CAPITOLO 14

Quadriche

Alcuni esercizi di questo capitolo sono ripetuti in quanto risolti in maniera differente.

Esercizio 14.1. *Stabilire il tipo di quadrica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una quadrica a centro determinare inoltre le coordinate del centro.*

a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$

b) $xy + xz - yz - x = 0$

c) $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$

e) $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$

f) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$

g) $4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2yz + 8x + 8y + 8z + 1 = 0$

h) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xz + 4y - 4z = 0$

i) $-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0$

l) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Esercizio 14.2. *Determinare la forma canonica delle seguenti quadriche. Se si tratta di una quadrica a centro determinarne il centro e gli assi di simmetria.*

a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$
b) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$
d) $5x^2 - y^2 + 8xy + 5z^2 - 5z - 2 = 0$

Esercizio 14.3. *Determinare la forma canonica delle seguenti quadriche, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

a) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$
b) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Esercizio 14.4. *Determinare la forma canonica della seguente quadrica, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$$

Esercizio 14.5. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \quad 3x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy - 4z = 0.$$

a) *Stabilire se $\mathcal{Q}$ é degenere o meno, e di quale tipo di quadrica si tratti. Se é una quadrica a centro determinare le coordinate del centro.*
a) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{Q}$ e determinare coordinate omogenee dei punti all'infinito degli assi di simmetria.*

Esercizio 14.6. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ xz - y^2 - 4z^2 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*

c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Esercizio 14.7. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \;:\; x^2 - 2y^2 + yz = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*
c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $x = 0$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Esercizio 14.8. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \;:\; x^2 + z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z + 2y + 4 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica.*
b) *Studiare la conica che si ottiene intersecando la quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ (tipo, forma canonica,...).*

Esercizio 14.9. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \;:\; (1 + 2k)x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

Esercizio 14.10. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \;:\; x^2 + (1 + 2k)y^2 + z^2 + 2kxz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

---

1. Suggerimenti

Equazione

A ogni quadrica $f(x, y, z) = 0$, possiamo associare due matrici quadrate: la matrice $A \in M_{3\times 3}$ relativa alla forma quadratica associata alla quadrica, e la matrice $A' \in M_{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy & 1/2 \text{ coeff. di } xz \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 & 1/2 \text{ coeff. di } yz \\ 1/2 \text{ coeff. di } xz & 1/2 \text{ coeff. di } yz & \text{coeff. di } z^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \\ 1/2 \text{ coeff. della } z \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della quadrica è

$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1] \cdot A' \cdot [x, y, z, 1]^T = 0$$

Invarianti.

Il polinomio caratteristico di A è così formato

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

con

$$I_1 = tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$
$$I_3 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \qquad I_4 = \det(A')$$

$I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ sono invarianti. Mentre $I_1,\ I_3,\ I_4$ possono essere calcolati direttamente da A e A', I_2 può essere calcolato solo da $p_A(\lambda)$.

Classificazione: quadriche non degeneri

Una quadrica è **non degenere** se $\det(A') \neq 0$, ovvero $\text{rg}(A') = 4$. Inoltre è

- **Ellissoide**: $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$, e autovalori di A concordi (oppure $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 > 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: ELLISSOIDE IMMAGINARIO: $ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = 0$
  - $I_4 = \det(A') < 0$: ELLISSOIDE REALE: $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$

- **Iperboloide**: $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$, e autovalori di A discordi (oppure $I_3 \neq 0$ e $I_2 \leq 0$ o $I_1 I_3 \leq 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: IPERBOLOIDE IPERBOLICO(a 1 falda): $ax^2 + by^2 - cz^2 - 1 = 0$.
  - $I_4 = \det(A') < 0$: IPERBOLOIDE ELLITTICO (a 2 falde): $ax^2 - by^2 - cz^2 - 1 = 0$.

- **Paraboloide**: $\text{rg}(A) \leq 2$, cioè $\det(A) = 0$, cioè un autovalore nullo (oppure $I_3 = 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: PARABOLOIDE IPERBOLICO: $ax^2 - by^2 - z = 0$.
    Analogamente è un paraboloide iperbolico se i due autovalori non nulli di A sono discordi.
  - $I_4 = \det(A') < 0$: PARABOLODE ELLITTICO: $ax^2 + by^2 - z = 0$.
    Analogamente è un paraboloide ellittico se i due autovalori non nulli di A sono concordi.

Classificazione: quadriche degeneri

Una quadrica è **degenere** se $\det(A') = 0$. Inoltre:

- Se $\text{rg}(A') = 3$, allora è degenere **irriducibile**.
- Se $\text{rg}(A') \leq 2$, allora è degenere **riducibile**.

In particolare:

- **Cono** (quindi irriducibile): $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3$ (oppure $I_4 = 0$ e $I_3 \neq 0$). Inoltre:
  - Auotovalori di A concordi (oppure $I_2 > 0$): cono a un unico punto reale $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$,
  - Auotovalori di A discordi (oppure $I_2 \leq 0$): cono reale $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$
- **Cilindro** (quindi irriducibile): Se $\text{rg}(A) = 2$, ma $\text{rg}(A') = 3$ (oppure $I_3 = 0$ e $\text{rg}(A') = 3$). Inoltre:
  - $I_2 > 0$: cilindro ellittico: $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$,
  - $I_2 < 0$: cilindro iperbolico: $ax^2 - by^2 - 1 = 0$,
  - $I_2 = 0$: Cilindro parabolico: $x^2 - 2py = 0$.

Se $\text{rg}(A') \leq 2$ allora è una quadrica degenere **riducibile**. Inoltre

- Se $\text{rg}(A') = 2$ e $\text{rg}(A) = 2$: due piani incidenti (reali o complessi),
- Se $\text{rg}(A') = 2$ e $\text{rg}(A) = 1$: due piani distinti e paralleli (reali o complessi),
- Se $\text{rg}(A') = 1$: un piano doppio.

Centro e assi

- Ellissoide e iperboloide sono quadriche a centro. Come per le coniche il **centro** si trova risolvendo il sistema $A| - h$.

- Come per le coniche gli **assi** di una quadrica non degenere a centro sono le rette passanti per il centro e di direzione corrispondente agli autovettori della matrice A della quadrica.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione** tale che

$$R^T AR = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che il determinante sia 1).

Forme canonica con equazioni della trasformazione delle quadriche **non degeneri**:

Per ottenere la forma canonica si procede esattamente come per le coniche:

(1) **Rotazione**: utilizzando una matrice ortonormale R di rotazione,
(2) **Traslazioine**.

Forma canonica versione semplice.

Per ottenere la forma canonica di una quadrica non degenere senza cercare però l'equazioni della trasformazione che permette di passare dall'equazione originale alla forma canonica e viceversa, possiamo procedere nel seguente modo:

- Calcoliamo $\det(A')$ per verificare che la quadrica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ di A e stabiliamo di quale quadrica si tratta.
- Consideriamo i diversi casi:
  - Se si tratta di un **ellissoide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ autovalori di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica. Solo a questo punto possiamo stabilire se è reale o immaginaria.
  - Se si tratta di un **iperboloide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 - cz^2 - 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ autovalori di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica. Solo a questo punto possiamo stabilire se è un iperboloide a una o a due falde.
  - Se si tratta di un **paraboloide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 - z = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2tz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori non nulli di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t (negativo). Dividendo infine per t si ottiene la forma canonica.

Quadriche degeneri riducibili.
Se $\text{rg}(A') \leq 2$ si possono trovare i piani risolvendo una equazione di secondo grado in una incognita (le altre due incognite vengono considerate parametri), oppure in generale scomponendo il polinomio $f(x, y, z)$ nel prodotto di due polinomi di primo grado.

---

2. Soluzioni

Esercizio 14.1. *Stabilire il tipo di quadrica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una quadrica a centro determinare inoltre le coordinate del centro.*

a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$

b) $xy + xz - yz - x = 0$

c) $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$

e) $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$

f) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$

g) $4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2yz + 8x + 8y + 8z + 1 = 0$

h) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xz + 4y - 4z = 0$

i) $-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0$

l) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cominciamo a stabilire se è degenere calcolando il determinante di A'. Poiché ci interessa solo stabilire se il determinante si annulla (ovvero se $\text{rg}(A') < 4$ possiamo in alternativa ridurre la matrice (parzialmente) a gradini per semplificare i conti. Inoltre la riduzione a gradini è utile quando successivamente calcoliamo il rango di A. Per tale ragione è conveniente non scambiare le righe di A' o almeno non scambiare la IV riga con le precedenti, in modo da tenere la matrice A, formata dalle prime tre righe, distinta. Inoltre il metodo introdotto nelle prime lezioni, che consiste nell'utilizzare solo le righe precedenti una riga per modificare quest'ultima, ci garantisce che la matrice A non sia modificata con l'uso della IV riga.

$$\begin{array}{c} \\ 2II + I \\ \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rg}(A') = 3 \;\Rightarrow\; \det(A') = 0 \;\Rightarrow\; \text{quadrica degenere}$$

In particolare $\text{rg}(A') = 3$ quindi si tratta o di un cono o di un cilindro.
Dalla riduzione si nota che

$$\text{rg}(A) = 2 \;\Rightarrow\; \text{cilindro (non parabolico)}.$$

Per stabilire il tipo di cilindro dobbiamo calcolare I_2:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda \;\Rightarrow\; I_1 = 5,\; I_2 = 6,\; I_3 = 0$$

Poichè $I_3 = 0$ si tratta in effetti di un cilindro; inoltre $I_2 > 0$ quindi è un cilindro ellittico.

---

b) Consideriamo l'equazione $xy + xz - yz - x = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso è immediato calcolare il determinante sviluppando rispetto all'ultima riga:

$$\det(A') = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{quadrica non degenere}$$

Inoltre

$$\det(A) = -\frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3 \;\Rightarrow\; \text{ellissoide o iperboloide.}$$

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda\right) \\ &= -\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(2\lambda^2 + \lambda - 1) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = -1 \quad \Rightarrow \text{discordi} \quad \Rightarrow \text{iperboloide}$$

Inotre $\det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; I_1 = 0,\; I_2 = -\frac{3}{4},\; I_3 = -\frac{1}{4},.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2 < 0$, quindi è un iperboloide. Infine $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2III \\ 2II \\ 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

c) Consideriamo l'equazione $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 1/2II \\ 2III - I \\ 4IV - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 4II \\ IV - 8II \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A') = 4 \Rightarrow$ quadrica non degenere

$\mathrm{rg}(A) = 2 \Rightarrow$ paraboloide

Inoltre

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda) - 4\right] - 4(2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori (oltre a $\lambda_1 = 0$) sono

$$\lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ paraboloide ellittico}$$

---

d) Consideriamo l'equazione $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -11 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' riducendo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 1/4II \\ III - 3II \\ IV + I \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}(A') = 4 \Rightarrow$ quadrica non degenere

Inoltre

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Rightarrow \text{ ellissoide o iperboloide.}$$

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (5-\lambda)\left[(-4-\lambda)(-11-\lambda) - 144\right] \\ &= (5-\lambda)\left[\lambda^2 - 15\lambda - 100\right] \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -20 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ iperboloide}$$

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 20\lambda^2 + 25\lambda - 500 \Rightarrow I_1 = 20, \ I_2 = -25, \ I_3 = -500.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2 < 0$, quindi è un iperboloide. Infine $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & -4 & -12 & | & 0 \\ 0 & -12 & -11 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/4II \\ III-3II \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & -1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 25 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow C\,(1,\ 0,\ 0)$$

Notiamo che potevamo considerare direttamente la matrice ridotta a gradini, pur di cambiare il segno ai termini della colonna dei termini noti.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

e) Consideriamo l'equazione $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' riducendo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ 1/2III \\ III \\ IV+3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-3II \\ IV-4II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\text{rg}(A') = 4 \ \Rightarrow$ quadrica non degenere

$\text{rg}(A) = 3 \ \Rightarrow$ ellissoide o iperboloide.

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda - 4\right]$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ iperboloide}$$

Inoltre $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 \ \Rightarrow \ I_1 = 4,\ I_2 = -1,\ I_3 = -4.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2 < 0$, quindi è un iperboloide. Infine $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$ e considerando direttamente la matrice ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow C\,(3,\ 0,\ -2)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

f) Consideriamo l'equazione $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \\ 2IV-3III \end{array}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+I \\ \\ IV-2III \end{array}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 19 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rg}(A') = 4 \;\Rightarrow\;$ quadrica non degenere, e $\text{rg}(A) = 2 \;\Rightarrow\;$ paraboloide

Inoltre

$$p_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot 2(-1-\lambda) - 2\cdot 2(1-\lambda) = -\lambda(-1+\lambda^2) + 8\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9)$$

Quindi gli autovalori (oltre a $\lambda_1 = 0$) sono

$$\lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ paraboloide iperbolico}$$

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda \;\Rightarrow\; I_1 = 0,\; I_2 = 9,\; I_3 = 0.$$

Poichè $I_3 = 0$ è un paraboloide; inoltre $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un paraboloide iperbolico.

---

g) Consideriamo l'equazione $4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2yz + 8x + 8y + 8z + 1 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} 1/4I \\ \\ 5III+II \\ IV-I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ 5IV-4II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & -31 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/24III \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\text{rg}(A') = 4 \;\Rightarrow\;$ quadrica non degenere, e $\text{rg}(A) = 3 \;\Rightarrow\;$ ellissoide o iperboloide

Inoltre

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 24)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 6 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ ellissoide}$$

Inoltre $I_1 = \det(A') < 0$, quindi è un ellissoide reale.

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 64\lambda + 96 \;\Rightarrow\; I_1 = 14,\; I_2 = 64,\; I_3 = 96.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2 > 0$, quindi è un ellissoide. Infine $I_4 = \det(A') < 0$, quindi è un ellissoide reale.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$ e considerando direttamente la matrice ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 5 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow C\,(-1,\; -1,\; -1)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

h) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xz + 4y - 4z = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ 1/2II \\ III+I \\ IV-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A') = 3 \ \Rightarrow\ $ quadrica degenere, $\text{erg}(A) = 3 \ \Rightarrow\ $ cono

Anche il cono è una conica a centro, quindi risolviamo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ -1 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III+I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow C(-1,-1,-1)$$

---

i) Consideriamo l'equazione $-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ \\ III-I \\ IV-2III \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A') = 2 \ \Rightarrow\ $ quadrica degenere

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 2 \ \Rightarrow\ $ due piani incidenti

Infatti:

$$\begin{aligned} &-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0 \\ &x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + 4x - 4y = 0 \\ &(x-y)(x+y) + 2z(x-y) + 4(x-y) = 0 \\ &(x-y)(x+y+2z+4) = 0 \end{aligned}$$

Quindi la quadrica corrisponde alla coppia di piani

$$x - y = 0, \qquad\qquad x + y + 2z + 4 = 0$$

---

l) Consideriamo l'equazione $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3III-II \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 1/4III \\ 2IV+III \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\text{rg}(A') = 4 \ \Rightarrow\ $ quadrica non degenere

$\text{rg}(A) = 3 \ \Rightarrow\ $ ellissoide o iperboloide

Inoltre

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ ellissoide}$$

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$ e considerando direttamente la matrice ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

$\square$

Esercizio 14.2. *Determinare la forma canonica delle seguente quadriche. Se si tratta di una quadrica a centro determinarne il centro e gli assi di simmetria.*

a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$
b) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$
d) $5x^2 - y^2 + 8xy + 5z^2 - 5z - 2 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo la quadrica $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = -\dfrac{1}{2} \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.
– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione:

$$p_A(\lambda) = \lambda\,(2-\lambda)(\lambda - 2)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 0$. Poiché A ha un autovalore nullo si tratta di un paraboloide; inoltre gli autovalori non nulli sono concordi, quindi si tratta di un paraboloide ellittico.
– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 - z = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2tz = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2tz = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-4t^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$2x^2 + 2y^2 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}y^2 - z = 0$$

b) Consideriamo la quadrica $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = -8 \cdot 128 \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.

– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione:

$$p_A(\lambda) = (8 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 8$, doppio, e $\lambda = 2$. Poiché A ha 3 autovalori concordi si tratta di un ellissoide. Per stabilire se è reale dobbiamo trovare la forma canonica.

– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 8y^2 + 2z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$64 \cdot 2t = -8 \cdot 128 \quad \Rightarrow \quad t = -8$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$8x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un ellissoide reale.
Poichè è una conica a centro possiamo determinare centro e assi.
Il centro è dato dalla soluzione del sistema $A| - h$:

$$\begin{cases} 5x + 3z = 0 \\ 8y = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,0)$$

Per trovare gli assi dobbiamo prima determinare gli autospazi:

$$E(8) = N(A - 8I): \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle (1,0,1),\ (0,1,0) \rangle$$

$$E(2) = N(A - 2I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle (1,0,-1) \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad a_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_3: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

c) Consideriamo la quadrica $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = 12 \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.
– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione. Notiamo che A è diagonale, quindi non è necessario effettuare la rotazione. Inoltre gli autovalori di A sono gli elementi della diagonale: $\lambda = 1$, doppio, e $\lambda = -2$. Poiché A ha autovalori disconcordi si tratta di un iperboloide. Per stabilire se è a una o a due falde dobbiamo ricavare la forma canonica.

– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-2t = 12 \quad \Rightarrow \quad t = -6$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{3}z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un iperboloide iperbolico, o a una falda.

Poichè è una conica a centro possiamo determinare centro e assi.

Il centro è dato dalla soluzione del sistema $A| - h$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0, 0)$$

Per trovare gli assi dobbiamo prima determinare gli autospazi:

$$E(1) = N(A - I) : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(1) = \langle (1, 0, 0), \ (0, 1, 0) \rangle$$

$$E(-2) = N(A + 2I) : \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(-2) = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

In realtà, non avendo effettuato alcuna rotazione, sapevamo già che gli autovettori sono i vettori della base canonica.

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

d) Consideriamo la quadrica $5x^2 - y^2 + 8xy + 5z^2 - 5z - 2 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = \dfrac{21 \cdot 65}{4} \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.

– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione:

$$p_A(\lambda) = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 5$,$\lambda = 7$ e $\lambda = -3$. Poiché A ha autovalori disconcordi si tratta di un iperboloide. Per stabilire se è a una o a due falde dobbiamo trovare la forma canonica.

– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 7y^2 - 3z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-105t = \frac{21 \cdot 65}{4} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{13}{4}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 7y^2 - 3z^2 + \frac{13}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{13}x^2 + \frac{28}{13}y^2 - \frac{12}{13}z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$-\frac{20}{13}x^2 - \frac{28}{13}y^2 + \frac{12}{13}z^2 - 1 = 0$$

Effettuando infine la rotazione che lascia fisso y, manda x in z e z in $-x$ otteniamo:

$$\frac{12}{13}x^2 - \frac{28}{13}y^2 - \frac{20}{13}z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un iperboloide ellittico, o a due falde.
Poichè è una conica a centro possiamo determinare centro e assi.
Il centro è dato dalla soluzione del sistema $A| - h$:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 5z = \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Per trovare gli assi dobbiamo prima determinare gli autospazi:

$$E(5) = N(A - 5I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow \; E(5) = \langle (0, 0, 1) \rangle$

$$E(7) = N(A - 7I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; E(7) = \langle (2, 1, 0) \rangle$

$$E(-3) = N(A + 3I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; E(-3) = \langle (1, -2, 0) \rangle$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} + t \end{cases} \qquad a_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad a_3: \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

□

Esercizio 14.3. *Determinare la forma canonica delle seguenti quadriche, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

a) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$
b) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

SOLUZIONE:

a) Consideriamo la conica $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -11 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -12 & -11 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A' (che ci servirà per trovare la forma canonica):

$$\det(A') = 5(-15)(44-144) + 5(-5)(44-144) = 10000$$

Quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = 5(44-144) \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{ellissoide o iperboloide.}$$

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$p_A(\lambda) = (5-\lambda)\left[(-4-\lambda)(-11-\lambda) - 144\right] = (5-\lambda)\left[\lambda^2 - 15\lambda - 100\right]$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -20 \quad \Rightarrow \text{discordi} \quad \Rightarrow \text{iperboloide}$$

Sappiamo che la forma canonica della quadrica è del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 5y^2 - 20z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-500t = 10000 \quad \Rightarrow \quad t = -20$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5X^2 + 5Y^2 - 20Z^2 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - Z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un iperboloide iperbolico, o a una falda.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & -4 & -12 & | & 0 \\ 0 & -12 & -11 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/4II \\ III - 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & -1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 25 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C\,(1,\ 0,\ 0)$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autospazi:

$$E(5) = \mathrm{N}(A - 5I): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -12 \\ 0 & -12 & -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/3II \\ -1/4III \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4s \\ z = -3s \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(5) = \left\langle (1,0,0),\ \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \right\rangle$$

$$E(-20) = \mathrm{N}(A + 20I): \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -12 \\ 0 & -12 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/4II \\ 1/3III + 1/4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(-20) = \left\langle \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle$$

La matrice di rotazione ortonormale speciale è

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Le rototraslazioni per passare dalla forma iniziale a quella canonica e viceversa sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+1 \\ \frac{1}{5}(4Y+3Z) \\ \frac{1}{5}(-3Y+4Z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R^T \cdot \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ \frac{1}{5}(4y-3z) \\ \frac{1}{5}(3y-4z) \end{bmatrix}$$

---

b) Consideriamo la quadrica $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A' (che ci servirà per trovare la forma canonica):

$$\det(A') = 2 \cdot [3(-13) - (-3) + (-4)] = -80$$

quindi $I_4 \neq 0$ e si tratta di una quadrica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = 2 \cdot 8 = -16 \qquad \Rightarrow \text{ ellissoide o iperboloide}$$

Calcoliamo gli autovalori di A

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ ellissoide (reale)}$$

Possiamo ora ricavare la forma canonica. Sappiamo infatti che la forma canonica della quadrica è del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-16t = 80 \quad \Rightarrow \quad t = -5$$

Infine la forma canonica è:

$$2X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}X^2 + \frac{2}{5}Y^2 + \frac{4}{5}Z^2 - 1 = 0$$

Si tratta in effetti di ellissoide reale.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autospazi:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

$$E(4) = \mathrm{N}(A - 4I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

La matrice di rotazione ortonormale speciale è

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Le rototraslazioni per passare dalla forma iniziale a quella canonica e viceversa sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z) - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y+Z) + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R^T \cdot \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z + 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z) \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 14.4. *Determinare la forma canonica della seguente quadrica, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$$

Soluzione:

Consideriamo l'equazione $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che $\det(A') \neq 0$ e $\mathrm{rg}(A) = 2$, quindi si tratta di un paraboloide.

Per determinare la forma canonica dobbiamo effettuare le due operazioni di ROTAZIONE e TRASLAZIONE.

- ROTAZIONE.

  Dobbiamo determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 0$$

Calcoliamo ora l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -s \end{cases}$$

$$E(2) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,-1)\ \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$E(0) = \langle\ (0,1,1)\ \rangle$$

Notiamo che i vettori presi come generatori degli autospazi sono già tra loro ortogonali, quindi per ottenere una base ortonormale è sufficienti renderli di norma 1:

$$E(2) = \langle\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \rangle$$

$$E(0) = \langle\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \rangle$$

La matrice R di cambiamento di base, di determinante 1, ovvero la matrice di rotazione, è la matrice che ha tali vettori come colonne:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Introducendo delle nuove coordinate X, Y e Z si ha che

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Da quest'ultimo cambio di coordinate otteniamo:

$$\begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y+Z) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z) \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z) \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione della quadrica e semplificando otteniamo l'equazione:

$$2X^2 + 2Y^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 1 = 0$$

- TRASLAZIONE. Dobbiamo ora effettuare la traslazione. Completiamo i quadrati:

$$2X^2 + 2\left(Y^2 - \frac{7}{2\sqrt{2}}Y\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 1 = 0$$

$$2X^2 + 2\left(Y^2 - \frac{7}{2\sqrt{2}}Y - \left(\frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 1 - \frac{49}{16} = 0$$

$$2X^2 + 2\left(Y - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{33}{16} = 0$$

$$2X^2 + 2\left(Y - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z - \frac{33\sqrt{2}}{16}\right) = 0$$

Infine il cambiamento di coordinate è

$$\begin{cases} x' = X \\ y' = Y - \frac{7}{4\sqrt{2}} \\ z' = Z - \frac{33\sqrt{2}}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - z - \frac{7}{6}\right) \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + z - \frac{33}{8}\right) \end{cases}$$

L'equazione della quadrica (parabolide ellittico) diventa quindi:

$$2x'^2 + 2y'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z' = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}x'^2 + 2\sqrt{2}y'^2 - z' = 0$$

Notiamo che il cambio inverso di coordinate è

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z') + \frac{47}{16} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y' + z') + \frac{19}{16} \end{cases}$$

□

Esercizio 14.5. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \quad 3x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy - 4z = 0.$$

a) *Stabilire se $\mathcal{Q}$ é degenere o meno, e di quale tipo di quadrica si tratti. Se é una quadrica a centro determinare le coordinate del centro.*
a) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{Q}$ e determinare coordinate omogenee dei punti all'infinito degli assi di simmetria.*

Soluzione:

a) Consideriamo le matrici associate alla quadrica:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Riducendo A' a gradini otteniamo:

$$\begin{array}{c} \\ 3II + I \\ \\ IV - 2III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A') = 4$ e $\text{rg}(A) = 3$, e si tratta di una quadrica non degenere a centro.

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare gli autovalori di A.

$$p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ iperboloide}$$

Notiamo inoltre che $\det(A') = -8 < 0$, quindi si tratta di iperboloide a 2 falde o ellittico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a $A| - h$ e considerando la matrice giá ridotta

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 8 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 0, -2)$$

b) Gli assi della quadrica sono le rette per il centro con direzione data dagli autovettori della matrice A.

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle\ (0, 0, 1)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1, 1, 0)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle\ (1, -1, 0)\ \rangle$$

Gli assi sono quindi:

$$a_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2 \end{cases} \qquad a_3 = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -2 \end{cases}$$

Inoltre i punti all'infinito degli assi sono:

$$P_1 = (0, 0, 1, 0), \qquad P_2 = (1, 1, 0, 0), \qquad P_3 = (1, -1, 0, 0)$$

□

Esercizio 14.6. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ :\ xz - y^2 - 4z^2 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*

b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*

c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

SOLUZIONE:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Poiché $\det(A') = 0$ la quadrica è degenere. Inoltre $\det(A) = \frac{1}{4} \neq 0$, quindi $\text{rg}(A) = 3$ e si tratta di un cono.

b) Risolviamo il sistema $A| - h$ per determinare il centro della quadrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}z = 0 \\ -y = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,0)$$

Per determinare gli assi dobbiamo prima trovare gli autospazi di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)(-4-\lambda) - \frac{1}{4}(-1-\lambda)$$
$$= (-1-\lambda)\left(4\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = -1, \qquad \lambda = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$$

Inoltre

$$E(-1) = N(A+I): \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2I \\ \\ 2II - I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(-1) = \langle \ (0,1,0) \ \rangle$$

$$E\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right): \begin{bmatrix} \frac{4-\sqrt{17}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-4-\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{17} & 0 \\ 1 & 0 & -4-\sqrt{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (4-\sqrt{17})III - I \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (\sqrt{17}-4)t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right) = \langle \ (1, \ 0, \ \sqrt{17}-4) \ \rangle$$

$$E\left(\frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) : \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{17}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-4+\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 2I \\ 2II \\ 2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2+\sqrt{17} & 0 \\ 1 & 0 & -4+\sqrt{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (4+\sqrt{17})III - I \begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2+\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (-\sqrt{17}-4)t \end{cases} \quad \Rightarrow E\left(\frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) = \langle\ (1,\ 0,\ -\sqrt{17}-4)\ \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (\sqrt{17}-4)t \end{cases} \qquad a_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (-\sqrt{17}-4)t \end{cases}$$

c) Intersechiamo $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$, ottenendo la conica $-4z^2 + xz - 1 = 0$. La matrice B' associata a tale conica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(B') \neq 0$ è una conica non degenere. Inoltre

$$p_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - \frac{1}{4}$$

Quindi B ha autovalori

$$\lambda = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$$

discordi e si tratta di un'iperbole.

$\square$

Esercizio 14.7. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}\ :\ x^2 - 2y^2 + yz = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*
c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $x = 0$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Poiché $\det(A') = 0$ la quadrica è degenere. Inoltre $\det(A) = -\frac{1}{4} \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e si tratta di un cono.
b) Risolviamo il sistema $A| - h$ per determinare il centro della quadrica

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow C(0,0,0)$$

Per determinare gli assi dobbiamo prima trovare gli autospazi di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left[-\lambda(-2-\lambda) - \frac{1}{4}\right] = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-2-\sqrt{5}}{2}$$

Inoltre

$$E(1) = N(A-I): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-2+\sqrt{5}}{2}I\right): \begin{bmatrix} \frac{4-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (2+\sqrt{5})III + II \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2+\sqrt{5})t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right) = \langle\ (0,\ 1,\ 2+\sqrt{5})\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-2-\sqrt{5}}{2}I\right): \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2+\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (2-\sqrt{5})III + II \end{array} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2-\sqrt{5})t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right) == \langle\ (0,\ 1,\ 2-\sqrt{5})\ \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2+\sqrt{5})t \end{cases} \qquad a_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2-\sqrt{5})t \end{cases}$$

c) Intersechiamo $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $x = 0$, ottenendo la conica $-2y^2 + yz = 0$. Anche senza determinare la matrice associata a tale conica è immediato verificare che è una conica degenere che si spezza nelle due rette $y = 0$ e $-2y + z = 0$, ovvero nelle rette di $\mathbf{R}^3$

$$r_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel centro C della quadrica.

□

Esercizio 14.8. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}\ :\ x^2 + z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z + 2y + 4 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica.*

b) *Studiare la conica che si ottiene intersecando la quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ (tipo, forma canonica,...).*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che A' ha due righe uguali, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una quadrica degenere. Calcoliamo il rango di A':

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - I \\ IV - \sqrt{2}I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

quindi $\text{rg}(A') = 3$ e si tratta di una quadrica degenere irriducibile. Inoltre $\det(A) = 0$, quindi si tratta di un cilindro.

Per stabilire il tipo di cilindro dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(1-\lambda)$$

Quindi A ha autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ e

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$$

Si tratta infine di un cilindro parabolico.

b) Intersecando la quadrica con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C} \ : \ x^2 + 2\sqrt{2}x + 2y + 4 = 0$$

Notiamo che l'equazione può essere riscritta nella forma (nota dalle superiori)

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x - 2$$

Si tratta quindi di una parabola con asse verticale di vertice $V(-\sqrt{2}, -1)$ e asse $x = -\sqrt{2}$.

In alternativa per calcolare asse e vertice possiamo studiare (complicando un po' le cose) le matrici associate alla conica.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(A') = -1 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere. Inoltre $\det(A) = 0$ quindi si tratta di una parabola. Per calcolare asse e vertice dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 0, 1$. L'asse ha direzione parallela all'autovalore relativo a $\lambda = 0$. Calcoliamo quindi $E(0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(0) = \langle (0,1) \rangle$$

La direzione ortogonale all'asse è quindi $(1, 0)$ e una retta ortogonale all'asse è

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ y = 0$$

Calcoliamo i punti D e E di intersezione di tale retta con la parabola e quindi il loro punto medio M:

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}$$

Quindi $x_M = -\sqrt{2}$ e $y_M = 0$. L'asse è quindi la retta di direzione $(0,1)$ passante per M:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{2}$$

Infine il vertice è dato dall'intersezione tra asse e parabola: $V(-\sqrt{2}, -1)$.

Sappiamo che la forma canonica di una parabola è del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo $\lambda_1 x^2 + 2ty = 0$. Sapendo che $\lambda_1 = 1$ la matrice associata a tale equazione è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \pm 1$. Infine la forma canonica è $x^2 - 2y = 0$.

□

Esercizio 14.9. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \; : \; (1+2k)x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1+2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} & -1-k \end{bmatrix}$$

a,b) $\mathcal{Q}$ è un paraboliode se è non degenere e $\det(A) = 0$. Cominciamo a calcolare il determinante di A:

$$\det(A) = (1+2k) \cdot (1-k^2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}, \; 1, \; -1$$

Consideriamo i tre casi

- Se $k = -\dfrac{1}{2}$ una riga di A' si annulla, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una conica degenere.
- Se $k = 1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = -\frac{1}{2}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = 3, \; 2$. Poiché sono concordi si tratta di un paraboloide ellittico.

- Se $k = -1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = \frac{1}{4}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = -1, \; 2$. Poiché sono discordi si tratta di un paraboloide iperbolico.

c) Intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ (1+2k)x^2 + y^2 = 1 + k$$

Consideriamo ora i due valori di k trovati ai punti precedenti.

– Se $k = 1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ 3x^2 + y^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$$

In questo caso otteniamo quindi un'ellisse.

– Se $k = -1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ -x^2 + y^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (-x+y)(x+y) = 0$$

Si tratta quindi di una conica degenere data dalle due rette

$$r_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad r_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 14.10. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ x^2 + (1+2k)y^2 + z^2 + 2kxz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1+2k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} & -1-k \end{bmatrix}$$

a,b) $\mathcal{Q}$ è un paraboliode se è non degenere e $\det(A) = 0$. Cominciamo a calcolare il determinante di A:

$$\det(A) = (1+2k) \cdot \left[1 - k^2\right] = 0 \qquad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}, \ -1, \ 1$$

Consideriamo i tre casi

– Se $k = -\frac{1}{2}$ una riga di A' si annulla, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una conica degenere.

– Se $k = 1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = -\frac{3}{4}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = 3, \ 2$. Poiché sono concordi si tratta di un paraboloide ellittico.

– Se $k = -1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = \frac{1}{4}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = -1, \ 2$. Poiché sono discordi si tratta di un paraboloide iperbolico.

c) Intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ x^2 + (1+2k)y^2 = 1 + k$$

Consideriamo ora i due valori di k trovati ai punti precedenti.

– Se $k = -1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)(x+y) = 0$$

Si tratta quindi di una conica degenere data dalle due rette

$$r_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad r_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

– Se $k = 1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ x^2 + 3y^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 1 = 0$$

In questo caso otteniamo quindi un'ellisse.

$\square$