

Coordinate omogenee e proiezioni

Esercizio 15.1. Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione della retta r passante per i punti $A(2, 3)$ e $B(-1, 0)$ e della retta s passante per A e di direzione $\vec{v}(1, 2)$. Determinare inoltre il punto improprio di r e s .

Esercizio 15.2. Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione del piano π_1 passante per i punti $A(2, 3, 0)$, $B(3, 1, -1)$ e $C(0, 0, 1)$ e del piano π_2 passante per A e B e parallelo alla retta $x + y = x - z = 0$.

Esercizio 15.3. Stabilire se il piano di coordinate omogenee $N = (1, -2, 0, -3)$ passa per il punto $P(1, -1, 2)$.

Esercizio 15.4. Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per i punti $A(1, 2, -5)$ e $B(-1, 0, 3)$, e trovarne il punto all'infinito.

Esercizio 15.5. Si consideri la proiezione centrale T sul piano $x + y = 1$ dal centro $C(1, 2, -1)$. Dopo avere determinato la matrice di T , stabilire in cosa vengono trasformati i punti $A(1, 5, 0)$ e $B(1, 0, 0)$.

Esercizio 15.6. Determinare la matrice della proiezione parallela T sul piano $x - y + 2z = 0$ di direzione $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Dopo avere determinato la matrice di T , stabilire in cosa viene trasformata la retta $r : x + y = z = 0$.

Esercizio 15.7. Sia π il piano di equazione $x + 2y - z = 0$ e C il punto di coordinate $(0, 1, -1)$.

- Si determini la matrice della proiezione dal centro C sul piano di vista π .
- Si trovino equazioni delle proiezioni delle rette

$$r : x + y = x + z - 1 = 0 \qquad s : x = y = z + 1$$

Esercizio 15.8. Sia π il piano di equazione $3x - y + z = 1$ e \vec{v} il vettore $(1, 1, 1)$.

- Si determini la matrice della proiezione parallela nella direzione di \vec{v} sul piano di vista π .
- Stabilire se si tratta di una proiezione ortogonale o obliqua.

Esercizio 15.9. Siano $M = (1, 1, 1)$, $N = (3, 2, 1)$, $L = (1, 2, 2)$ punti dello spazio \mathbf{R}^3 . Sia $C = (-1, 0, 1)$.

- Si calcoli l'area del triangolo MNL .
- Si determini l'insieme $M'N'L'$ che si ottiene proiettando il triangolo MNL dal centro C sul piano $x + y = 0$.
- Si calcoli l'area del triangolo $M'N'L'$.

Esercizio 15.10. Sia r la retta dello spazio di equazioni cartesiane $r : 2x - y + 1 = x - z = 0$.

- Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r' ottenuta proiettando r sul piano $x + y + z = 0$ dal centro $C = (2, 1, 1)$.
- Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta r' e stabilire se r e r' sono parallele.

Esercizio 15.11. Sia π il piano dello spazio di equazione cartesiana

$$\pi : x - y + z + 1 = 0.$$

- Si calcoli la matrice della proiezione sul piano π dal centro di proiezione $C = (1, 1, 1)$.
- Si calcoli il punto improprio P_∞ della retta $r : x - y = z = 0$ e la proiezione di P_∞ sul piano π (dal centro C). Cosa si può dire della posizione reciproca di r e π ?

1. Suggerimenti

- **Proiezioni.** Un piano $ax+by+cz+d=0$ ha coordinate omogenee $N(a, b, c, d)$. Un punto $P(a, b, c)$ ha coordinate omogenee $P(a, b, c, 1)$. Un direzione $\vec{v}(a, b, c)$ corrisponde al punto improprio $P_\infty(a, b, c, 0)$.

La matrice della proiezione T su un piano π da un punto P o di direzione \vec{v} si ottiene nel seguente modo. Indicate con N le coordinate omogenee del piano e con C le coordinate omogenee del centro o della direzione della proiezione si ha

$$M = N^t C - (NC)I_4 \quad \Rightarrow \quad T(A) = AM$$

2. Soluzioni

Esercizio 15.1. Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione della retta r passante per i punti $A(2, 3)$ e $B(-1, 0)$ e della retta s passante per A e di direzione $\vec{v}(1, 2)$. Determinare inoltre il punto improprio di r e s .

SOLUZIONE:

Consideriamo la retta r . I punti A e B hanno coordinate omogenee $A(2, 3, 1)$ e $B(-1, 0, 1)$, quindi r ha equazione

$$r : \det \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3X - 3Y + 3Z = 0 \quad \Rightarrow \quad r : X - Y + Z = 0$$

Un'equazione cartesiana di r è quindi $x - y + 1 = 0$. Per trovare il punto improprio di r la cosa più semplice è porre $Z = 0$ nell'equazione omogenea ottenendo $X = Y$. Di conseguenza il punto improprio è $P_\infty(1, 1, 0)$. Notiamo che il punto improprio corrisponde alla direzione $\vec{v}(1, 1)$ della retta.

Consideriamo la retta s . La direzione \vec{v} corrisponde al punto improprio $P_\infty(1, 2, 0)$. Utilizzando la stessa formula precedente otteniamo

$$s : \det \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad s : -2X + Y + Z = 0$$

Un'equazione cartesiana di s è quindi $-2x + y + 1 = 0$. In questo caso abbiamo già determinato il punto improprio $P_\infty(1, 2, 0)$. In ogni caso per determinarlo, come nel caso precedente era sufficiente porre $Z = 0$ nell'equazione omogenea ottenendo $Y = 2X$. Di conseguenza il punto improprio è $P_\infty(1, 2, 0)$. □

Esercizio 15.2. Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione del piano π_1 passante per i punti $A(2, 3, 0)$, $B(3, 1, -1)$ e $C(0, 0, 1)$ e del piano π_2 passante per A e B e parallelo alla retta $x + y = x - z = 0$.

SOLUZIONE:

I punti A , B e C hanno coordinate omogenee $A(2, 3, 0, 1)$, $B(3, 1, -1, 1)$ e $C(0, 0, 1, 1)$, quindi π ha equazione

$$\pi_1 : \det \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 : -5X + Y - 7Z + 7W = 0$$

Un'equazione cartesiana di π_1 è quindi $5x - y + 7z - 7 = 0$.

La retta $x + y = x - z = 0$ ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi ha direzione $\vec{v}(1, -1, 1)$ a cui corrisponde il punto improprio $P_\infty(1, -1, 1, 0)$. Utilizzando la formula precedente si ottiene:

$$\pi_2 : \det \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 : -3X - 2Y + Z + 12W = 0$$

Un'equazione cartesiana di π_2 è quindi $3x + 2y - z = 12$.

Notiamo che per semplificare i conti nel calcolo del determinante è possibile effettuare alcune operazioni di riduzione sulla matrice in modo da ottenere alcuni termini nulli. Le operazioni di riduzione non alterano infatti il rango della matrice, quindi se A' è la matrice ridotta, si ha $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$. Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Ora, imponendo $\det(A') = 0$ si ottiene la medesima equazione $\pi_2 : -3X - 2Y + Z + 12W = 0$. □

Esercizio 15.3. Stabilire se il piano di coordinate omogenee $N = (1, -2, 0, -3)$ passa per il punto $P(1, -1, 2)$.

SOLUZIONE:

Il piano di coordinate omogenee $N = (1, -2, 0, -3)$ è il piano $X - 2Y - 3W = 0$, cioè $x - 2y - 3 = 0$. Il punto P appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione. Poichè $1 - 2(-1) - 3 = 0$ il punto appartiene al piano.

In alternativa si potevano calcolare le coordinate omogenee di $P(1, -1, 2, 1)$ e P appartiene al piano se $N \cdot P = 0$. Infatti $N \cdot P = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = 0$. □

Esercizio 15.4. Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per i punti $A(1, 2, -5)$ e $B(-1, 0, 3)$, e trovarne il punto all'infinito.

SOLUZIONE:

La retta r ha direzione $AB = (-2, -2, 8)$ cioè $\vec{v} = (1, 1, -4)$. Un'equazione parametrica di r è

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il punto improprio di r corrisponde alla sua direzione ed è $P_\infty(1, 1, -4, 0)$.

In alternativa si potevano utilizzare la coordinate omogenee $A(1, 2, -5, 1)$ e $B(-1, 0, 3, 1)$ dei suoi due punti. r è data dall'insieme dei punti $\alpha A + \beta B$ al variare di α e β in \mathbf{R} :

$$r : (\alpha - \beta, 2\alpha, -5\alpha + 3\beta, \alpha + \beta)$$

Il suo punto improprio si ottiene quando $\alpha + \beta = 0$ ed è $(2\alpha, 2\alpha, -8\alpha, 0) = (2, 2, -8, 0) = (1, 1, -4, 0) = P_\infty$. Per ottenere un'equazione parametrica cartesiana basta dividere per $\alpha + \beta$:

$$r : \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{-5\alpha + 3\beta}{\alpha + \beta} \right) \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ y = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \\ z = \frac{-5\alpha + 3\beta}{\alpha + \beta} \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Notiamo che benchè l'equazione ottenuta appaia notevolmente differente è abbastanza facile ricondurci da questa equazione a quella precedente ponendo $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = t$.

□

Una **proiezione centrale** T da un punto C su un piano π di coordinate omogenee N , o una **proiezione parallela** T da un punto improprio C (corrispondente alla direzione della proiezione) su un piano π di coordinate omogenee N ha matrice

$$M = N^t C - (N \cdot C) I_4$$

Inoltre la proiezione T trasforma il generico punto P nel punto $P' = T(P)$, appartenente a π , nel seguente modo:

$$P' = T(P) = P \cdot M$$

Il piano π è detto piano di vista.

Una proiezione parallela è detta ortogonale se ha direzione ortogonale al piano di vista, mentre è detta obliqua in caso contrario.

Esercizio 15.5. Si consideri la proiezione centrale T sul piano $x + y = 1$ dal centro $C(1, 2, -1)$. Dopo avere determinato la matrice di T , stabilire in cosa vengono trasformati i punti $A(1, 5, 0)$ e $B(1, 0, 0)$.

SOLUZIONE:

Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1, 1, 0, -1)$ e C ha coordinate omogenee $C(1, 2, -1, 1)$, quindi

$$N^t C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 2 \quad -1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N \cdot C = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 + (-1) \cdot 1 = 2$$

Quindi

$$M = N^t C - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Passando alle coordinate omogenee, il punto $A(1, 5, 0, 1)$ viene trasformato nel punto

$$A' = T(A) = A \cdot M = [1 \quad 5 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = [3 \quad 0 \quad -5 \quad 3]$$

$$\Rightarrow A' = (3, 0, -5, 3) = \left(1, 0, -\frac{5}{3}, 1\right)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, A è trasformato nel punto $A' \left(1, 0, -\frac{5}{3}\right)$.

Analogamente il punto B di coordinate omogenee $B(1, 0, 0, 1)$ viene trasformato nel punto

$$B' = T(B) = B \cdot M = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0 \quad 0 \quad -2]$$

$$\Rightarrow B' = (-2, 0, 0, -2) = (1, 0, 0, 1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, B è trasformato nel punto $B'(1, 0, 0) = B$. Potevamo osservare dall'inizio che, poiché B appartiene al piano di vista, viene trasformato in se stesso dalla proiezione.

□

Esercizio 15.6. Determinare la matrice della proiezione parallela T sul piano $x - y + 2z = 0$ di direzione $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Dopo avere determinato la matrice di T , stabilire in cosa viene trasformata la retta $r : x + y = z = 0$.

SOLUZIONE:

Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1, -1, 2, 0)$ e la direzione $\vec{v} = (1, 0, -1)$ corrisponde al punto improprio $C = C_\infty(1, 0, -1, 0)$, quindi

$$N^t C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N \cdot C = -1$$

Quindi

$$M = N^t C + I_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La retta r viene proiettata in una retta r' . Per trovare un'equazione di r' la cosa più semplice è forse trovarne due suoi punti. Prendiamo quindi due qualsiasi punti A e B di r e determiniamo i punti A' e B' in cui questi vengono proiettati. La retta r' è la retta passante per A' e B' .

Prendiamo ad esempio i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(1, -1, 0)$ appartenenti a r . Passando alle coordinate omogenee, il punto $A(0, 0, 0, 1)$ viene proiettato nel punto

$$A' = T(A) = A \cdot M = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \Rightarrow A' = (0, 0, 0, 1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, A è proiettato nel punto $A'(0, 0, 0)$. Notiamo che, osservando che A è un punto del piano di vista, potevamo scrivere direttamente $A' = A$.

Analogamente il punto B di coordinate omogenee $B(1, -1, 0, 1)$ viene proiettato nel punto

$$B' = T(B) = B \cdot M = [3 \quad -1 \quad -2 \quad 1] \Rightarrow B' = (3, -1, -2, 1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, B è trasformato nel punto $B'(3, -1, -2)$.

Infine la retta r' in cui è trasformata r è la retta passante per $A'(0, 0, 0)$ e $B'(3, -1, -2)$:

$$r' : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 15.7. Sia π il piano di equazione $x + 2y - z = 0$ e C il punto di coordinate $(0, 1, -1)$.

- Si determini la matrice della proiezione dal centro C sul piano di vista π .
- Si trovino equazioni delle proiezioni delle rette

$$r : x + y = x + z - 1 = 0 \quad s : x = y = z + 1$$

SOLUZIONE:

- Il centro C e il piano π hanno rispettivamente coordinate omogenee $C(0, 1, -1, 1)$ e $N(1, 2, -1, 0)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^t C - (N \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 3I_4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la retta r e siano $A(1, -1, 0)$ e $B(0, 0, 1)$ due suoi punti. Passando alle coordinate omogenee $A(1, -1, 0, 1)$ e $B(0, 0, 1, 1)$ vengono proiettati nei punti

$$A' = A \cdot M = (-3, 2, 1, -4) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right) \Rightarrow A' = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$B' = B \cdot M = (0, -1, -2, -4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow B' = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi la retta r è proiettata nella retta r' passante per A' e B' :

$$r' : \begin{cases} x = -t \\ y = \frac{1}{4} + t \\ z = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Analogamente consideriamo i punti $P(1, 1, 0)$ e $Q(2, 2, 1)$ di s . Passando alle coordinate omogenee $P(1, 1, 0, 1)$ e $Q(2, 2, 1, 1)$ vengono proiettati nei punti

$$P' = P \cdot M = (-3, 0, -3, 0)$$

Notiamo che P' è un punto improprio e corrisponde alla direzione $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Inoltre

$$Q' = Q \cdot M = (-6, -1, -8, 2) = \left(-3, -\frac{1}{2}, -4, 1\right) \Rightarrow Q' = \left(-3, -\frac{1}{2}, -4\right)$$

Quindi la retta s è proiettata nella retta s' passante per Q' e di direzione $(1, 0, 1)$:

$$s' : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -4 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 15.8. Sia π il piano di equazione $3x - y + z = 1$ e \vec{v} il vettore $(1, 1, 1)$.

- Si determini la matrice della proiezione parallela nella direzione di \vec{v} sul piano di vista π .
- Stabilire se si tratta di una proiezione ortogonale o obliqua.

SOLUZIONE:

- π ha coordinate omogenee $N(3, -1, 1, -1)$ e la direzione \vec{v} corrisponde al punto improprio $C(1, 1, 1, 0)$. Di conseguenza la matrice della proiezione è

$$M = N^t C - (N \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 3I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

- La direzione ortogonale a π è $(3, -1, 1)$ (Notiamo che è il vettore corrispondente alle prime tre componenti delle coordinate omogenee N di π); la proiezione è parallela a $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Poiché i vettori $(3, -1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ non sono proporzionali rappresentano direzioni differenti e si tratta quindi di una proiezione obliqua. (Ricordiamo che una proiezione ortogonale è una proiezione parallela di direzione ortogonale al piano di vista).

□

Esercizio 15.9. Siano $M = (1, 1, 1)$, $N = (3, 2, 1)$, $L = (1, 2, 2)$ punti dello spazio \mathbf{R}^3 . Sia $C = (-1, 0, 1)$.

- Si calcoli l'area del triangolo MNL .
- Si determini l'insieme $M'N'L'$ che si ottiene proiettando il triangolo MNL dal centro C sul piano $x + y = 0$.
- Si calcoli l'area del triangolo $M'N'L'$.

SOLUZIONE:

- L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati \overrightarrow{MN} e \overrightarrow{LN} , dove

$$u = \overrightarrow{MN} = (2, 1, 0), \quad v = \overrightarrow{LN} = (2, 0, -1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1, 2, -2)$$

Infine

$$\text{Area}(\text{triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1, 2, -2)| = \frac{3}{2}$$

In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:

$$pr_v(u) = \frac{(u, v)}{(v, v)} v = \frac{4}{5}(2, 0, -1)$$

Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v . Quindi

$$\text{Area}(\text{triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2, 0, -1)| \cdot \left| \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1, 1, 0, 0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1, 0, 1, 1)$. La matrice di proiezione è quindi

$$A = P^T C - (P \cdot C) I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} M' &= M \cdot A = (-1, 1, 3, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right) \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \\ N' &= N \cdot A = (-2, 2, 6, 6) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right) \Rightarrow N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \\ L' &= L \cdot A = (-2, 2, 5, 4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right) \Rightarrow L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

Infine il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare le coordinate omogenee e la matrice di proiezione A . Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta

$$CM : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x + y = 0$:

$$M' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ 1 + 2t + 1 + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

Analogamente si potevano ottenere gli altri punti. Questo procedimento è naturalmente più lungo.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

□

Esercizio 15.10. Sia r la retta dello spazio di equazioni cartesiane $r : 2x - y + 1 = x - z = 0$.

- Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r' ottenuta proiettando r sul piano $x + y + z = 0$ dal centro $C = (2, 1, 1)$.
- Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta r' e stabilire se r e r' sono parallele.

SOLUZIONE:

La retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1, 1, 1, 0)$ e C ha coordinate omogenee $C(2, 1, 1, 1)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^t C - (N \cdot C)I_4 = N^t C - 4I_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo due qualsiasi punti di r , in coordinate omogenee, per esempio $A = (0, 1, 0, 1)$ e $P_\infty = (1, 2, 1, 0)$, e calcoliamone la proiezione:

$$\begin{aligned} A' &= A \cdot M = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = [2 \quad -3 \quad 1 \quad -3] \\ \Rightarrow A' &= (2, -3, 1, -3) = \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow A' \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right) \\ P'_\infty &= P_\infty \cdot M = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = [4 \quad -4 \quad 0 \quad 4] \\ \Rightarrow P'_\infty &= (4, -4, 0, 4) = (1, -1, 0, 1) \Rightarrow P'_\infty = (1, -1, 0) \end{aligned}$$

Infine la retta r' è la retta passante per A' e P'_∞ :

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -1 - 6t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x - 5z - 1 = y + 6z + 1 = 0$$

- b) La retta r' ha direzione $(5, -6, 1)$, quindi punto all'infinito $P_\infty = (5, -6, 1, 0)$. r e r' non sono parallele perchè le rispettive direzioni non sono proporzionali, ovvero non hanno lo stesso punto all'infinito. □

Esercizio 15.11. Sia π il piano dello spazio di equazione cartesiana

$$\pi : x - y + z + 1 = 0.$$

- a) Si calcoli la matrice della proiezione sul piano π dal centro di proiezione $C = (1, 1, 1)$.
 b) Si calcoli il punto improprio P_∞ della retta $r : x - y = z = 0$ e la proiezione di P_∞ sul piano π (dal centro C). Cosa si può dire della posizione reciproca di r e π ?

SOLUZIONE:

- a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1, -1, 1, 1)$ e C ha coordinate omogenee $C(1, 1, 1, 1)$, quindi

$$N^t C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N \cdot C = 1 - 1 + 1 + 1 = 2$$

Quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^t C - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- b) La retta r ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi il suo punto improprio è $P_\infty = (1, 1, 0, 0)$ che viene proiettato nel punto

$$P' = P_\infty \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow P' = (-2, -2, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$$

Notiamo che P_∞ è trasformato in se stesso, infatti r e π sono tra loro ortogonali.

□