CAPITOLO 4

La riduzione a gradini e i sistemi lineari (senza il concetto di rango)

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Esercizio 4.3. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

Esercizio 4.4. *Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Esercizio 4.5. *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z & = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z & = 1 + 2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 4.6. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.7. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y+z=1-k \\ y+(1-k)z=1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione. In tale caso trovare la soluzione.

Esercizio 4.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=k \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-kx_2+kx_3=k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 4.9. *Sia*

$$S=\left\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid x+y+(k+1)z=k, \quad 2x+y+z=0\ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Esercizio 4.10. *Sia*

$$S=\left\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid x-2y+kz=k-1,\ x-2y+z=0,\ -2x+4ky-2z=0\ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Esercizio 4.11. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S=\left\{x\in \mathbf{R}^5 \mid x_1-x_2+2x_5=k,\ x_1+x_3+kx_4=0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

---

1. Suggerimenti

- A ogni sistema lineare associamo la matrice formata dai coefficienti delle incognite e dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x+2y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{bmatrix}$$

  Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.
- Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:
  - Scambio di due righe della matrice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

– Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite.
– Sostituzione di una riga con un suo multiplo non nullo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

– Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

– Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione linare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II-I \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -2 & -6 & | & -2 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Per evitare errori è necessario badare che:

∗ Se sto sostituendo l'n-esima riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, il coefficiente per cui viene moltiplicata l'n-esima riga deve essere non nullo. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} k & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ kII-2I \end{array} \begin{bmatrix} k & 1 & | & 2 \\ 0 & 3k-2 & | & k-4 \end{bmatrix} \text{è lecita solo se } k \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ k & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II-kI \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2-3k & | & 4-k \end{bmatrix} \text{è sempre lecita}$$

Per questo diremo che è conveniente spostare i parametri verso il basso.

∗ Per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione, utilizzeremo per modificare una riga solo le righe che la precedono. Quindi
  · La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
  · La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
  · La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
  · ...

- Esempi di riduzione a gradini si possono vedere nei successivi capitoli.
- Le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è **omogeneo**.
- Molti esercizi possono risolti in maniera leggermente diversa utilizzando il teorema di Rouché-Capelli e il concetto di rango. A tale scopo si veda il Capitolo 7.

---

2. Soluzioni

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x+4y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

A ogni sistema lineare associamo la matrice $A|b$, dove A è la matrice formata dai coefficienti delle incognite e b è la matrice dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x+4y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{bmatrix}$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:

- Scambio di due righe della matrice.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} III \\ II \\ I \end{bmatrix}$$
- Sostituzione di una riga con un suo multiplo **non nullo**.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$
- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ II+I \\ III \end{bmatrix}$$
- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni che vedremo esplicitamente negli esercizi.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII+bI \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$
Notiamo in particolare la condizione $a \neq 0$, mentre non c'è nessuna condizione sul coefficiente b. In sostanza è necessario che il coefficiente della riga che stiamo sostituendo sia non nullo (in questo caso la seconda).
- Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite. Per tale ragione useremo questo scambio solo se realmente conveniente.

Procediamo ora alla riduzione. Notiamo che la prima riga è l'unica che rimarrà invariata nella riduzione. Inoltre è la più utilizzata nelle operazioni di riduzione. Per queste ragioni è generalmente conveniente avere come prima riga quella più semplice (cioè con più zeri e senza parametri nel caso di sistemi parametrici).

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/3III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto la matrice è ridotta a gradini, possiamo quindi ritornare al sistema:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Notiamo che per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione abbiamo utilizzato per modificare una riga solo le combinazioni lineari con le righe che la precedono.

Seguiremo in generale questo principio, quindi, a parte gli scambi di righe,

- La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
- La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
- La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
- ...

□

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

SOLUZIONE:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Torniamo ora al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ y + 4z + 2w = 0 \\ -2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15t \\ y = -8t \\ z = \dfrac{3}{2}t \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

L'insieme delle soluzioni scritte in forma vettoriale è quindi dato da

$$S = \left\{ (x, y, z, w) = \left(15, -8, \frac{3}{2}, 1\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Notiamo che, come accade sempre per le soluzioni di un sistema omogeneo, l'insieme S è uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in questo caso).

□

Esercizio 4.3. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo la matrice a gradini.

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo la prima e la terza riga. Lo scopo di questa operazione è *spostare i parametri verso il basso.*

Se così non facessimo nella riduzione a gradini dovremmo necessariamente procedere nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} \\ kII - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2 - 4 \\ 0 & 1 & 3 - k & | & k \end{bmatrix}$$

Il sistema così ottenuto non è però equivalente a quello iniziale nel caso $k = 0$. Infatti per $k = 0$ abbiamo sostituito la seconda riga con la prima riga cambiata di segno, operazione non lecita. Nelle regole date inizialmente sulla sostituzione di una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga:

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{bmatrix}$$

era infatti richiesta la condizione $a \neq 0$ (notiamo invece che non c'è nessuna richiesta sul valore di b). Procedendo in questo modo dovremmo poi considerare il caso $k = 0$ separatamente, riprendendo la matrice precedente all'operazione non lecita.

Effettuiamo invece con lo scambio delle righe:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in questo caso l'operazione è lecita anche per $k = 0$ (quando in pratica lasciamo la terza riga invariata).

a) L'ultima equazione del sistema è $0 = 4 - k^2$ che non risulta impossibile solo se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$. In tali casi il sistema ammette soluzione.
   Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Consideriamo separatamente i casi $k = \pm 2$.
   - Per $k = 2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

   - Per $k = -2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = -5t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.4. *Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & k+2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k^2-k+2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{bmatrix}$$

In conclusione abbiamo ottenuto il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ (k-1)z = 0 \\ k(k-1)w = k-1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere il parametro.

- Se $k(k-1) \neq 0$, cioè se $k \neq 0,\ k \neq 1$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare il valore della w. Analogamente se $k \neq 1$ dalla terza equazione possiamo ricavare il valore della z. Quindi per $k \neq 0,\ k \neq 1$ otteniamo le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{k-2}{k} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = \frac{1}{k} \end{cases}$$

  Di conseguenza se $k \neq 0,\ k \neq 1$ il sistema ammette una unica soluzione:

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{k-2}{k}, 0, 0, \frac{1}{k} \right).$$

- Se invece $k = 0$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

  Poiché l'ultima equazione è impossibile, per $k = 0$ il sistema non ha soluzioni.
- Infine se $k = 1$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

  In questo caso abbiamo due sole equazioni (significative) e 4 incognite. Dobbiamo quindi introdurre 2 parametri:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

  Di conseguenza se $k = 1$ le soluzioni del sistema sono date dall'insieme

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, w) = (-2t + 1, -3s, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-2, 0, 0, 1) \cdot t + (0, -3, 1, 0) \cdot s + (1, 0, 0, 0) \mid s, t \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

  In questo caso otteniamo perciò infinite soluzioni (e neanche in questo caso S è uno spazio vettoriale! Infatti non sono soluzioni di un sistema omogeneo)

□

Esercizio 4.5. *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z & = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z & = 1 + 2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vert & 1 \\ k+2 & 2 & 4 & \vert & 2 \\ 1+2k & 3 & 2 & \vert & 1+2k \end{bmatrix}$$

Poichè la prima colonna contiene il parametro k la scambiamo con la terza colonna (scambiando così la posizione dell'incognita x con quella dell'incognita z):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 4 & 2 & k+2 & \vert & 2 \\ 2 & 3 & 2k+1 & \vert & 1+2k \end{bmatrix}$$

Riduciamo ora la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & k & \vert & 0 \\ 0 & 2 & 2k & \vert & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 2 & 2k & \vert & 2k \\ 0 & 0 & k & \vert & 0 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema e ricordando lo scambio di x e z otteniamo:

$$\begin{cases} 2z+y+x=1 \\ 2y+2kx=2k \\ kx=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} z=\dfrac{1-k}{2} \\ y=k \\ x=0 \end{cases}$$

- Se $k=0$ invece

$$\begin{cases} 2z+y+x=1 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1-2t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 4.6. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax=b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x=[x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax=\begin{bmatrix} -x_1+3x_2 \\ x_1+2x_2-x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax=b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1+3x_2=2 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ (2t+1)x_3=5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & \vert & 2 \\ 1 & 2 & -1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & \vert & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow II+I \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & \vert & 2 \\ 0 & 5 & -1 & \vert & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & \vert & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1+3x_2=2 \\ 5x_2-x_3=3 \\ (2t+1)x_3=5 \end{cases}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare x_3 ottenendo quindi una unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, invece l'ultima equazione diventa

$$0 = 5$$

  Quindi l'equazione è impossibile e il sistema non è compatibile.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

$\square$

Esercizio 4.7. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

ammette un'unica soluzione. In tale caso trovare la soluzione.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \\ III + (k-1)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - (k-1)z = 1 \\ -k(k-2)z = -k \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere i valori del parametro distinguendo tre casi:

- Se $k \neq 0, 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = -\frac{k-1}{k-2} \\ y = \frac{2k-3}{k-2} \\ z = \frac{1}{k-2} \end{cases}$$

  quindi il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $k = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

  Il sistema ammette soluzione, ma in questo caso ne ammette infinite in quanto abbiamo ottenuto un sistema in tre equazioni e due sole incognite. Anche se non era richiesto possiamo comunque ricavare le soluzioni

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

- Se $k = 2$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

quindi il sistema non ammette soluzioni.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -k & k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & -2 & | & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ -II \\ III + (-k+1)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & | & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = k \\ y + 2z = k \\ (3k-1)z = k^2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k = \frac{1}{3}$ allora l'ultima riga diventa $0 = \frac{1}{9}$, quindi è impossibile e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite che ammette una unica soluzione:

$$\begin{cases} 2x_- x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$

□

Esercizio 4.9. *Sia*

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{ \ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{ \ (0, -1, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\}$$

□

Esercizio 4.10. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \ x - 2y + z = 0, \ -2x + 4ky - 2z = 0 \ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} S &= \{ \ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{ \ (2s, s, 0) + (-t, 0, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{ \ (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t \mid s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.11. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k, \ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

Soluzione:

a) S è uno spazio vettoriale se il sistema è omogeneo cioè se $k = 0$.

b) Risolviamo il sistema omogeneo, riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -r \\ x_2 = -r + 2t \\ x_3 = r & \qquad \forall\, r, s, t \ \in \ \mathbf{R} \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-r, -r + 2t, r, s, t) \ |r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-r, -r, r, 0, 0) + (0, 0, 0, s, 0) + (0, 2t, 0, 0, t) \ |r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-1, -1, 1, 0, 0) \cdot r \ + \ (0, 0, 0, 1, 0) \cdot s \ + \ (0, 2, 0, 0, 1) \cdot t \ |r, s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□