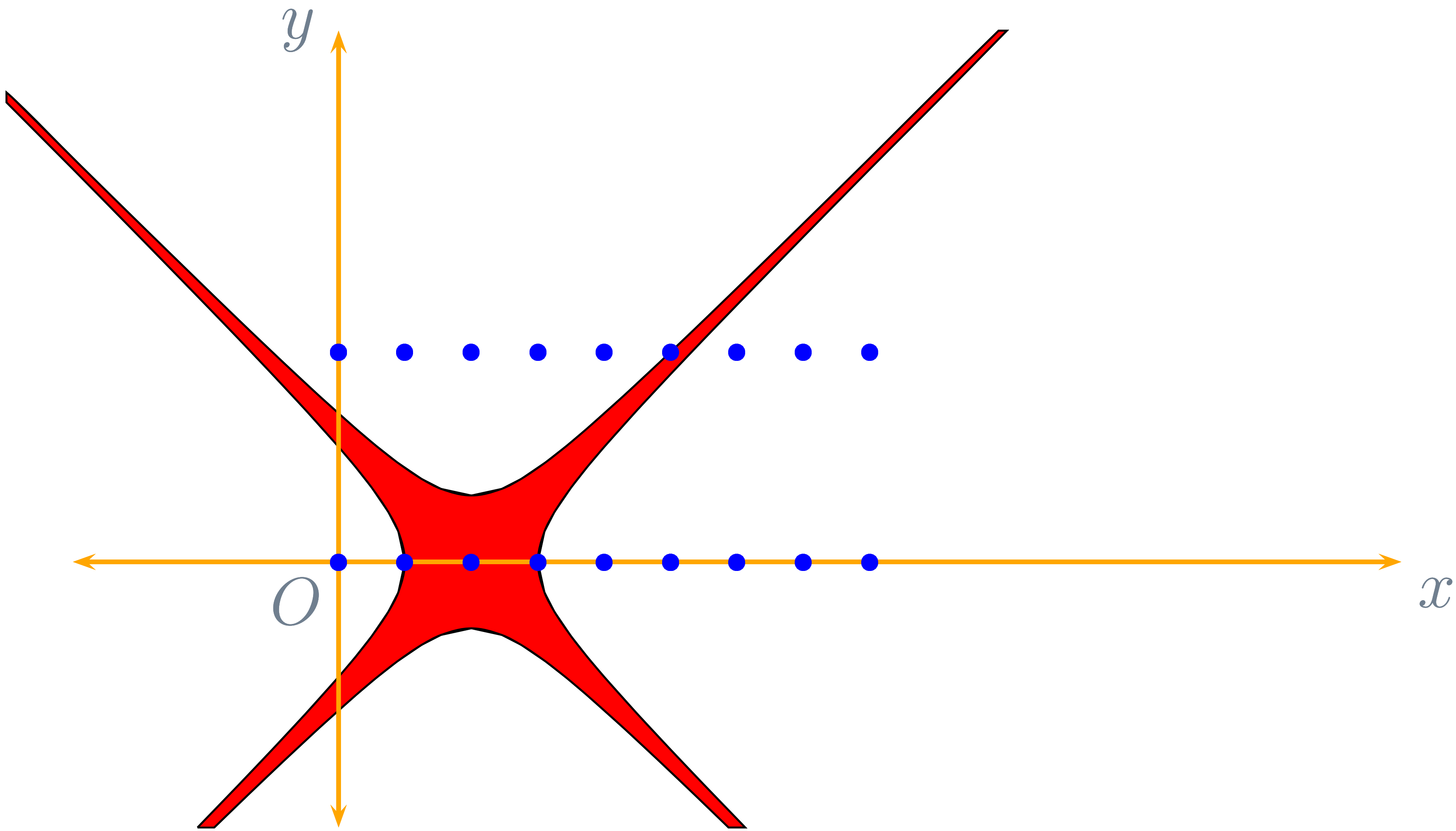
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$



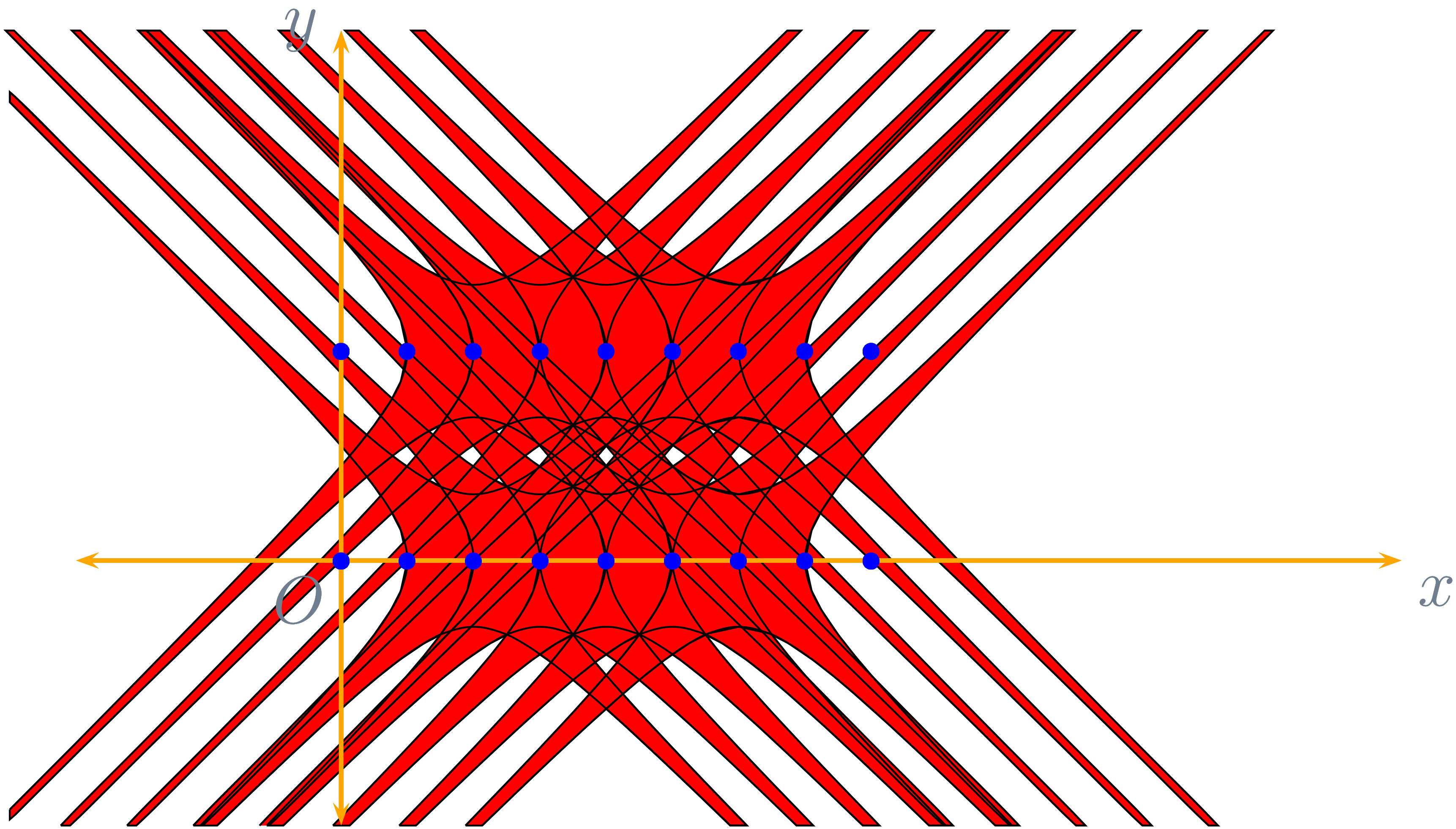
L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$



L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$



L’anello $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$



Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{10} - q_2\sqrt{10})^2|$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$:

Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{10} - q_2\sqrt{10})^2|$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$: la simulazione grafica lascia intuire che dall'unione di queste aree rimangono escluse parti di piano di misura finita non nulla.

Conclusioni su $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$

Le aree iperboliche aperte definite da

$$1 > |(z_1 - q_1)^2 - (z_2\sqrt{10} - q_2\sqrt{10})^2|$$

non costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{R}^2$: la simulazione grafica lascia intuire che dall'unione di queste aree rimangono escluse parti di piano di misura finita non nulla.
Ne concludiamo $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ **non è** un Dominio Euclideo Forte.