CAPITOLO 1

Operazioni tra matrici e n-uple

Esercizio 1.1. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e dati $\lambda = 5$, $\mu = 2$, *si calcoli* AB, BA, $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$.

Esercizio 1.2. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici* A, B *e scalari* λ, $\mu \in \mathbf{R}$, *calcolare* $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Esercizio 1.3. *Date le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ *per* $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 1.4. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 *e* I_4A^T.

Esercizio 1.5. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ *e* AB^T.

Esercizio 1.6. *Calcolare la potenza* A^3 *della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.7. *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

Esercizio 1.8. *Date le seguenti matrici* A*, calcolare, se esiste, l'inversa di* A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.9. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Esercizio 1.10. *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Esercizio 1.11. *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Esercizio 1.12. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.13. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Esercizio 1.14. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Esercizio 1.15. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Esercizio 1.16. *Si considerino le seguenti n-uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4:*

$$u_1 = (1, 0) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_3 = \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) \qquad u_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_5 = (-1, 1, 2, -2) \qquad u_6 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right)$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \qquad u_i \cdot u_j^T, \qquad \lambda \cdot u_i, \qquad \text{con } \lambda = 0, 2, -2, \qquad i, j = 1, \dots 6$$

Esercizio 1.17. *Dimostrare che un numero complesso coincidente con il proprio coniugato è necessariamente reale.*

Esercizio 1.18. *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.19. *Siano A e B matrici 3×3 tali che*

$$AB = BA \qquad \forall B \in M_{3\times 3}$$

Si dimostri che deve necessariamente essere:

$$A = \lambda I_3 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

Esercizio 1.20. *Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi*

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.21. *Si dica per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ammette soluzione. In caso positivo si determinino esplicitamente tali soluzioni.

---

1. Soluzioni

Esercizio 1.1. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e dati $\lambda = 5$, $\mu = 2$, calcolare AB, BA, $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$.

Soluzione:

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) & 3\cdot 0 + (-1)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 10 & -4 \end{bmatrix} \\
BA &= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 3 & 3\cdot 2 + 0\cdot(-1) \\ -1\cdot 1 + 4\cdot 3 & -1\cdot 2 + 4\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} \\
A+B &= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 3+(-1) & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
B-A &= \begin{bmatrix} 3-1 & 0-2 \\ -1-3 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \\
5A+2B &= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Esercizio 1.2. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A, B e scalari λ, $\mu \in \mathbf{R}$, calcolare $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Soluzione:

Comiciamo dalla prima coppia di matrici:

$$A+B=\begin{bmatrix}4&3\\1&6\end{bmatrix} \qquad B-A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B=\frac{1}{2}\cdot A+0\cdot B=\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}2&6\\4&12\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&7\\7&7\end{bmatrix} \qquad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&3\\6&6\end{bmatrix}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$A+B=\begin{bmatrix}4&0&3\\2&3&4\\1&0&-1\end{bmatrix} \qquad B-A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-4&5&6\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B=2A-B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\7&-6&-7\\5&0&-2\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}2&0&2\\11&-4&1\\7&0&4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&0&1\\21&-4&-10\\-1&0&-1\end{bmatrix} \qquad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&0&0\\-2&1&5\\0&0&3\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.3. *Date le seguenti matrici:*

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&2&5&-3\\3&-1&0&2\\4&0&0&-2\end{bmatrix}; \qquad A_2=\begin{bmatrix}0&-2&5\\4&-3&2\end{bmatrix}; \qquad A_3=\begin{bmatrix}5&0\\-1&2\\4&5\\5&-1\end{bmatrix};$$

$$A_4=\begin{bmatrix}3&5\\-1&10\\-2&0\end{bmatrix}; \qquad A_5=\begin{bmatrix}-2&4&1\\-4&4&4\\0&0&0\end{bmatrix}; \qquad A_6=\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-8&5&3\end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i\cdot A_j$ *per* $i,j=1,2,3,4,5,6$.

Soluzione:

Ricordiamo che una matrice è detta $n\times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n\times m$
- B è del tipo $m\times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B). Il risultato è una matrice C del tipo $n\times k$.

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$A_1\cdot A_3=\begin{bmatrix}-2&32\\26&-4\\10&2\end{bmatrix}$$

$$A_2\cdot A_1=\begin{bmatrix}14&2&0&-14\\-5&11&20&-22\end{bmatrix} \qquad A_2\cdot A_4=\begin{bmatrix}-8&-20\\11&-10\end{bmatrix} \qquad A_2\cdot A_5=\begin{bmatrix}8&-8&8\\4&4&-8\end{bmatrix}$$

$$A_3\cdot A_2=\begin{bmatrix}0&-10&25\\8&-4&-1\\20&-23&30\\-4&-7&23\end{bmatrix} \qquad A_3\cdot A_6=\begin{bmatrix}-15&5&-5\\-13&9&7\\-52&29&11\\-7&0&-8\end{bmatrix}$$

$$A_4\cdot A_2=\begin{bmatrix}20&-21&25\\40&-28&15\\0&4&-10\end{bmatrix} \qquad A_4\cdot A_6=\begin{bmatrix}-49&28&12\\-77&49&31\\6&-2&2\end{bmatrix}$$

$$A_5\cdot A_1=\begin{bmatrix}18&-8&-10&12\\32&-12&-20&12\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad A_5\cdot A_4=\begin{bmatrix}-12&30\\-24&20\\0&0\end{bmatrix} \qquad A_5\cdot A_5=\begin{bmatrix}-12&8&14\\-8&0&12\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_6\cdot A_1=\begin{bmatrix}2&-7&-15&13\\35&-21&-40&28\end{bmatrix} \qquad A_6\cdot A_4=\begin{bmatrix}-8&-5\\-35&10\end{bmatrix} \qquad A_6\cdot A_5=\begin{bmatrix}2&-8&1\\-4&-12&12\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.4. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 *e* I_4A^T*.*

Soluzione:
Notiamo che la matrice quadrata I_4 è detta *matrice identica* di ordine 4. In generale le matrici identiche (dei differenti ordini) vengono indicate I.

$$AI_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$
$$I_4A^T = I_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = A^T$$

□

Esercizio 1.5. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ *e* AB^T*.*

Soluzione:

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} -6 & \frac{3}{2} & 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 & \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{15}{2} & \frac{23}{3} & 1 \end{bmatrix}$$
$$AB^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è detta matrice scalare.

□

Esercizio 1.6. *Calcolare la potenza* A^3 *della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Si tratta di eseguire due prodotti:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 5 \\ 5 & 26 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.7. *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

Soluzione:
Sia B la matrice cercata. Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 e calcoliamo il prodotto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ -3(1-z)+2z=0 \\ -3(-w)+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \\ z=\frac{3}{5} \\ w=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Di conseguenza perché B verifichi la condizione $AB = I$deve essere

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata.

Metodi più efficaci per calcolare l'inversa di una matrice verranno introdotti successsivamente.

$\square$

Esercizio 1.8. *Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice A non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - w = 0 \\ -3x + 2z = 0 \\ -3y + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = w \\ -3(1+z) + 2z = 0 \\ -3w + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = w \\ z = -3 \\ w = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -3 \\ w = -1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata. Una tale matrice B inversa di A viene normalmente indicata con A^{-1}.

□

Esercizio 1.9. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Soluzione:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$
$$BC = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad CB = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $AB \neq BA$, mentre $BC = CB$. Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto $C = 3I$.

□

Esercizio 1.10. *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Soluzione:

Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ 0 & c + z \end{bmatrix} \in I$$
$$AB = \begin{bmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I è che l'elemento di posizione $2, 1$ si annulli.

□

Esercizio 1.11. *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Soluzione:

Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti A e B sono non nulle e $AB = 0$.

□

Esercizio 1.12. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

SOLUZIONE:

Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza B deve essere del tipo

$$B = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

$\square$

Esercizio 1.13. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

SOLUZIONE:

E' sufficiente osservare che se

$$A + B = C \;\Rightarrow\; -A + A + B = -A + C \;\Rightarrow\; B = C - A$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+2 & 0-3 \\ -1-0 & 5-5 & 2+6 \\ 2-2 & 1+1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 1.14. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Soluzione:
Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite. Procedendo per sostituzione otteniamo

$$\begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ 3y+z=-1 \\ -6y+6z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ z=-3y-1 \\ -3y+3z=-1 \end{cases}$$

Anche senza procedere ulteriormente vediamo che la seconda e quarta equazione sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

□

Esercizio 1.15. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:
Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi
- Se $k = 3$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = 1$ e $A + B = C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

□

Esercizio 1.16. *Si considerino le seguenti n-uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4:*

$$u_1 = (1, 0) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_3 = \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) \qquad u_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_5 = (-1, 1, 2, -2) \qquad u_6 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right)$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \qquad u_i \cdot u_j^T, \qquad \lambda \cdot u_i, \qquad \textit{con } \lambda = 0, 2, -2, \qquad i, j = 1, \dots 6$$

Soluzione:

- Cominciamo a calcolare le somme. Notiamo innazittutto che si possono sommare solo n-uple dello stesso tipo:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}, 0 + (-2)\right) = \left(\frac{3}{2}, -2\right) = u_2 + u_1 \\ u_3 + u_4 &= \left(-3, -\frac{1}{4} - 7\right) = u_4 + u_3 \\ u_5 + u_6 &= \left(-1, 1, \frac{5}{3}, -5\right) = u_6 + u_5 \end{aligned}$$

Notiamo che la somma di due n-uple è ancora una n-upla, e che la somma gode della proprietà commutativa.

- Calcoliamo ora i prodotti. Notiamo che si può solo moltiplicare una n-upla per la trasposta di una n-upla dello stesso tipo:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2^T &= (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} = u_2 \cdot u_1^T \\ u_3 \cdot u_4^T &= \left(-3, \frac{1}{4} - 5\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{79}{8} = u_4 \cdot u_3^T \\ u_5 \cdot u_6^T &= (-1, 1, 2, -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{16}{3} = u_6 \cdot u_5^T \end{aligned}$$

Notiamo che il prodotto tra una n-upla e la trasposta di una n-upla da come risultato un numero (uno scalare).

- Calcoliamo infine i prodotti per scalare.

$$\begin{aligned} &0u_1 = 0u_2 = (0, 0), \qquad 0u_3 = 0u_4 = (0, 0, 0), \qquad 0u_5 = 0u_6 = (0, 0, 0, 0), \\ &2u_1 = (2, 0), \qquad 2u_2 = (1, -4), \qquad 2u_3 = \left(-6, \frac{1}{2}, -10\right), \\ &2u_4 = (0, -1, -4), \qquad 2u_5 = (-2, 2, 4, -4), \qquad 2u_6 = \left(0, 0, -\frac{2}{3}, -6\right) \\ &-2u_1 = (-2, 0), \qquad -2u_2 = (-1, 4), \qquad -2u_3 = \left(6, -\frac{1}{2}, 10\right), \\ &-2u_4 = (0, 1, 4), \qquad -2u_5 = (2, -2, -4, 4), \qquad -2u_6 = \left(0, 0, \frac{2}{3}, 6\right) \end{aligned}$$

Notiamo che il prodotto tra uno scalare e una n-upla si può sempre calcolare e da come risultato una n-upla.

□

Esercizio 1.17. *Dimostrare (utilizzando le matrici) che un numero complesso coincidente con il proprio coniugato è necessariamente reale.*

Soluzione:
Sia $Z = aI_2 + bJ$ un generico complesso, dove

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

Sappiamo che il suo coniugato è $\bar{Z} = aI_2 - bJ$. Notiamo che

$$Z = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad \bar{Z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

Di conseguenza dall'uguaglianza $Z = \bar{Z}$ segue

$$\begin{cases} a = a \\ -b = b \\ b = -b \\ a = a \end{cases} \quad \Rightarrow \; 2b = 0 \; \Rightarrow \; b = 0$$

Quindi $Z = aI_2$ ed è un numero reale.

□

Esercizio 1.18. *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice b **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che A e b (oppure $A|b$) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da A al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

□

Esercizio 1.19. *Siano A e B matrici 3×3 tali che*

$$AB = BA \qquad\qquad \forall B \in M_{3\times 3}$$

Si dimostri che deve necessariamente essere:

$$A = \lambda I_3 \qquad\qquad \textit{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

Soluzione:

Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 3×3. Poichè $AB = BA$ per ogni matrice B, in particolare deve valere per

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \; a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{13} = 0.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Analogamente la relazione $AB = BA$ deve valere in particolare per

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \ a_{32} = a_{23} = 0.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento con

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \ a_{11} = a_{22}.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizzando infine

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \ a_{11} = a_{33}.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I_3 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 1.20. *Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi*

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

a) Calcoliamo il prodotto

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 = -6 \cdot 2 - 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 + 2 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} 4x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 6x_3 = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Notiamo subito che l'ultima equazione è impossibile, quindi il sistema non ammette soluzione.

c) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ha tre incognite, ma solamente due equazioni (significative). Abbiamo quindi una variabile libera. Partiamo dall'ultima equazione (significativa) aggiungendo un parametro. Poniamo per esempio $x_3 = t$ (Potevamo equivalentemente porre $x_2 = t$):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(-t + 4) + t - 3 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che in questo caso il sistema ammette infinite soluzione: ogni valore assegnato a t permette di trovare una delle infinite soluzioni.

$\square$

Esercizio 1.21. *Si dica per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ammette soluzione. In caso positivo si determinino esplicitamente tali soluzioni.

Soluzione:

Il sistema associato a A e b è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ (k+1)x_3 = -1 \end{cases}$$

Cercando le soluzioni dell'ultima equazione incontriamo subito una difficoltà: dovendo dividere per $(k+1)$ dobbiamo imporre la condizione $k + 1 \neq 0$. Dobbiamo quindi distinguere due casi:

- Se $k \neq -1$, otteniamo le soluzioni
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k+2}{k+1} + \frac{2}{k+1} = \frac{k+4}{k+1} \\ x_2 = \frac{k+2}{k+1} \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases}$$
Quindi per ogni $k \neq -1$ il sistema ammette la sola soluzione
$$\begin{cases} x_1 = \frac{k+4}{k+1} \\ x_2 = \frac{k+2}{k+1} \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases}$$
- Se $k = -1$, sostituendo tale valore nel sistema otteniamo
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$
Quindi in questo caso il sistema è impossibile.

□