CAPITOLO 3

Gruppi, spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 3.1. *Dimostrare che l'insieme*

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R},\ a, b \neq 0 \right\}$$

forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.

Esercizio 3.2. *Sia* $\mathbf{R}[x]$ *l'insieme dei polinomi a coefficienti in* $\mathbf{R}$.

- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *non è un gruppo rispetto al prodotto di polinomi.*

Esercizio 3.3. *L'insieme*

$$S = \left\{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$*? Perchè?*

Esercizio 3.4. *Ripetere lesercizio precedente con l'insieme*

$$S = \left\{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

Esercizio 3.5. *Verificare che l'insieme delle matrici* 2×2 *a coefficienti in* $\mathbf{R}$ *è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 3.6. *Verificare che l'insieme* $\mathbf{R}_n[x]$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathbf{R}[x]$.

Esercizio 3.7. *Sia* S *l'insieme delle matrici* 3×3 *triangolari superiori:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R},\ i, j = 1, 2, 3 \right\}$$

Verificare che S *è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici* 3×3.

Esercizio 3.8. *Sia* G *l'insieme di polinomi*

$$G = \left\{ ax^2 + a \mid a \in \mathbf{Z} \text{ intero relativo } \right\}$$

a) *Mostrare che* G *è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
b) *Dire se* G *è un sottospazio vettoriale dello spazio* $\mathbf{R}[x]$*, motivando la risposta.*

Esercizio 3.9. *Si consideri il seguente insieme*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Si verifichi che* I *è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di* I *anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di* I.
b) *L'insieme* I *forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?*
c) *Verificare che* I *non forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.*
d) *L'insieme*

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{N} \right\}$$

forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?

---

1. Suggerimenti

- **Gruppo.** Un insieme G forma un gruppo rispetto a una sua operazione $\circ$ se
  (1) L'operazione gode della proprietà associativa,
  (2) G è chiuso rispetto a $\circ$, ovvero
  $$x \circ y \in G \qquad \forall x, y \in G,$$
  (3) Esiste l'elemento neutro e, tale che:
  $$x \circ e = e \circ x = x \qquad \forall x \in G,$$
  (4) Esiste l'inverso (o opposto) di ogni elemento:
  $$\forall x \in G, \ \exists\, x^{-1} \in G \quad \text{t.c.} \quad x \circ x^{-1} = e.$$
  In notazione additiva:
  $$\forall x \in G, \ \exists\, -x \in G \quad \text{t.c.} \quad x \circ (-x) = e.$$
- **Spazio vettoriale**. Uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di due operazioni: la somma interna e il prodotto per scalari, e che gode delle seguenti proprietà:
  (1) V è gruppo commutativo rispetto alla somma, quindi
    - V é chiuso rispetto alla somma.
    - L'elemento neutro 0 appartiene a V.
    - Esiste l'opposto $-v$ di ogni elemento $v \in V$.
    - La somma é commutativa.

  (2) Il prodotto per scalari gode delle seguenti proprietà:
    - $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$ qualsiasi $k_i \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u \in V$,
    - $k(u + v) = ku + kv$ qualsiasi $k \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u, v \in V$,
    - $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ qualsiasi $k_i \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u \in V$
    - $1u = u$ qualsiasi $u \in V$.
- **Sottospazio vettoriale**. Un sottinsieme S di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale se in S valgono le seguenti proprietá
  (1) Se $u, v \in S$, allora $u + v \in S$.
  (2) Se $u \in S$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda u \in S$.
  Notiamo che S é un spazio vettoriale e le proprietá precedenti, unite a quelle ereditate da V, implicano tutte le proprietá di spazio vettoriale. In particolare S contiene lo 0 e l'opposto di ogni suo elemento.

---

2. Soluzioni

Esercizio 3.1. *Dimostrare che l'insieme*
$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}, \ a, b \neq 0 \right\}$$
forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.

Soluzione:

Consideriamo il nostro insieme G e verifichiamo che gode delle proprietá di gruppo:

(1) Il prodotto tra elementi di G gode della proprietà associativa perchè in generale il prodotto tra matrici è associativo.

(2) Per dimostrare la chiusura consideriamo due generici elementi A_1 e A_2 di G e verifichiamo che il loro prodotto è ancora un elemento di G:
$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$
Notiamo che, essendo $a_i \neq 0$ e $b_i \neq 0$, anche $a_1a_2 \neq 0$ e $b_1b_2 \neq 0$. Di conseguenza $A_1A_2 \in G$.

(3) L'elemento
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
che è in generale elemento neutro per il prodotto tra matrici, appartiene a G.

(4) Verifichiamo che qualsiasi sia l'elemento A di G esiste il suo inverso in G. Come suggerisce il punto 2, verifichiamo che
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = I$$
Inoltre, poichè $a, b \neq 0$ ha senso definire $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$. Infine l'elemento
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$
appartiene a G.

□

Esercizio 3.2. *Sia* $\mathbf{R}[x]$ *l'insieme dei polinomi (in una variabile) a coefficienti in* $\mathbf{R}$.
- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *non è un gruppo rispetto al prodotto di polinomi.*

Soluzione:

- Consideriamo l'insieme $\mathbf{R}[x]$ con la somma.
  (1) La somma di polinomi gode della proprietà associativa.
  (2) La somma di due polinomi è ancora un polinomio.
  (3) Esiste l'elemento $0 \in \mathbf{R}[x]$, cioè il polinomio con tutti coefficienti nulli, tale che:
  $$p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x) \qquad\qquad \forall\ p(x) \ \in \ \mathbf{R}[x]$$
  (4) Qualsiasi sia
  $$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \ \in \ \mathbf{R}[x]$$
  esiste l'elemento
  $$q(x) = -a_0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n \ \in \ \mathbf{R}[x]$$
  tale che $p(x) + q(x) = 0$
- Consideriamo l'insieme $\mathbf{R}[x]$ con il prodotto. E' sufficiente dimostrare che non verifica una delle proprietà dei gruppi. Notiamo che l'elemento neutro rispetto al prodotto è $p(x) = 1$, e che , per esempio, l'elemento $f(x) = x$ non ammette inverso. Infatti, non esiste $p(x) \ \in \ \mathbf{R}[x]$ tale che
  $$x \cdot p(x) = 1$$

□

Esercizio 3.3. *L'insieme*
$$S = \left\{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ \mid \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$
è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$*? Perchè?*

Soluzione:

Verifichiamo le due proprietà dei sottospazi per il nostro insieme S

(1) Presi $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3) \ \in \ S$ abbiamo che
$$u + v = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$$
e
$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$$
Quindi $u + v \ \in \ S$.

(2) Qualsiasi sia $u = (x_1, x_2, x_3) \ \in \ S$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ abbiamo che
$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$
e
$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$
Quindi $\lambda u \ \in \ S$.

Abbiamo cosí dimostrato che S è sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

□

Esercizio 3.4. *Ripetere lesercizio precedente con l'insieme*

$$S = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

Soluzione:

In questo caso S non è sottospazio di $\mathbf{R}^3$ infatti non gode di nessuna delle due proprietà necessarie. Per esempio non è chiuso rispetto alla somma:

$$(1,0,0),\ (0,1,0)\ \in S, \quad \text{ma} \quad (1,0,0) + (0,1,0)\ \notin S$$

Notiamo che per dimostrare che una proprietà non è vera basta fornire un controesempio.

□

Esercizio 3.5. *Verificare che l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale.*

Soluzione:

Verifichiamo le operazioni di spazio vettoriale per l'insieme V:

(1) Verifichiamo che $M_{2\times 2}$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma:
- La somma di matrici gode della proprietà associativa.
- La somma di due matrici 2×2 è ancora una matrice 2×2.
- L'elemento
$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
è tale che $M + O = O + M = M$ per ogni matrice M 2×2.
- Qualsiasi sia la matrice
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
esiste la matrice
$$B = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$
tale che $A + B = B + A = O$.
- La somma di matrici è commutativa:
$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_2 \end{bmatrix} = B + A$$

(2) Il prodotto per elementi di $\mathbf{R}$ è tale che
- $(k_1 + k_2)M = k_1 M + k_2 M$ qualsiasi $k_i\ \in \mathbf{R}$ e qualsiasi sia la matrice M,
- $k(M_1 + M_2) = kM_1 + kM_2$ qualsiasi $k\ \in \mathbf{R}$ e qualsiasi siano le matrici M_i,
- $(k_1 k_2)M = k_1(k_2 M)$ qualsiasi $k_i\ \in \mathbf{R}$ e qualsiasi sia la matrice M,
- $1M = M$ qualsiasi sia la matrice M.

Notiamo che la verifica formale di tutte le proprietà è molto semplice, ma lunga. Notiamo anche come le domande *Verificare che l'insieme S è uno spazio vettoriale* e *Verificare che l'insieme S è un sottospazio vettoriale dello spazio V* appaiono simili, ma implicano una quantità di controlli notevolmente differenti. Nel secondo caso possiamo infatti sfruttare tutte le proprietà di V che continuano ovviamente a valere in S.

□

Esercizio 3.6. *Verificare che l'insieme $\mathbf{R}_n[x]$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]$.*

Soluzione:

Verifichiamo le due proprietà richieste ai sotospazi:

(1) Siano $f(x),\ g(x)$ due elementi di $\mathbf{R}_n[x]$:
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbf{R}$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \qquad b_i \in \mathbf{R}$$
Di conseguenza
$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n, \qquad a_i, b_i \in \mathbf{R}$$

e $f(x) + g(x) \in \mathbf{R}_n[x]$.

(2) Sia $f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora
$$\lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n, \qquad \lambda a_i \in \mathbf{R}$$
Quindi $\lambda f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$.

□

Esercizio 3.7. *Sia S l'insieme delle matrici 3×3 triangolari superiori:*
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R},\ i,j = 1,2,3 \right\}$$
Verificare che S è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici 3×3.

SOLUZIONE:

(1) Siano $A,\ B\ \in\ S$, allora
$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \ \in\ S \end{aligned}$$

(2) Qualsiasi sia $A\ \in\ S$ e $k\ \in\ \mathbf{R}$:
$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ 0 & ka_{22} & ka_{23} \\ 0 & 0 & ka_{33} \end{bmatrix} \ \in\ S$$

Quindi S è sottospazio di $M_{3\times 3}$.

□

Esercizio 3.8. *Sia G l'insieme di polinomi*
$$G = \left\{ ax^2 + a \mid a \in \mathbf{Z} \textit{ intero relativo } \right\}$$

a) *Mostrare che G è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
b) *Dire se G è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbf{R}[x]$, motivando la risposta.*

SOLUZIONE:

a) Un insieme G é un gruppo rispetto a una operazione $+$ se:
   (1) L'operazione è interna, ovvero G è chiuso rispetto a $+$. In questo caso presi due elementi di G:
   $$p_1(x) = ax^2 + a, \qquad p_2(x) = bx^2 + b, \qquad\qquad \text{con } a, b \in \mathbf{Z}$$
   allora anche la loro somma $p_1(x) + p_2(x)$ appappartiene a G. Infatti
   $$p_1(x) + p_2(x) = (a+b)x^2 + (a+b) = cx^2 + c$$
   dove $c = a + b \in \mathbf{Z}$.
   (2) L'operazione gode della proprietà associativa. Infatti la somma di polinomi gode in generale della proprietà associativa, quindi anche la somma di elementi di G è associativa.
   (3) Esiste l'elemento neutro 0 appartenente a G. Infatti $0 = 0x^2 + 0 \in G$ e
   $$0 + ax^2 + a = ax^2 + a + 0 = ax^2 + a$$
   (4) Esiste l'opposto di ogni elemento. Infatti dato $ax^2 + a \in G$ esiste l'elemento $-ax^2 + (-a) \in G$ tale che
   $$\left(ax^2 + a\right) + \left(-ax^2 + (-a)\right) = \left(-a + (-a)x^2\right) + \left(ax^2 + a\right) = 0$$

b) L' insieme G è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]$ se:
   (1) G è chiuso rispetto alla somma. Tale proprietà è già stata verificata al punto precedente.

(2) G è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Notiamo che il campo degli scalari di $\mathbf{R}[x]$ è $\mathbf{R}$ (notiamo anche che $\mathbf{Z}$ non è un campo!), quindi G non è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Infatti per esempio $x^2+1 \in G$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, ma

$$\frac{1}{2} \cdot (x^2+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \notin G$$

Di conseguenza G non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}[x]$

□

Esercizio 3.9. *Si consideri il seguente insieme*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.*
b) *L'insieme I forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?*
c) *Verificare che I non forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.*
d) *L'insieme*

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{N} \right\}$$

forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?

Soluzione:

a) Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A+B$ e AB sono ancora elementi di I:

$$A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{bmatrix} \in I$$

$$AB = \begin{bmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I$$

b) I è un gruppo rispetto alla somma, infatti verifica le quattro proprità:
(1) Proprietà associativa. La somma tra matrice gode in generale di tale proprietà, quindi in particolare ne godono gli elementi di I.
(2) Chiusura. Abbiamo appena dimostrato che I è chiuso rispetto alla somma.
(3) Elemento neutro. La matrice nulla appartiene all'insieme I.
(4) Opposto. Presa una qualsiasi matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in I$$

esiste la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{bmatrix} \in I$$

tale che $A+B=0$.

c) Le prima tre proprietà di gruppo rispetto al prodotto sono verificate dall'insieme I, quindi il problema deve venire dall'esistenza dell'inverso. E' quindi sufficiente dimostrare che esiste almeno una matrice in I che non ammette inverso. In particolare la matrice nulla

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

e qualsiasi sia la matrice A, $AO = OA = O$. Di conseguenza O non può ammettere inversa.

d) Anche per l'insieme J non è verificata la proprietà di esistenza dell'opposto. Per esempio l'opposto della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

è la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che però non appartiene a J (in quanto $-1 \notin \mathbf{N}$).

$\square$