CAPITOLO 11

Endomorfismi e matrici simmetriche

Esercizio 11.1. [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Calcolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11.2. *Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale P^TAP sia diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11.3. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.*
b) *Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Esercizio 11.4. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
b) *Si può affermare che A è diagonalizzabile anche senza conoscere gli autovalori?*
c) *Trovare una base di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.*

Esercizio 11.5. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Esercizio 11.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Esercizio 11.7. *Si consideri la matrice reale simmetrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* A.
b) *Determinare una matrice ortogonale* P *tale che* P^TAP *sia diagonale.*

Esercizio 11.8. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$ *definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di* T.
b) *Determinare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^4$ *formata da autovettori di* T.

Esercizio 11.9. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a *e* b *parametri reali.*
a) *Si discuta la diagonalizzabilità di* T *al variare di* a *e* b *in* $\mathbf{R}$.
b) *Posto* $a = b = 0$ *si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* T.

Esercizio 11.10. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}$. T *è un endomorfismo simmetrico?*

Esercizio 11.11. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}.$$

a) T *è un endomorfismo simmetrico?*
b) T *è diagonalizzabile?*

Esercizio 11.12. *Sia* T *l'endomorfismo do* $\mathbf{R}^4$ *cosí definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, x_3, x_4, -3x_2 + x_3 + 3x_4)$$

a) *Mostrare che* 1 *è autovalore di* T.
b) *Stabilire se* T *è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base rispetto a cui* T *ha matrice diagonale.*
c) *L'endomorfismo* T *è simmetrico?*

Esercizio 11.13. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se* T *è invertibile.*
b) *Mostrare che* T *è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *che diagonalizza* T.

Esercizio 11.14. *Si consideri la funzione lineare (endomorfismo)* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *così definita:*

$$T(x, y, z) = (2x + 4z, 6y, 4x + 2z).$$

a) *Stabilire se* T *è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$.
b) *Se esiste, trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* T.

Esercizio 11.15. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo avente come autovettori i vettori* $v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)$, *rispetto agli autovalori* $1, 1, 2$.
a) *Calcolare la matrice* A *che rappresenta* T *rispetto alla base canonica.*
b) T *è invertibile?*
c) T *è un endomorfismo simmetrico?*

Esercizio 11.16. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di T e stabilire se T è diagonalizzabile.*

---

1. Suggerimenti

Endomorfismo simmetrico: $T : V \to V$ tale che:

$$(T(u), v) = (u, T(v)) \qquad \forall u, v \in V$$

PROPRIETÀ :
Se T è un endomorfismo e A è la matrice associata a T rispetto a una **base ortonormale**, allora:
- T è simmetrico $\Leftrightarrow$ A è simmetrica (cioè $A = A^T$).
- T ha n autovalori reali (contati con la loro molteplicità).
- Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Matrice ortogonale: P è una matrice ortogonale se

$$P \cdot P^T = I \quad \text{ovvero} \quad P^{-1} = P^T$$

Notiamo che $\det(P) = \pm 1$, e P è detta ortogonale speciale se $\det(P) = 1$.

Teorema spettrale
- Se T è un endomorfismo simmetrico di V, allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T. In particolare T è diagonalizzabile, cioè esiste una base (ortonormale) di V rispetto alla quale la matrice associata a T è diagonale.
- Se A è una matrice simmetrica, allora A è simile a una matrice diagonale D (ovvero A è diagonalizzabile). Inoltre la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 11.1. [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Calcolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice A calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot 2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda)-4] \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono i valori di λ per cui $p_A(\lambda)=0$, quindi

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{(doppio)}, \qquad\qquad \lambda_2 = 3$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = -1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A+I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow\ 2x+2y=0\ \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=s \end{cases} \quad \forall s,t\in\mathbf{R}\ \Rightarrow\quad E(-1)=\langle(-1,1,0),\ (0,0,1)\rangle$$

  Poichè dalla teoria sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ci aspettavamo che l'autovalore $\lambda=-1$ avesse molteplicità geometrica 2.

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A-3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y=0 \\ -4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}\ \Rightarrow\quad E(3)=\langle(1,1,0)\rangle$$

Siano

$$v_1=(-1,1,0), \qquad v_2=(0,0,1), \qquad v_3=(1,1,0)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo A una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Inoltre, in questo caso, anche i due autovettori relativi allo stesso autovalore $\lambda=-1$ risultano ortogonali: $(v_1,v_2)=0$. Per determinare la base ortonormale richiesta è quindi sufficiente normalizzare i tre vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0,0,1) \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B}=\{u_1,\ u_2,\ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \end{aligned}$$

Ripetiamo ora l'esercizio con la matrice B. Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice B calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$B-\lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda)-1] - 3\cdot 3(1-\lambda) = (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda)-1-9] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12) \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono i valori di λ per cui $p_B(\lambda)=0$, quindi

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -4$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = 1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B-I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y=0 \\ 3x-3y-z=0 \\ -y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=3t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\ E(1)=\langle(1,0,3)\rangle$$

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo asociato a $B - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -5 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II + 3I \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle (-3, -2, 1) \rangle$$

- $\lambda = -4$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B + 4I$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 5II + -3I \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-4) = \langle (-3, 5, 1) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (1, 0, 3), \qquad v_2 = (-3, -2, 1), \qquad v_3 = (-3, 5, 1)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo B una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Per determinare la base ortonormale richiesta si tratta quindi di normalizzare i tre vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}} \right) \qquad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{5}{\sqrt{35}},\ \frac{1}{\sqrt{35}} \right) \end{aligned}$$

□

Esercizio 11.2. *Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale $P^T AP$ sia diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Poichè entrambe le matrici A sono simmetriche, sappiamo dalla teoria che sono sicuramente diagonatizzabili. Si tratta di

1. Determinare gli autovettori di A,
2. Determinare una base ortonormale a partire dagli autovettori (linearmente indipendenti) di A,
3. Scrivere la matrice P che ha per colonne gli elementi della base trovata.

La matrice P cosí determinata è diagonalizzante e ortogonale.

Consideriamo prima la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \ \Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$

- $\lambda = 2$. Consideriamo $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \langle\ (2, 1)\ \rangle$$

- $\lambda = -3$. Consideriamo $A + 3I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-3) = \langle\ (1, -2)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$v_1 = (2,1), \qquad v_2 = (1,-2) \qquad \Rightarrow$$
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \;\Rightarrow\;$ autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$

- $\lambda = 1$. Consideriamo $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad E(1) = \langle\ (1,1,0)\ \rangle$$

- $\lambda = 3$. Consideriamo $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(3) = \langle\ (-1,1,-2)\ \rangle$$

- $\lambda = 0$. Consideriamo $A - 0I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(0) = \langle\ (-1,1,1)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{array}{lcl} v_1 = (1,1,0) & & u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \\ v_2 = (-1,1,-2) & \Rightarrow & u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ v_3 = (-1,1,1) & & u_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array}$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 11.3. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.*
b) *Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

SOLUZIONE:

a) L'endomorfismo T é sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrico.
b) Calcoliamo gli autovalori di T:

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 1] = (4-\lambda)^2(6-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 6$$

Calcoliamo ora gli autospazi.
Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow y - z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,1)\ \rangle$$

Notiamo che, anche senza avere osservato che T è simmetrico, a questo punto possiamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto la molteplicità geometrica del suo unico autovalore doppio è 2.

Inoltre i due vettori presi come generatori sono tra loro ortogonali, è perciò sufficiente normalizzarli per ottenere una base ortonormale di $E(4)$:

$$\mathcal{B}(E(4)) = \left\{\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a $A - 6I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle\ (0,-1,1)\ \rangle$$

Una base ortonormale di $E(6)$ è:

$$\mathcal{B}(E(6)) = \left\{\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

c) L'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{\ (1,0,0)\,,\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

□

Esercizio 11.4. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
b) *Si può affermare che A è diagonalizzabile anche senza conoscere gli autovalori?*
c) *Trovare una base di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (8-\lambda)\cdot[(5-\lambda)^2-16]+2[-2(5-\lambda)-8]+2[-8-2(5-\lambda)] \\ &= (8-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+9)+2(2\lambda-18)+2(-18+2\lambda) \\ &= (8-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-9)+8(\lambda-9) \\ &= (\lambda-9)(\lambda^2-9\lambda+8-8) \\ &= -\lambda(\lambda-9)^2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono $\lambda=0$ e $\lambda=9$ (doppio).

b) A è sicuramente diagonnalizzabile perchè è simmetrica.

c) Calcoliamo i due autospazi.

$E(0)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II+1/2I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 9 & 9 & | & 0 \\ 0 & 9 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/9II \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}t \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(0)=\langle\ (-1,-2,2)\ \rangle$$

$E(9)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-9I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ -2 & -4 & 4 & | & 0 \\ 2 & 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II-I \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-2s+2t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \qquad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(9)=\langle\ (-2,1,0),\ (2,0,1)\ \rangle$$

Infine una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{\ (-1,-2,2),\ (-2,1,0),\ (2,0,1)\ \}.$$

$\square$

Esercizio 11.5. *Sia A la matrice reale*

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (6-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda)-2\cdot 2(5-\lambda)=(5-\lambda)(\lambda^2-15\lambda+54-4) \\ &= -(\lambda-5)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda=10, \qquad \lambda=5 \quad \text{(doppio)}$$

Calcoliamo i due autospazi.

$E(10)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-10I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III-1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -58 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-2t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(10)=\langle\ (1,0,-2)\ \rangle$$

$E(5)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-5I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{III+2I}{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(5) = \langle\ (2,0,1),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{\ (1,0,-2),\ (2,0,1),\ (0,1,0)\ \}.$$

Notiamo che tali vettori sono già tra loro ortogonali, è quindi sufficiente normalizzarli. Una base ortonormale è quindi data dall'insieme

$$\left\{\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ (0,1,0)\ \right\}.$$

□

Esercizio 11.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

SOLUZIONE:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{singolo}$$
$$\lambda_2 = 2 \quad \text{doppio}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad II - I \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(0) = \langle (1,-1,0) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad II + I \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(2) = \langle (1,1,0),\ (0,0,1) \rangle$.

Gli autovettori trovati sono tutti ortogonali tra loro, quindi per determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ è sufficiente normalizzarli:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ (0,0,1) \right\}$$

□

Esercizio 11.7. *Si consideri la matrice reale simmetrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.*
b) *Determinare una matrice ortogonale P tale che P^TAP sia diagonale.*

Soluzione:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3 \quad \text{singoli}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(0) = \langle (1,-1,-1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad E(1) = \langle (1,0,1) \rangle$$

Calcoliamo infine l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{2II+I}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow E(3) = \langle (-1,-2,1) \rangle$$

a) Gli autovettori trovati sono tutti ortogonali tra loro (anche perchè appartengono a autospazi ditinti), quindi per determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ è sufficiente normalizzarli:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \right), \right\}$$

b) La matrice P cercata ha per colonne i vettori della base di $\mathbf{R}^3$ trovata:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 11.8. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di T.*
b) *Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:
Notiamo che la matrice A è simmetrica, quindi è sicuramente diagonalizzabile.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando rispetto alla prima riga:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda)[(5-\lambda)^2-1]$$
$$= (4-\lambda)^2(6-\lambda)^2$$

quindi gli autovalori di M sono $\lambda = 4,\ 6$, entrambi di molteplicità algebrica 2.

Calcoliamo ora gli autospazi:

$$E(4) = \mathrm{N}(M-4I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \\ w = s \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle \ (1,0,0,0), \ (0,1,0,1) \ \rangle$$

$$E(6) = \mathrm{N}(M-6I): \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = s \\ w = -t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle \ (0,0,1,0), \ (0,1,0,-1) \ \rangle$$

b) Notiamo che i due generatori di $E(4)$ e i due generatori di $E(6)$ determinati sono ortogonali tra loro, quindi per trovare un base ortonormale di R^4 basta renderli di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \left\{ (1,0,0,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ (0,0,1,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.9. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x,y,z) = (ax, \ bx + y + z, \ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in* $\mathbf{R}$.
b) *Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

SOLUZIONE:
Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

a) Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(A): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow II - III \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo distinguere due casi
- Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi
- Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è daigonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b, oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

b) Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0,1,-1), \ (1,0,0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I): \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(2) = \langle (0,1,1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ (1,0,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.10. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ \ (1,1,1), \ (1,1,0), \ (1,0,1) \ \}$. T è un endomorfismo simmetrico?

Soluzione:

Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che A non sia simmetrica non implica che non lo sia T. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per comodità assegnamo un nome ai tre vettori della base $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,1,0), \qquad v_3 = (1,0,1)$$

Dalla matrice A ricaviamo le immagini degli elementi della base $\mathcal{B}$, ricordando però che tali elementi sono ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1,1) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = (2,3,-1)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= T(1,0,1) = (1,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Per calcolare le immagini della base canonica dobbiamo prima esprimere $e_1, \ e_2, \ e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo che data la semplicità dei calcoli non è necessario impostare e risolvere i tre sistemi associati alle equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$. E' infatti immediato ricavare che

$$\begin{aligned} e_3 &= (1,1,1) - (1,1,0) = v_1 - v_2 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\ e_2 &= (1,1,1) - (1,0,1) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}} \\ e_1 &= (1,1,0) - e_2 = v_2 - v_1 + v_3 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi sfruttando la linearità di T:

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_1) - T(v_2) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} - (2,3,-1)_{\mathcal{B}} = (0,-1,1)_{\mathcal{B}} = -v_2 + v_3 = (0,-1,1) \\ T(e_2) &= T(v_1) - T(v_3) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} - (1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)_{\mathcal{B}} = v_1 + 2v_2 - v_3 = (2,3,0) \\ T(e_1) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = (2,3,-1_{\mathcal{B}}) - (2,2,0)_{\mathcal{B}} + (1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,1,0)_{\mathcal{B}} = v_1 + v_2 = (2,2,1) \end{aligned}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poichè B non è simmetrica, anche non T è un endomorfismo simmetrico.

Notiamo che per calcolare B potevamo in alternativa usare la matrice di cambiamento di base. Indichiamo con P è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$, cioè $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori v_1, v_2 e v_3 (espressi rispetto alla base canonica).La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è la matrice inversa di P: $P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Poiché $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ e $B = M(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$ abbiamo la seguente relazione:

$$M(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \qquad \Rightarrow \qquad B = PAP^{-1}$$

□

Esercizio 11.11. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}.$$

a) *T è un endomorfismo simmetrico?*
b) *T è diagonalizzabile?*

SOLUZIONE:

a) Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che A non sia simmetrica non implica che non lo sia T. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per fare questo possiamo procedere in due modi
   (1) Ricavare le immagini di $e_1,\ e_2$ e e_3 utlizzando la matrice A, dopo avere espresso e_i rispetto a $\mathcal{B}$ e ricordando che i risultati ottenuti saranno ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$.
   (2) Ricavare direttamente le immagini di $e_1,\ e_2$ e e_3 sfruttando la linearità di T.

   Consideriamo entrambi i metodi
   (1) Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e e_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ -III \\ -II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

   Possiamo ora risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \ \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow\ e_1 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}}$$
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \ \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow\ e_2 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}}$$
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \ \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow\ e_3 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}}$$

   Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ per calcolare le imamgini di e_i, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned}
T(e_1) = M_{\mathcal{B}}(T)\cdot e_1 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (-2,2,1)_{\mathcal{B}} = -2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (1,0,-1) \\
T(e_2) = M_{\mathcal{B}}(T)\cdot e_2 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= (3,-1,-2)_{\mathcal{B}} = 3\cdot v_1 - 1\cdot v_2 - 2\cdot v_3 = (0,2,1) \\
T(e_3) = M_{\mathcal{B}}(T)\cdot e_3 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= (5,-4,-2)_{\mathcal{B}} = 5\cdot v_1 - 4\cdot v_2 - 2\cdot v_3 = (-1,1,3)
\end{aligned}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) In alternativa possiamo ricavare direttamente le immagini di e_1 dalla matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, sfruttando la linearità di T. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi:

$$\begin{aligned}
T(1,1,1) &= (6,-3,-3)_{\mathcal{B}} \\
T(1,1,0) &= (1,1,-1)_{\mathcal{B}} \\
T(1,0,1) &= (3,-2,-1)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Sfruttando la linearità di T:

$$\begin{aligned}
T(0,0,1) &= T(1,1,1) - T(1,1,0) = (6,-3,-3)_{\mathcal{B}} + (-1,-1,1)_{\mathcal{B}} = (5,-4,-2)_{\mathcal{B}} \\
&= 5\cdot(1,1,1) - 4\cdot(1,1,0) - 2\cdot(1,0,1) = (-1,1,3) \\
T(1,0,0) &= T(1,0,1) - T(0,0,1) = (3,-2,-1)_{\mathcal{B}} + (-5,4,2)_{\mathcal{B}} = (-2,2,1)_{\mathcal{B}} \\
&= -2\cdot(1,1,1) + 2\cdot(1,1,0) + 1\cdot(1,0,1) = (1,0,-1) \\
T(0,1,0) &= T(1,1,0) - T(1,0,0) = (1,1,-1)_{\mathcal{B}} + (2,-2,-1)_{\mathcal{B}} = (3,-1,-2)_{\mathcal{B}} \\
&= 3\cdot(1,1,1) - 1\cdot(1,1,0) - 2\cdot(1,0,1) = (0,2,1)
\end{aligned}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poichè B è simmetrica, anche T è un endomorfismo simmetrico.

b) T è sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrica.

□

Esercizio 11.12. *Sia T l'endomorfismo do $\mathbf{R}^4$ cosí definito:*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1, x_3, x_4, -3x_2 + x_3 + 3x_4)$$

a) *Mostrare che 1 è autovalore di T.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base rispetto a cui T ha matrice diagonale.*
c) *L'endomorfismo T è simmetrico?*

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T rispetto alla base canonica calcolando:

$$T(e_1) = (3,0,0,0), \quad T(e_2) = (0,0,0,-3), \quad T(e_3) = (0,1,0,1), \quad T(e_4) = (0,0,1,3)$$

Quindi la matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)\left[-\lambda(-3\lambda + \lambda^2 - 1) - 3\right] = (3-\lambda)\left[-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\right] \\ &= (3-\lambda)\left[\lambda^2(-\lambda+3) - (-\lambda+3)\right] = (3-\lambda)^2\left[\lambda^2 - 1\right] \end{aligned}$$

a) Gli autovalori A sono

$$\lambda = 3 \text{ doppio}, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = -1$$

In particolare $\lambda = 1$ è autovalore.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(3)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 9t \end{cases} \Rightarrow \quad E(3) = \langle\ (0,1,3,9),\ (1,0,0,0)\ \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che T è diagonalizzabile in quanto $E(3)$ ha dimensione 2 e gli altri due autovalori sono singoli.

Calcoliamo l'autospazio $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (0,1,1,1)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(-1) = \langle\ (0,1,-1,1)\ \rangle$$

Infine T ha una matrice diagonale rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,0,0,0),\ (0,1,3,9),\ (0,1,1,1),\ (0,1,-1,1)\ \}$$

c) T non è simmetrico in quanto la matrice A associata a T rispetto alla base canonica (che è ortogonale) non è simmetrica.

□

Esercizio 11.13. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se T è invertibile.*
b) *Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) T è invertibile se è invertibile la matrice A, cioè se A ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

b) La matrice associata a T rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica: $A^T = A$, quindi T è un endomorfismo simmetrico.

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) - 3] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2, \ -1, \ 3$.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A-2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ E(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A+I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \sqrt{3}III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow \ E(-1) = \langle (0, 1, -\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A-3I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + \sqrt{3}II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \ E(3) = \langle (0, \sqrt{3}, 1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ (1,0,0), \ \left(0, \frac{1}{2}, \ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.14. *Si consideri la funzione lineare (endomorfismo) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ così definita:*

$$T(x,y,z) = (2x + 4z, 6y, 4x + 2z).$$

a) *Stabilire se T è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$.*

b) *Se esiste, trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di T.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è simmetrica, quindi anche T è simmetrica.

b) Calcoliamo gli autovalori di T:

$$p_A(\lambda) = (6-\lambda) \cdot \left[(2-\lambda)^2 - 16\right] = (6-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 12)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 6$ (doppio) e $\lambda = -2$.

Calcoliamo ora gli autospazi:

$$E(6) = N(A-6I): \quad \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(6) = \langle (1,0,1), \ (0,1,0) \rangle$$

$$E(-2) = N(A+2I): \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(-2) = \langle (-1,0,1) \rangle$$

Notiamo che gli autovettori trovati sono già ortogonali tra loro, quindi per trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori basta prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 11.15. *Sia $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, rispetto agli autovalori $1, 1, 2$.*

a) *Calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.*
b) *T è invertibile?*
c) *T è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Poiché v_1 è autovettore rispetto a $\lambda = 1$, otteniamo che $T(v_1) = v_1$. Analogamente $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$. Di conseguenza

$$T(v_1) = (1,1,0), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (0,0,2)$$

a) Dobbiamo trovare le immagini della base canonica. Notiamo che

$$\begin{aligned} e_3 &= v_3 \\ e_2 &= v_2 - v_3 \\ e_1 &= v_1 - e_2 = v_1 - v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Per la linearità di T otteniamo che

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_3) = (0,0,2) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_3) = (0,1,1) - (0,0,2) = (0,1,-1) \\ T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,2) = (1,0,1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare A si poteva utilizzare la matrice diagonalizzante P che ha per colonne gli autovettori, e la matrice diagonale D che ha gli autovalori sulla diagonale. Dalla relazione $P^{-1}AP = D$ si ricava $A = PDP^{-1}$.

b) T è invertibile se lo è A. Poiché $\det(A) = -2 \neq 0$, A e T sono invertibili.
c) T non è simmetrico perché A, che è associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica, non lo è.

□

Esercizio 11.16. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a+kb)x^2 + (ka+b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di T e stabilire se T è diagonalizzabile.*

Soluzione:

Notiamo che il generico polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ ha componenti (a, b, c) rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$. In particolare $p(x) = x^2$ ha componenti $(1, 0, 0)$, $p(x) = x$ ha componenti $(0, 1, 0)$ e $p(x) = 1$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In sostanza la base $\{x^2, x, 1\}$ corrisponde quindi alla base canonica. Inoltre T può essere vista come apllicazione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(a, b, c) = (a + kb,\ ka + b,\ kc).$$

a) Calcoliamo la immagini degli elementi della base:

$$\begin{aligned} T(x^2) &= T(1, 0, 0) = (1, k, 0) = x^2 + kx \\ T(x) &= T(0, 1, 0) = (k, 1, 0) = kx^2 + x \\ T(1) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, k) = k \end{aligned}$$

Di conseguenza la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (k - \lambda)\left[(1 - \lambda)^2 - k^2\right] = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k)$$

Di conseguenza gli autovalori (non sempre distinti) sono

$$\lambda = k, \qquad \lambda = 1 - k, \qquad \lambda = 1 + k$$

Notiamo che la matrice A è diagonalizzabile, senza la necessità di calcolare molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori, in quanto è simmetrica.

$\square$