CAPITOLO 7

Rango: Rouchè-Capelli, dimensione e basi di spazi vettoriali.

Esercizio 7.1. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro* $t \in \mathbf{R}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.2. *Siano* $v, w \in \mathbf{R}^n$ *vettori colonna. Dimostrare che la matrice* $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ *ha rango* 0 *oppure* 1.

Esercizio 7.3. *Determinare per quali valori del parametro reale* t *il sistema* $Ax = b$ *è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.4. *Si considerino le matrici (dove* k *è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di* A *al variare di* k.
b) *Si stabilisca per quali valori di* k *il sistema lineare* $Ax = b$ *è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Esercizio 7.5. *Si dica per quali valori di* k *il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 7.6. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di* k *il sistema é compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di* k *che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 7.7. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di* k *il sistema ammette una unica soluzione e per quali* k *ne ammette infinite.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Esercizio 7.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z &= 4 \\ x + y + kz &= k \\ x + 2y + 3z &= 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?*

Esercizio 7.9. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Esercizio 7.10. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ x + (k-1)y + (k+1)z = 1 \\ x + (k-1)y + (k^2 + 4k + 3)z = k + 3 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema ammette soluzioni. In tali casi stabilire anche se ne ammette una o infinite.

Esercizio 7.11. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ kx + y + z = 5 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile.*
b) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione.*

Esercizio 7.12. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} kx + y + z &= 1 \\ y + z &= k \\ 3x + ky + 2z &= 2 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Discutere l'esistenza e unicità di soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare di k.*

Esercizio 7.13. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Esercizio 7.14. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di t il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 7.15. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(t parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 7.16. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k-1 \\ kx_1 + kx_2 = 2k \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette soluzione, specificando se e quando ne ammette una o infinite.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, si determinino le sue soluzioni.*

Esercizio 7.17. *Al variare del parametro reale k, si risolva il sistema di equazioni lineari omogenee:*

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{(t parametro reale)}$$

Esercizio 7.18. *Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) *Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*
b) *Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il sistema ha soluzione unica.*

Esercizio 7.19. *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Esercizio 7.20. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Indicare basi per lo spazio delle righe e per lo spazio delle colonne di A.*
b) *Esistono valori $t \in \mathbf{R}$ per cui il sistema $Ax = b$, con $b = (1,1,t,t)$ ammetta soluzione?*

Esercizio 7.21. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) *Si calcoli il rango di A.*
b) *Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Esercizio 7.22. *Siano dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3*.*

Esercizio 7.23. *Siano dati i segunti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0,k^2+2,3), \qquad v_4 \equiv (1,k+3,k^2+2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Esercizio 7.24. *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori formano una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Esercizio 7.25.

a) *Mostrare che i vettori*

$$v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (-1,k,0), \quad v_3 = (1,1,k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$*.*

b) *Esprimere il vettore* $v = (2,1,2)$ *come combinazione lineare di* v_1, v_2, v_3*.*

Esercizio 7.26. *In* $\mathbf{R}^3$ *siano*

$$v_1 = (k,2,1), \quad v_2 = (-2,1,0), \quad v_3 = (0,1,1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre vettori costituiscono una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

b) *Per i valori trovati al punto* a)*, si calcolino le coordinate del vettore* $v = (-2,1,2)$ *rispetto a tale base.*

Esercizio 7.27. *Si consideri il sottospazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *di* $\mathbf{R}^5$ *generato dai vettori*

$$v_1 = (-1,1,2,1,0), \; v_2 = (0,2,1,1,0), \; v_3 = (1,1,-1,0,0).$$

a) *Trovare una base di* V*.*

b) *Determinare le coordinate del vettore* $v = (-2,6,6,4,0) \in V$ *rispetto alla base trovata al punto* a)*.*

Esercizio 7.28. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Determinare una base di V*. Esprimere inoltre* v_1*,* v_2*,* v_3 *e* v_4 *come combinazione lineare degli elementi di tale base.*

Esercizio 7.29. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (6,7,8,5)$$
$$v_3 \equiv (2k,k+8,3k+3,2), \qquad v_4 \equiv (0,2k,2k,1).$$

Determinare una base di V *al variare del parametro* k*. Esprimere inoltre* v_1*,* v_2*,* v_3 *e* v_4 *come combinazione lineare degli elementi di tale base.*

Esercizio 7.30. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (0,k-1,k^2-1,3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

Determinare la dimensione e una base di V *al variare del parametro reale* k*.*

Esercizio 7.31. *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*:*

$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$

Si calcoli la dimensione di W *al variare di* $k \in \mathbf{R}$*.*

Esercizio 7.32. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (3,-1,2,0), \quad v_2 = (-6,2,-4,0), \quad v_3 = (-3,k,k-3,0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2\rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.*

Esercizio 7.33. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k - 6, 3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2\rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.*

Esercizio 7.34. *Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \rangle$ con*

$$v_1 = (3, 7, k + 1, 2k + 2),\ v_2 = (2, 2k + 2, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (-3, -7, -1, 2k)$$

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si determini una base di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 7.35. *Determinare una base dei seguenti sottospazi W di $\mathbf{R}^3$:*

(1) $W = \langle(1, 2, 5), (-3, -6, -15)\rangle$
(2) $W = \langle(1, 2, 5), (-3, -6, -15), (2, 1, 0)\rangle$
(3) $W = \langle(-1, 2, 0), (0, 1, -1), (1, -1, 2)\rangle$

Esercizio 7.36. *Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ con*

$$v_1 = (k + 3,\ k + 3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k + 2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$.*
b) *Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 7.37. *Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 3, 0)$:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3\rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.*
(2) *Determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\rangle$.*

Esercizio 7.38. *Sia*

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k + 3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k + 6, -3)$ appartiene a V.*

Esercizio 7.39. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:*

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (0, k - 1, k - 1), \quad v_3 = (2, 1, k + 5)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1, 3, 4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*

Esercizio 7.40. *Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*

$$v_1 = (1, 0, 3, 1), \quad v_2 = (-3, -3, -3, 0), \quad v_3 = (0, k + 1, k + 1, 0), \quad v_4 = (k - 1, 1, 3k - 5, 2k - 5),$$

dove k è un parametro reale, e sia $V = \langle v_1, v_2, v_2, v_4\rangle$.

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^4$.*
b) *Si determini la dimensione e una base di V al variare di k.*

Esercizio 7.41. *Si consideri l'insieme*

$$S = \{\ (k + 1, k + 1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.*

Esercizio 7.42. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 1, 1, 2), \quad v_2 = (0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (k, 0, 1, 1).$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*
b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Esercizio 7.43. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 0, 0, 0),\ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad (k \text{ parametro reale}).$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Esercizio 7.44. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{\ (-2, 0, 0),\ (1, k, -1),\ (1, -1, k)\ \}$$

a) *Trovare i valori del parametro k per cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore $k = 3$, determinare le coordinate dei vettori $v = (-3, 2, 1)$ e $w = (0, 1, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 7.45. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $w_1 = (2, 3, -1)$, $w_2 = (1, 2, 2)$, $w_3 = (1, 1, -3)$.*

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$.*
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.*

Esercizio 7.46. *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$V = \langle (1, 0, 1),\ (1, 2, 1),\ (1, 0, 1)\rangle$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 7.47. *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:*

$$U = \{(0, 1, 1, 0)a + (0, 0, 0, 1)b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$
$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
c) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 7.48. *In $\mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare canonico sia U il sottospazio dei vettori ortogonali al vettore $(1, 0, -1, 0)$ e sia V il sottospazio generato dai vettori $(1, 0, -2, 3)$, $(-1, 1, 1, -4)$, $(1, 1, -3, 2)$.*
Si trovino la dimensione e una base di U, V, $U \cap V$, $U + V$.

Esercizio 7.49. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (1, -1, 0),\ (1, 1, -1)\rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi U e V.*
b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi $U + V$ e $U \cap V$.*

Esercizio 7.50. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (2, -1, -2),\ (-3, 4, 3)\rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Esercizio 7.51. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.52. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.53. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.54. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.55. *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0, 1, 1, 1, -2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a)*.*

Esercizio 7.56. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Esercizio 7.57. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Esercizio 7.58. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S ée un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a)*, trovare una base di S.*

Esercizio 7.59. *Sia W il sottinsieme di $\mathbf{R}^5$ definito da*

$$W = \big\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 - x_3 + kx_4 + x_5 = 0,\ x_2 - 3x_4 = k,\\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \big\}$$

Stabilire per quali valori di k l'insieme W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ e calcolarne una base e la dimensione.

Esercizio 7.60.

a) *Trovare una base del sottospazio V di $\mathbf{R}^5$ così definito:*

$$V = \{x \in \mathbf{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\}.$$

b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^5$ contenente la base di V trovata in* a)*.*

Esercizio 7.61. *Sia*

$$S = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k+1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k+2,\ 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Esercizio 7.62. *Sia S l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} -x_1 + (k-1)x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (k+1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + (2-2k)x_4 = k-2 \\ x_1 + 4x_2 + (2k-2)x_3 + (1-k)x_4 = 2-k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Stabilire per quali k l'insieme S è uno spazio vettoriale e in tali casi determinarne una base.*
b) *Esplicitare S al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 7.63. *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*
b) *Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Esercizio 7.64.

a) *Sia*

$$V = \langle\ (1,2,1),\ (-1,3,0),\ (3,1,2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0\ \}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Esercizio 7.65. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori:*

$$v_1 = (0,1,2,0,1), \quad v_2 = (k,1,2,0,2), \quad v_3 = (0,0,0,k,1)$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*
b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^5$.*

Esercizio 7.66. *Dati i vettori linearmente indipendenti $v_1 = (3,0,1)$ e $v_2 = (1,4,-2)$ completare l'insieme $S = \{v_1, v_2\}$ in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^3$.*

Esercizio 7.67. *Siano*

$$v_1 = (1,-1,-1,1),\ v_2 = (k,1,1,-1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) *Si trovino i valori del parametro k per i quali v_1 e v_2 sono indipendenti.*
b) *Per $k = 2$, si estenda l'insieme $\{v_1, v_2\}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.*

Esercizio 7.68. *Si consideri l'insieme S costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1,2,2,1), \qquad v_2 = (2,1,2,1), \qquad v_3 = (0,1,2,1)$$

a) *E' possibile estendere S a una base di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S.*

Esercizio 7.69. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (2,1,-1,3), \quad v_2 = (1,0,5,1), \quad v_3 = (2,-1,3,1).$$

a) *Stabilire se il vettore $v = (0,0,1,0)$ è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
b) *Completare l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Esercizio 7.70. *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare una base di V.*

Esercizio 7.71. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.*

Esercizio 7.72. *Si considerino i polinomi $p_1 = x^2+ax+b+c,\ p_2 = x^2+bx+a+c,\ p_3 = x^2+cx+a+b$.*
a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[x]$.*
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3\rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.*

Esercizio 7.73. *Sia S il sottoinsieme dello spazio dei polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ così definito:*

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare la dimensione di S.*

Esercizio 7.74. *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Esercizio 7.75. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.*

Esercizio 7.76. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.*

Esercizio 7.77. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2, \qquad p_2(x) = 3x + 4, \qquad p_3(x) = -x^2 + 6x + 6$$

e sia $W = \langle p_1, p_2, p_3\rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ generato da p_1, p_2 e p_3.
a) *Si determini la dimensione e una base di W.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il polinomio $f_k(x) = (k + 1)x^2 + 3kx + 4$ appartiene a W.*

Esercizio 7.78. *Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 7.79. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3.*
a) *Si mostri che $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = f(2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovi una base.*
b) *Si completi la base trovata al punto precedente ad una base di V.*

Esercizio 7.80. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 2 - x, \qquad p_2(x) = -x + x^2, \qquad p_3(x) = 3 + x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = 1 + 2x + 2x^2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 7.81. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = 2x + x^2 - x^3,\ p_2(x) = 1 - x + x^2,\ p_3(x) = 3 + x - x^3,\ p_4(x) = x^2 + x^3$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = (x+1)^3$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$.

Esercizio 7.82. *Dati i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2x,\ p_2(x) = x^2 - x,\ p_3(x) = 2x + 1$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$
b) *Esprimere* $f(x) = 3x^2 - 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 7.83. *Sia* W *il sottoinsieme dello spazio di polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$ *definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(1) = 0\}$$

(p''' *è la derivata terza di* p*)*

a) *Mostrare che* W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Trovare una base e la dimensione di* W.
c) *Determinare le coordinate del polinomio* $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Esercizio 7.84. *Sia* S *l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$*).*

a) *Verificare che* S *è un sottospazio di* $M_{2\times 2}$.
b) *Determinare una base di* S.

Esercizio 7.85. *Sia* S *il sottinsieme dello spazio delle matrici* $M_{3,2}(\mathbf{R})$ *così definito:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Mostrare che* S *è un sottospazio vettoriale di* $M_{3,2}(\mathbf{R})$.
b) *Determinare un insieme generatore di* S.

Esercizio 7.86.

a) *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.
b) *Determinare una base di* W.

Esercizio 7.87. *Si consideri il sottospazio*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a+b+3c & 2b-6c \\ a+3b-7c & 4a+8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.

a) *Determinare una base di* S.
b) *Stabilire se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ *(ed in caso positivo esprimere* A *come combinazione lineare della base trovata in* a)*).*

Esercizio 7.88. *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice* $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Esercizio 7.89. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$. Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 7.90. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini una base del sottospazio $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}$.*
b) *Mostrare che il sottoinsieme $W = \{X \in U : X \text{ è invertibile}\}$ non è un sottospazio vettoriale di U.*

Esercizio 7.91. *Sia $W = \langle A,\ B,\ C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Esercizio 7.92. *Sia $V = \langle A, B, C\rangle$ il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si esprima* $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *come combinazione lineare della base trovata al punto* a).

Esercizio 7.93. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se A, B e C sono linearmente indipendenti in $M_2(\mathbf{R})$.*
b) *Si determini una base del sottospazio $\langle A, B, C\rangle$.*

Esercizio 7.94. *Sia $V = \langle A,\ B,\ C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si stabilisca per quali k la matrice D appartiene a V. In tali casi si esprima D come combianzione lineare della base trovata al punto precedente.*

Esercizio 7.95. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base.*

a) *Mostrare che l'insieme $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$ è una sua base di V.*
b) *Calcolare le coordinate del vettore $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{B}'$.*

Esercizio 7.96. *Si consideri l'insieme S di matrici 3×3*

$$S = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbf{R}) \ : \ a_{11} + a_{12} = a_{32} + a_{33} = 0\}.$$

a) *Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbf{R})$. In caso affermativo, trovarne la dimensione.*
b) *Sia $Sim_3(\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali simmetriche 3×3. Trovare una base dello spazio intersezione $S \cap Sim_3(\mathbf{R})$.*

Esercizio 7.97. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A + A^T = 0\right\}.$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che ogni elemento di W ha rango minore di 3.*

Esercizio 7.98. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{ A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A = A^T,\ tr(A) = 0 \right\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Calcolare le coordinate di* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Esercizio 7.99. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \{ A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \ per\ i \geq j \}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che per ogni matrice A in W, la matrice A^2 ha rango minore di 2.*

---

1. Suggerimenti

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Osservazioni

- Come conseguenza delle proprietà 3) e 4) si ha che se A è una matrice $n \times m$, allora $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$
- Per utilizzare la proprietà 1) si può anche ridurre (parzialmente) a gradini la matrice.

Rouchè-Capelli.

Un sistema di equazioni $Ax = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

Inoltre:

- Ammette un'unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite.
- Ammette infinite soluzioni se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) <$ numero delle incognite.

Dipendenza lineare.

Sia V uno spazio lineare e v, v_i vettori di V.

- v è **combinazione lineare** di $v_1, \ldots, v_n$ se l'equazione:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = v$$

ammette soluzione.

Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|b$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$ e b è data dal vettore v. In tale caso:

v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ sse $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

- $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** se l'equazione:
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0$$
ammette la **sola** soluzione nulla $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$.
Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|0$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$. In tale caso:
$v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** sse $\text{rg}(A) = n$

Basi e dimensione.

Sia $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sottinsieme di V. Diciamo che S è una **base** di V se:

(1) S è un insieme generatore di V: $V = \langle S \rangle$, cioè ogni elemento di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S.
(2) Gli elementi di S sono linearmente indipendenti.

La **dimensione** di uno spazio vettoriale corrisponde al numero di elementi di una sua base.

Nel caso particolare in cui $V = \mathbf{R}^n$ sappiamo che S per essere una base deve essere formato da n elementi, ed è sufficiente verificare che gli n elementi di S siano linearmente indipendenti. Ragionando sui ranghi, **n vettori di $\mathbf{R}^n$ formano una base di $\mathbf{R}^n$ se e solo se la matrice associata ha rango n.**

Spazi vettoriali

- Nel caso particolare di
$$V = \langle\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n \rangle,$$
se indichiamo con A la matrice formata dai vettori colonna $v_1, \dots, v_n$, allora:
$$\begin{aligned} &\dim(V) = \text{rg}(A) \\ &\mathcal{B}(V) = \text{base di } V &&= \{\text{vettori linearmente indipendenti tra } v_1, \dots, v_n\} \\ & &&= \{\text{vettori tra } v_1, \dots, v_n \text{ corrispondenti ai pivot di } A\ \} \end{aligned}$$
- Nel caso particolare di
$$V = \{\ \text{soluzioni di un sistema omogeneo}\ \},$$
se indichiamo con A la matrice associata al sistema e con n il numero delle incognite, allora:
$$\dim(V) = n - \text{rg}(A)$$
$$\mathcal{B}(V) = \text{base di } V = \{\text{generatori delle soluzioni una volta scritte in forma vettoriale}\ \}$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 7.1. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t \neq -1, 3$, allora A_1 ha tre pivot e $\text{rg}(A_1) = 3$.

- Se $t = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ III - 4II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = -1$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.

- Se $t = 3$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = 3$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.

Analogamente potevamo calcolare il rango di A_1 ragionando sui determinanti.

$$\det(A_1) = (t + 1)(t - 3)$$

Quindi:

- Se $t \neq -1, 3$, la matrice ha determinante non nullo, quindi A_1 ha rango 3.
- Se $t = -1$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1) \leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_1) = 2$

- Se $t = 3$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1) \leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi anche in questo caso $\text{rg}(A_1) = 2$.

- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.
  - Se $t \neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $\text{rg}(A_2) = 3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t = 3$ e $t = 0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
    * Se $t = 3$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.

    * Se $t = 0$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.

  - Se $t = -1$ otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ III + 4II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = -1$ la matrice A_2 ha due pivot e $\text{rg}(A_2) = 2$.

Calcoliamo ora il rango di A_2 ragionando sui determinanti. Consideriamo la sottomatrice quadrata 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t + 1 & -1 \\ 0 & 0 & t - 3 \end{bmatrix}$$

il cui determinante vale

$$\det(B) = (t + 1)(t - 3)$$

Quindi:

- Se $t \neq -1, 3$, la matrice B ha determinante non nullo, quindi A_2 ha rango 3.
- Se $t = -1$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  Di conseguenza per $t = -1$ ogni sottomatrice 3×3 di A_2 ha determinante nullo, mentre

$$\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

  Di conseguenza $\text{rg}(A_2) = 2$
- Se $t = 3$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

  In A_2 troviamo quindi la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

  con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_2) = 3$.

- Riduciamo a gradini della matrice A_3:

$$\begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - tI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{bmatrix}$$

  Se ragioniamo sui pivot otteniamo:
  - Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A_3) = 3$.
  - Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    quindi ha 2 pivot e $\text{rg}(A_3) = 2$.

  Ragionando invece sui determinanti notiamo che A_3 contiene la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ t & 0 & t \end{bmatrix}$$

  il cui determinante è $-2t$.

  Di conseguenza
  - Se $t \neq 0$ la matrice A_3 ha rango 3.
  - Se $t = 0$ otteniamo la matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    che ha una riga nulla, quindi tutte le sottomatrici 3×3 di A_3 hanno determinante nullo e $\text{rg}(A_3) \leq 2$. Inoltre in A_3 troviamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

    con determinante non nullo. Quindi in questo caso $\text{rg}(A_3) = 2$.

□

Esercizio 7.2. *Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$ vettori colonna. Dimostrare che la matrice $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha rango 0 oppure 1.*

SOLUZIONE:
Siano $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w^T = (w_1, w_2, \dots w_n)$, allora vw^T è una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_n \\ v_2w_1 & v_2w_2 & \dots & v_2w_n \\ \dots \\ v_nw_1 & v_nw_2 & \dots & v_nw_n \end{bmatrix}$$

In sostanza ogni riga di A è un multiplo della riga formata da w^T. Se $v = 0$ o $w = 0$, allora anche la matrice A è nulla e $\text{rg}(A) = 0$, altrimenti A può essere ridotta nella matrice

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove la riga ottenuta è non nulla, quindi se $v \neq 0$ e $w \neq 0$ la matrice $A = vw^T$ ha rango 1.

□

Esercizio 7.3. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:
Sia $x = [x_1, \ x_2, \ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Per stabilire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Notiamo che il numero delle incognite del sistema corrisponde al numero delle colonne di A.

Riduciamo quindi $A|b$ a gradini per calcolarne il rango:

$$\begin{matrix} \\ II + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni.

□

Esercizio 7.4. *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Soluzione:
Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$. Scambiamo la prima e quarta colonna di A e ricordando poi tale scambio prima di rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6k & | & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4k+1 & | & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III + 1/2I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Anche senza completare la riduzione siamo in grado di risponedere ad entrambe le domande.

a) La matrice A ha rango 3 per ogni valore di k, infatti i due termini $k-1$ e $k+2$ non si possono annullare contemporaneamente.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se anche $rg(A|b) = 3$, cioè se $k = 1$ quando, ricordando lo scambio di colonne, otteniamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w + 2y - z + 3x = \\ 2y + 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = t \\ w = -\frac{4}{3} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine le soluzioni del sistema sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{4}{3} \right) + (0, 0, 1, 1)t \mid t \in \mathbf{R} \right\}.$$

□

Esercizio 7.5. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione.

Soluzione:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + (k-1)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione se il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa sono entrambi tre. Dalla matrice ridotta questo avviene per $k \neq 0, 2$.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che per $k = 2$ il sistema non ammette soluzione, mentre per $k = 0$ ne ammette infinite.

In alternativa potevamo calcolare il rango della matrice ragionando sui determinanti:

$$\det(A) = 1 - k - 1 - k(1-k) = k^2 - 2k$$

Quindi se $k \neq 0, 2$, la matrice A ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.

□

Esercizio 7.6. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema é compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -k & k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & -2 & | & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ -II \\ III + (-k+1)II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & | & k^2 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere due casi:
   - Se $k = \frac{1}{3}$ allora $\text{rg}(A) = 2$ mentre $\text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzioni.
   - Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette una unica soluzione.

   Per rispondere alla domanda a) potevamo anche ragionare sul determinante:

$$\det(A) = 2(-k-k) + (k+1) = -3k + 1$$

   Quindi
   - Se $k \neq \dfrac{1}{3}$, la matrice A ha detereminante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.
   - Per $k = \dfrac{1}{3}$ otteniamo la matrice (numerica, quindi facilissima da ridurre a gradini, se preferiamo utilizzare la riduzione a questo punto)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

   Poiché $\det(A) = 0$, $\text{rg}(A) \leq 2$. In $A|b$ troviamo la sottomatrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & | & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & | & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è non nullo, quindi $\text{rg}(A|b) = 3$. Quindi se $k = \dfrac{1}{3}$ si ha $\text{rg}(A) \leq 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Risolviamo il sistema per $k \neq \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} 2x_{-}x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$

□

Esercizio 7.7. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*

b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ -2 & 6 & k+7 & | & 2k+9 \\ 1 & -4 & -2 & | & k-2 \\ 3 & -6 & k-7 & | & k^2-k-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2k+1 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2 - 4 = 0$ se $k = \pm 2$, e che $k + 2 = 0$ se $k = -2$. Di conseguenza:
   - Se $k \neq \pm 2$ allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ quindi il sistema non ammette soluzione.
   - Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   - Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k = 2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 \\ 2y + 3z = 3 \\ 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Consideriamo il caso $k = -2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8t - 10 \\ y = t \\ z = 2t - 3 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 7.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*

b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?*

Soluzione:

Poichè non ci sono richieste esplicitamente le soluzioni, ma solo la loro esistenza, utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Ricordiamo inoltre che:

Il **rango** *di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.* In seguito vedremo altri metodi per calcolare il rango di una matrice.

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Il sistema è compatibile se il rango della matrice completa e incompleta coincidono. Per determinare il rango riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

La matrice incompleta ha due pivot, quindi ha rango 2. La matrice completa ha rango 2 solamente se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$.

Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Per $k = \pm 2$ il rango della matrice è 2, mentre le incognite sono 3, quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

□

Esercizio 7.9. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*

b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & | & 1 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k-4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

– Se $k \neq 1, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3-k}{k+1} - 3 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-2)}{k+1} = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{k+5}{k+1} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases}$$

– Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3}, 0\right) + (-3, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

– Se $k = 1$ si ha $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\text{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(-\dfrac{7}{3}, -2, \dfrac{1}{3}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -2 + 2 = 0 \\ (k+1) \cdot \dfrac{1}{3} + (k-2) \cdot 1 = 1 \\ (k-2) \cdot 1 = k-2 \end{cases} \Rightarrow \quad k = 2$$

Oppure si poteva sostituire nel sistema iniziale, ottenendo le condizioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} - 2 + \dfrac{1}{3} + 5 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} + 2 + \dfrac{k+2}{3} + k - 1 = 2 \\ -\dfrac{7}{3} + \dfrac{k+2}{3} + 2k - 1 = k \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

Quindi $v \in \text{Sol}(Ax = b)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 7.10. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ x + (k-1)y + (k+1)z = 1 \\ x + (k-1)y + (k^2 + 4k + 3)z = k + 3 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema ammette soluzioni. In tali casi stabilire anche se ne ammette una o infinite.

Soluzione:

Utilizziamo il Teorma di Rouchè-Capelli per stabilire quando il sistema ha soluzione. A tale scopo consideriamo la matrice $A|b$ associata al sistema e la riduciamo a gradini per stabilirne il rango.

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 1 \\ 1 & k-1 & k+1 & | & 1 \\ 1 & k-1 & k^2+4k+3 & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & | & k+2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora i pivot di A osservando che $k^2 + 3k + 2 = 0$ quando $k = -1$ o $k = -2$. Dobbiamo quindi distinguere tre casi.

- Se $k \neq 1, -1, -2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 =$ numero delle incognite del sistema. Quindi in questi casi il sistema ammette una unica soluzione.

- Se $k = 1$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-6II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k = -1$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.
- Infine se $k = -2$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema ammette soluzione. Poichè inoltre il rango è inferiore al numero delle incognite, in questo caso il sistema ammette infinite soluzioni.

□

Esercizio 7.11. *Si consideri il sistema lineare*
$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ kx + y + z = 5 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile.*
b) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione.*

SOLUZIONE:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, e ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:
$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 2k-1 \\ k & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & k & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 1 & k & 1 & | & 2k-1 \\ k & 1 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 2k-1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 2k-1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & | & 2k+4 \end{bmatrix}$$
Notiamo che $-k^2 - k + 2 = 0$ se $k = 1$ o $k = -2$, di conseguenza:
- Se $k \neq 1, -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema è risolubile.
- Se $k = 1$ otteniamo la matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non è risolubile.
- Se $k = -2$ otteniamo la matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ ke il sistema è risolubile, con infinite soluzioni.

In conclusione:

a) Il sistema ammette soluzione se $k \neq 1$.
b) Il sistema ammette una unica soluzione soluzione se $k \neq 1, -2$ (Per $k = -2$ il sistema ammette infinite soluzioni).

.

□

Esercizio 7.12. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} kx + y + z &= 1 \\ y + z &= k \qquad\qquad (k \text{ parametro reale}) \\ 3x + ky + 2z &= 2 \end{cases}$$

a) *Discutere l'esistenza e unicità di soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare di k.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 3 & k & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & k & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 3 & k & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 3-k^2 & 3-2k & | & 3-2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - (3-k^2)II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & k & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & k^2-2k & | & k^3-5k+3 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2 - 2k = 0$ se $k = 0$ o $k = 2$, di conseguenza:
   - Se $k \neq 0, 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema è risolubile e ammette una unica soluzione.
   - Se $k = 0$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è risolubile.
   - Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è risolubile.

   Per rispondere alla domanda a) potevamo anche utilizzare il determinante:

$$\det(A) = k(2-k) + 3(1-1) = k(2-k)$$

   Quindi
   - Se $k \neq 0, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.
   - Se $k = 0$ allora $\text{rg}(A) \leq 2$ e la matrice $A|b$ diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

     A questo punto per calcolare $\text{rg}(A|b)$ possiamo ridurre la matrice a gradini, oppure osservare che $A|b$ contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

     con determinante non nullo. Quindi per $k = 0$ è $\text{rg}(A) \leq 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema non ammette soluzioni.
   - Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) \leq 2$ e la matrice $A|b$ diventa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

     A questo punto per calcolare $\text{rg}(A|b)$ possiamo ridurre la matrice a gradini, oppure osservare che $A|b$ contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

     con determinante non nullo. Quindi anche per $k = 2$ è $\text{rg}(A) \leq 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema non ammette soluzioni.

b) Risolviamo il sistema nei casi $k \neq 0, 2$:

$$\begin{cases} 3x + ky + 2z = 2 \\ y + z = k \\ (k^2 - 2k)z = k^3 - 5k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-k^2 + 3k - 2}{k^2 - 2k} = \dfrac{1-k}{k} \\ y = \dfrac{-2k^2 + 5k - 3}{k^2 - 2k} \\ z = \dfrac{k^3 - 5k + 3}{k^2 - 2k} \end{cases}$$

.

□

Esercizio 7.13. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:

La matrice associata a al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$. Utilizzando il determinante, ricordiamo che il rango di una matrice corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero. Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = (1+k) \cdot \det \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = (1+k)k^3$$

Quindi il sistema ammette una unica soluzione quando $k \neq 0, -1$.

b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$ (senza la necessità di ridurre la matrice associata):

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 2 \\ x + 2w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 7.14. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di t il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ t & t-4 & | & 0 \\ 2 & 2-2t & | & 2t-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - tI \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ 0 & 2t-4 & | & -t^2+2t \\ 0 & 4-2t & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ 0 & 2t-4 & | & -t^2+2t \\ 0 & 0 & | & -t^2+2t \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $-t^2+2t=0$ se $t=0$ o $t=2$, e che $2t-4=0$ se $t=2$. Di conseguenza:
   - Se $t\neq 0,2$ allora $\text{rg}(A)=2<\text{rg}(A|b)=3$ quindi il sistema non è compatibile.
   - Se $t=0$ allora $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=2$ quindi il sistema è compatibile, e ammette una soluzione.
   - Se $t=2$ allora $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=1$ quindi il sistema è compatibile, e ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $t=0$:

$$\begin{cases} x_1-x_2=-2 \\ -4x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=0 \end{cases}$$

Se $t=2$ il sistema si riduce alla sola equazione $x_1-x_2=0$ le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1=k \\ x_2=k \end{cases} \quad \forall k\in\mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 7.15. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1-(k+1)x_2=k \\ 2x_1-2x_2=2k \\ (k+2)x_1+(k-2)x_2=0 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -k-1 & | & k \\ 2 & -2 & | & 2k \\ k+2 & k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \\ III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & k \\ 1 & -k-1 & | & k \\ k+2 & k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ II-I \\ III-(k+2)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & k \\ 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 2k & | & -k(k+2) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & k \\ 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 0 & | & -k(k+2) \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi:
   - Se $k\neq 0,-2$ allora $\text{rg}(A)=2<\text{rg}(A|b)=3$ quindi il sistema non è compatibile.
   - Se $k=-2$ allora $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=2$ quindi il sistema è compatibile, e ammette una soluzione.
   - Se $k=0$ allora $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=1$ quindi il sistema è compatibile, e ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k=-2$:

$$\begin{cases} x_1-x_2=-2 \\ -x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=0 \end{cases}$$

Se $k=0$ il sistema si riduce alla sola equazione $x_1-x_2=0$ le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 7.16. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx_1-x_4=1 \\ x_2+2x_3=0 \\ (k-1)x_1+(k-1)x_2=k-1 \\ kx_1+kx_2=2k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette soluzione, specificando se e quando ne ammette una o infinite.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, si determinino le sue soluzioni.*

Soluzione:
La matrice associata al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ k-1 & k-1 & 0 & 0 & | & k-1 \\ k & k & 0 & 0 & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Utilizziamo il determinante per calcolare $\text{rg}(A)$ e $\text{rg}(A|b)$.

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot [k(k-1) - k(k-1)] = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

Poiché $\det(A) = 0$, $\text{rg}(A) \leq 3$ per ogni k. Viceversa in $A|b$ troviamo la sottomatrice quadrata

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & | & k-1 \\ k & 0 & 0 & | & 2k \end{bmatrix}$$

che ha determinante

$$\det = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k-1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & 2k \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2)[2k(k-1) - k(k-1)] = -2(k^2 - k)$$

Tale determinante si annulla per $k = 0, 1$, quindi sicuramente se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A|b) = 4$.

Abbiamo così ottenuto che se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A) \leq 3$, mentre $\text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

Si tratta ora di considerare i due casi $k = 0$ e $k = 1$.

Se $k = 0$ otteniamo il sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -III \\ \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $k = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi anche se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Abbiamo visto che il sistema ha soluzione solo se $k \neq 0, 1$. Inoltre se $k = 0$ abbiamo ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = -1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Analogamente nel caso $k = 1$ abbiamo ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 2 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 2t + 1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 7.17. *Al variare del parametro reale k, si risolva il sistema di equazioni lineari omogenee:*

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice dei coefficienti associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 2k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & k \\ 1 & 0 & -2k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k-1 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro in corrispondenza dei pivot.

- Se $k = 0$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \quad S = \{(0, t, 0, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

  Notiamo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|0) = 3$. Poiché si tratta di un sistema in quattro incognite, nell'insieme delle soluzioni ci sono infinite soluzioni con un solo parametro libero (dato da $4 - \text{rg}(A)$).

- Se $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$S = \left\{ \left(t - s, -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s, t, s \right) \mid s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

  Notiamo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|0) = 2$. Poiché si tratta di un sistema in quattro incognite, nell'insieme delle soluzioni ci sono infinite soluzioni con due parametri libero (dato da $4 - \text{rg}(A)$).

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice dei coefficienti ha rango $3 < 4 =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette comunque infinite soluzioni con un solo parametro libero

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2(k-1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4k}{3}(1+k)t \\ x_2 = t \\ x_3 = -\frac{2k}{3}t \\ x_4 = \frac{4k}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad S = \left\{ \left(-\frac{4k}{3}(1+k)t, \ t, \ -\frac{2k}{3}t, \ \frac{4k}{3}t \right) \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

  Notiamo che abbiamo scelto x_2 come variabile libera in modo da non dovere dividere per k per determinare la soluzione. Inoltre con tale scelta non è in realtà necessario distinguere il caso $k = 0$ precedentemente discusso.

.

□

Esercizio 7.18. *Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) *Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*
b) *Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il sistema ha soluzione unica.*

Soluzione:
La matrice $A|b$ associata al sistema è:

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ k & 0 & 0 & k & | & 1 \end{bmatrix}$$

Per ridurre a gradini la matrice scambiamo la prima e terza colonna

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & k & k & \vert & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 1-2k & -1 & -1 & \vert & -1 \\ 0 & 0 & k & k & \vert & 1 \end{bmatrix}$$

a) Se $k \neq \frac{1}{2}$, 0, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (infinite) soluzioni. Se $k = \frac{1}{2}$ o $k = 0$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ha soluzione.
b) La matrice A è 3×4, quindi A ha sempre rango minore o uguale a tre, cioè minore del numero delle incognite e il sistema non può ammettere soluzione unica.

$\square$

Esercizio 7.19. *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \quad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = -(k+4) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2 \cdot [2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A): \begin{cases} x + 4y + 8w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 4z = 0 \\ 2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A) = \{(-4,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-4,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = -4$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 31II - 8I \\ \\ 2IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 31IV + 5II \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -966 \end{bmatrix}$$

$$N(A): \begin{cases} -31x + 4w = 0 \\ 31z - 218w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow N(A) = \{(0,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = -4$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

$\square$

Esercizio 7.20. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Indicare basi per lo spazio delle righe e per lo spazio delle colonne di A.*
b) *Esistono valori $t \in \mathbf{R}$ per cui il sistema $Ax = b$, con $b = (1,1,t,t)$ ammetta soluzione?*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ -1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & t \\ 0 & 1 & 1 & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-2I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & t-2 \\ 0 & 1 & 1 & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & t-4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

A questo punto della riduzione siamo già in grado di rispondere alle domande.

a) La matrice A ha rango due, inoltre

$$\mathcal{B}(\text{spazio delle colonne}) = \{(1,-1,2,0),\ (0,1,1,1)\}$$
$$\mathcal{B}(\text{spazio delle righe}) = \{(1,0,-2),\ (-1,1,3)\}$$

b) La matrice $A|b$ ha rango 3 per ogni valore di t, quindi il sistema $Ax = b$ non ammette mai soluzione.

□

Esercizio 7.21. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) *Si calcoli il rango di A.*

b) *Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II-3/2I \\ III+1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & k+2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice A ha rango 3 se $k \neq 1, -2$, ha rango 2 se $k = 1$ e ha rango 1 se $k = -2$.

b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$ se la matrice dei coefficienti ha rango 3 nel qual caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ per ogni $b \in \mathbf{R}^3$, ovvero se $k \neq 1, -2$.

□

Esercizio 7.22. *Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Notiamo che il vettore $xv_1 + yv_2 + zv_3$ è dato da:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = (2x - y + 3z,\ x + y - 2z,\ x + 2y - z)$$

quindi all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ associamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta del sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 1 & 1 & -2 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

dove A è la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2 e v_3, e b è dato dal vettore v_4. In generale passeremo direttamente dall'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ al sistema $A|b$ associato.

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. Riduciamo quindi la matrice a gradini:

$$\begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette (una unica) soluzione e v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

□

Esercizio 7.23. *Siano dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1, 1, 1), \qquad v_2 \equiv (2, 7, 7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2 + 2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k + 3, k^2 + 2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Soluzione:

Si tratta di stabilire se il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Consideriamo la matrice associata a tale sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 7 & k^2 + 2 & | & k + 3 \\ 1 & 7 & 3 & | & k^2 + 2 \end{bmatrix}$$

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

Riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{matrix} \\ II - I \\ III - II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & k^2 + 2 & | & k + 2 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & | & k^2 - k - 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il pivot della terza riga e distinguiamo i casi necessari.

- Se $k \neq \pm 1$ sia la matrice completa che quella incompleta hanno 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (una unica) soluzione. Di conseguenza v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = 1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = -1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

□

Esercizio 7.24. *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori formano una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

$$v_1 \equiv (1, 2, -2), \qquad v_2 \equiv (1, 1, -3), \qquad v_3 \equiv (3, 7, k - 6)$$

Soluzione:

Sappiamo che tre vettori di $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & k - 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k - 1 \end{bmatrix}$$

Ragionando sui ranghi:

- Se $k \neq 1$ la matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3 e $v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.
- Se $k = 1$ la matrice ha 2 pivot, quindi ha rango 2 e $v_1,\ v_2$ e v_3 non formano una base di $\mathbf{R}^3$.

In alternativa potevamo calcolare il rango utilizzando il determinante:

$$\det(A) = (k - 6 + 21) - (2k - 12 + 14) + 3(-6 + 2) = -k + 1$$

$v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$ se la matrice associata ha rango 3, ovvero se ha determinante non nullo, cioè $k \neq 1$.

$\square$

Esercizio 7.25.

a) *Mostrare che i vettori*

$$v_1 = (0, 1, 1), \quad v_2 = (-1, k, 0), \quad v_3 = (1, 1, k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$.

b) *Esprimere il vettore* $v = (2, 1, 2)$ *come combinazione lineare di* v_1, v_2, v_3.

Soluzione:

Per rispondere alla domanda a) dobbiamo verificare che l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ammette **solo** la soluzione nulla, ovvero che la matrice A associata ai tre vettori ha sempre rango 3.

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo verificare che l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ ammette soluzione (e non ha importanza se ne ammette una oppure infinite), ovvero che $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$, dove $A|b$ è la matrice associata all'equazione.

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo quindi direttamente a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & k & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & k & 1-k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ III + kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1+2k \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda ci interessa solo la matrice A dei cofficienti. La matrice dei coefficienti ha sempre rango 3, quindi l'equazionine $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ammette la sola soluzione nulla e v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti per ogni valore di k.

b) Risolviamo il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + kz = 2 \\ -y + z = 2 \\ z = 2k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2k^2 + k + 2 \\ y = 2k - 3 \\ z = 2k - 1 \end{cases}$$

Quindi

$$v = (-2k^2 + k + 2)v_1 + (2k - 3)v_2 + (2k - 1)v_3$$

è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

$\square$

Esercizio 7.26. *In* $\mathbf{R}^3$ *siano*

$$v_1 = (k, 2, 1), \quad v_2 = (-2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre vettori costituiscono una base di* $\mathbf{R}^3$.

b) *Per i valori trovati al punto* a), *si calcolino le coordinate del vettore* $v = (-2, 1, 2)$ *rispetto a tale base.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} k & -2 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ k & -2 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-2I \\ III-kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & -2 & -k & | & -2-2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -k-2 & | & -2k-8 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti ha rango 3 se $k \neq -2$, quindi v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$ se $k \neq -2$.
b) Risolviamo, per $k \neq -2$, il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -3 \\ (k+2)z = 2k+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{k+2} \\ y = \frac{-k+2}{k+2} \\ z = \frac{2k+8}{k+2} \end{cases}$$

Infine v ha coordinate $\left(-\dfrac{4}{k+2}, \dfrac{-k+2}{k+2}, \dfrac{2k+8}{k+2}\right)$ rispetto a $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

□

Esercizio 7.27. *Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0), \ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0), \ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di V.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 affiancata dal vettore v per rispondere a entrambe le domande.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \\ II+I \\ \Rightarrow III+2I \\ IV+I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \\ 1/2II \\ \Rightarrow 2III-II \\ IV-III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il rango di A è 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.
b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 = v$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale equazione (basta ignorare la terza colonna relativa a v_3). quindi

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \ v = 2v_1 + 2v_2, \qquad v = (2, 2)_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 7.28. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2, 1, 1), \qquad v_2 \equiv (-1, 1, 2), \qquad v_3 \equiv (3, -2, -1), \qquad v_4 \equiv (4, -1, -2).$$

Determinare una base di V. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Soluzione:
Dalla teoria sappiamo che m vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$ generano un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $m \leq n$. E' evidente che trattandosi di 4 vettori di $\mathbf{R}^3$ i vettori sono sicuramente linearmente dipendenti.

Per rispondere a entrambe le domande calcoliamo comunque il rango della matrice A associata ai quattro vettori riducendola a gradini, in modo da individuare quale (o quali) vettore dipende linearmente dagli altri.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo di Gauss otteniamo le matrici equivalenti

$$\begin{array}{c} \\ 2II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ 3III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che $\text{rg}(A) = 3$, quindi tre dei quattro vettori di partenza sono linearmente indipendenti. In particolare anche la matrice formata dalle prime tre colonne, ovvero da $v_1,\ v_2$ e v_3 ha rango 3. Quindi può essere presa come base di V l'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

Si tratta ora di esprimere v_4 come combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3, ovvero di risolvere l'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Notiamo che la riduzione a gradini della matrice associata a tale equazione vettoriale l'abbiamo già effettuata per determinare il rango della matrice associata ai quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3y - 7z = -6 \\ 10z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = -\frac{13}{10} \\ z = \frac{3}{10} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$v_4 = \frac{9}{10} v_1 - \frac{13}{10} v_2 + \frac{3}{10} v_3.$$

Inoltre si ha banalmente:

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3, \qquad v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3, \qquad v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

□

Esercizio 7.29. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (6,7,8,5)$$
$$v_3 \equiv (2k, k+8, 3k+3, 2), \qquad v_4 \equiv (0, 2k, 2k, 1).$$

Determinare una base di V al variare del parametro k. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k & 0 \\ 1 & 7 & k+8 & 2k \\ 2 & 8 & 3k+3 & 2k \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 0 \\ 1 & 7 & k+8 & 2k \\ 2 & 8 & 3k+3 & 2k \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2k \\ 0 & 2 & k+3 & 2k \\ 0 & 2 & 2-k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III - 1/2II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 2 & 4 & k \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & -2k-1 & 1-2k \end{bmatrix} = A'$$

Conviene non completare la riduzione e discutere a questo punto i valori del parametro. Infatti in generale durante le operazioni di riduzione non si ottiene necessariamente $\det(A) = \det(A')$, ma, poiché $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$, si ha che $\det(A) = 0$ sse $\det(A') = 0$. Possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A' per calcolare il rango di A:

$$\det(A') = 1 \cdot 2 \cdot [(k-1)(1-2k) - (-2k-1)k] = 2(4k-1)$$

Di conseguenza:

- Se $k \neq \dfrac{1}{4}$, si ha $\det(A') \neq 0$, quindi $\det(A) \neq 0$ e $\text{rg}(A) = 4$. Di conseguenza i quattro vettori sono linearmente indipendenti:
$$\dim(V) = 4,, \qquad \mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}\,.$$
Per esprimere ogni vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo la soluzione banale:
$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \qquad v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$$
$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \qquad v_4 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4$$
- Se $k = \frac{1}{4}$ si ha $\det(A) = \det(A') = 0$ e la matrice ha rango sicuramente minore di 4. Possiamo ora procedere con la riduzione
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 4II \\ 4III \\ 2IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$ e $v_1,\ v_2$ e v_3 (oppure $v_1,\ v_2$ e v_4) sono linearmente indipendenti.
$$\dim(V) = 3,, \qquad \mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\ \}\,.$$
Per esprimere v_4 in funzione degli elementi di tale base risolviamo l'equazione $xv_2+yv_2+zv_3 = v_4$ la cui matrice associata si riduce a
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & | & 0 \\ 0 & 8 & 16 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Tornando al sistema associato otteniamo
$$\begin{cases} x + 3y + \dfrac{1}{4}z = 0 \\ 8y + 16z = 1 \\ -3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{55}{24} \\ y = +\frac{19}{24} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
ovvero
$$v_4 = -\frac{55}{24} \cdot v_1 + \frac{19}{24} \cdot v_2 - \frac{1}{3} \cdot v_3$$

Inoltre:
$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3, \qquad v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3, \qquad v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

□

Esercizio 7.30. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori:*
$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1, 3, 0, 3), \qquad v_3 \equiv (-1, -2, 1, -1).$$
Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice A associata a tale insieme di vettori per stabilire se, o quali vettori sono linearmente indipendenti.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \\ 3k-2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
Utilizziamo il determinante. Consideriamo la sottomatrice B formata dalle prime 3 righe:
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = -(k - 1 + 2k^2 - 2) - (-3k^2 + 3) = k^2 - k$$
il cui determinante si annulla per $k = 0, 1$. Quindi:

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Di conseguenza $\dim(V) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \left\{(0, k-1, k^2-1, 3k-2),\ (1, 3, 0, 3),\ (-1, -2, 1, -1)\right\}.$$
- Se $k = 0$ la matrice A diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = \dim(V) = 2$. Inoltre
$$\mathcal{B}(V) = \{\ v_1,\ v_2\} = \{(0, -1, -1, -2),\ (1, 3, 0, 3)\}$$
- Se $k = 1$ la matrice A diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
Notiamo che A contiene la sottomatrice C:
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1 \cdot 3 \neq 0$$
Quindi anche per $k = 1$, $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \{(0, 0, 0, 1),\ (1, 3, 0, 3),\ (-1, -2, 1, -1)\}.$$

□

Esercizio 7.31. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:*
$$v_1 = (-1, 1, -1, 1), \qquad v_2 = (1, k, 3, 4), \qquad v_3 = (1, -1, k, 1), \qquad v_4 = (0, 0, 1, k)$$
Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai 4 vettori:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 3 & k & 1 \\ 1 & 4 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \\ III - I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & k \end{bmatrix}$$

Chiamiamo A' la matrice ridotta così ottenuta. Sappiamo che $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$. Sappiamo inoltre che il rango di una matrice corrisponde, oltre che al numero di pivot, al massimo ordine di una sottomatrice con determinante non nullo. Senza proseguire ulteriormente nella riduzione possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A' per calcolarne il rango:
$$\det(A') = -1 \cdot (k+1) \cdot [(k-1)k - 2] = -(k+1)(k^2 - k - 2)$$
e $\det(A') = 0$ se $k = -1$ o $k = 2$. Di conseguenza
- Se $k \neq -1, 2$, $\det(A') \neq 0$, quindi la matrice A ha rango 4, e $\dim(W) = 4$.
- Se $k = -1$ la matrice A' ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione A diventa
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
Questa contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-1(-2-5) \neq 0$.
Quindi A ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.

- Se $k = 2$ la matrice A' ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione diventa
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
Questa contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-3 \neq 0$.
Quindi anche in questo caso A ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.

In alternativa tutto l'esercizio poteva essere svolto completando la riduzione a gradini di A.

□

Esercizio 7.32. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$
$$v_1 = (3, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-6, 2, -4, 0), \quad v_3 = (-3, k, k-3, 0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema
$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & | & -3 \\ -1 & 2 & | & k \\ 2 & -4 & | & k-3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - 2/3I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Infine
– Se $k \neq 1$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
– Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La matrice ha rango 2, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.
Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:
– Se $k = 1$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi se $k = 1$, $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$.
– Se $k \neq 1$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$.

□

Esercizio 7.33. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$
$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k-6, 3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 2 & -4 & | & 6 \\ -1 & 2 & | & k-6 \\ 3 & -6 & | & 3k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+I \\ 1/3IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & k-3 \\ 0 & 0 & | & k-3 \end{bmatrix}$$

Infine

- Se $k \neq 3$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
- Se $k = 3$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 1, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.

Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k = 3$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi se $k = 3$, $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$. Analogamente la matrice, già ridotta, associata a v_1, v_2 e v_3 nel caso $k = 3$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = 1 \text{ e } \mathcal{B}(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = \{v_1\}$$

- Se $k \neq 3$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$. Analogamente la matrice, già ridotta, associata a v_1, v_2 e v_3 nel caso $k \neq 3$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = 2 \text{ e } \mathcal{B}(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = \{v_1,\ v_3\}$$

□

Esercizio 7.34. *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (3, 7, k+1, 2k+2),\ v_2 = (2, 2k+2, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (-3, -7, -1, 2k)$$

a) *Si determini la dimensione di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.
b) *Si determini una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:

Consideriamo la matrice A associata ai quattro vettori:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 7 & 2k+2 & 1 & -7 \\ k+1 & 0 & 0 & -1 \\ 2k+2 & 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo v_3 con v_1, ricordando poi tale scambio per rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2k+2 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II - I \\ \\ IV - 2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2k & 4 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k+2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 0, -1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 4$. Inoltre $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- Se $k = 0$, la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow III - 4II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  Quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$. Inoltre

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3, v_4\} = \{(3, 7, 1, 2),\ (1, 1, 0, 0),\ (-3, -7, -1, 0)\}.$$

- Se $k = -1$, la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$. Inoltre

$$\mathcal{B}(V) = \{v_2, v_3, v_4\} = \{(2, 0, 0, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (-3, -7, -1, -2)\}.$$

$\square$

Esercizio 7.35. *Determinare una base dei seguenti sottospazi W di $\mathbf{R}^3$:*

(1) $W = \langle (1, 2, 5), (-3, -6, -15) \rangle$
(2) $W = \langle (1, 2, 5), (-3, -6, -15), (2, 1, 0) \rangle$
(3) $W = \langle (-1, 2, 0), (0, 1, -1), (1, -1, 2) \rangle$

Soluzione:

(1) Determiniamo se i due vettori sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II - 2I \\ III - 5I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza $\text{rg}(A) = 1$ e

$$\dim(W) = 1, \qquad \mathcal{B} = \{(1, 2, 5)\}$$

(2) Determiniamo se i tre vettori sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \\ 5 & -15 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II - 2I \\ III - 5I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow 3III - 10II \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza $\text{rg}(A) = 2$ e

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B} = \{(1, 2, 5),\ (2, 1, 0)\}$$

(3) Determiniamo se i tre vettori sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice associata:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow II + 2I \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow III + II \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(W) = 3, \qquad \mathcal{B} = \{(-1, 2 - 0),\ (0, 1, -1),\ (1, -1, 2)\}$$

$\square$

Esercizio 7.36. *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^3$.
b) *Si determini la dimensione una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori:

$$A = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ k+3 & 3 & 3k \\ 0 & k+2 & k \end{bmatrix}$$

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$ se $\dim(V) = 3$, cioè se $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$. Calcoliamo quindi il determinante di A che è immediato sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\det(A) = (k+3)[3k - 3k(k+2)] = 3k(k+3)(-k-1)$$

Quindi se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti e $V = \mathbf{R}^3$.

b) Abbiamo già osservato che se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Inoltre:
   – Se $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -1$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e una possibile base è $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_2,\ v_3\}$.

$\square$

Esercizio 7.37. *Sia* V *lo spazio vettoriale generato dai vettori* $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ *e* $v_3 = (0, -1, 3, 0)$*:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3 \rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale* V.
(2) *Determinare se il vettore* $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ *appartiene a* V. *In caso positivo esprimere* v_4 *come combinazione lineare di* $v_1,\ v_2$ *e* v_3.
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale* $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$.

Soluzione:
Per potere rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ -2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 4 & -1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \\ III-4I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 7 & -1 & | & 7 \\ 0 & -9 & 3 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ IV \\ 1/3III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & 7 & -1 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+3II \\ IV-7II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora risponedere alle domande.

(1) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale V calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$.

.

(2) Per determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V consideriamo la matrice completa e torniamo al sistema associato:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza il vettore v_4 appartiene a V:

$$v_4 = v_1 + v_2$$

(3) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$ consideriamo la matrice completa B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso la matrice ha 3 pivot, quindi

$$\dim(W) = \mathrm{rg}(B) = 3$$

Notiamo che potevamo risponedere a questa domanda semplicemente osservando che dal punto predente sappiamo che $v \in V$, quindi $W = V$ e $\dim(W) = \dim(V) = 3$.

□

Esercizio 7.38. *Sia*

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k+3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k+6, -3)$ appartiene a V.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori v_1, v_2 e v_3, affiancata dalla colonna dei termini noti formata dal vettore v_4 (in modo da risolvere anche l'equazione

$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 1 & k+3 & 1 & | & 3 \\ 2 & 4 & 1 & | & k+6 \\ -1 & -2 & k^2-1 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$IV - (k^2-1)III \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -k(k^2-1) \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice A.
- Se $k \neq -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 3 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

- Se $k = -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 2 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3\}.$$

b) v_4 appartiene a V se il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione, ovvero se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

Notiamo che $-k(k^2-1) = 0$ se $k = 0, \pm 1$. Quindi
- Se $k \neq 0, \pm 1$, allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ e v_4 non appartiene a V.
- Se $k = 0$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
- Se $k = 1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
- Se $k = -1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 non appartiene a V.

□

Esercizio 7.39. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:*

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (0, k-1, k-1), \quad v_3 = (2, 1, k+5)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1, 3, 4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & k-1 & 1 & | & 3 \\ 2 & k-1 & k+5 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & k-1 & k+1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti. Dobbiamo distinguere tre casi:
   - Se $k \neq 1, -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2, \ v_3\}$$
   - Se $k = 1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1, \ v_3\}$$
   Notiamo che per $k = 1$ il vettore v_2 è il vettore nullo, quindi è ovviamente dipendente dagli altri due.
   - Se $k = -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla seconda colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2\}$$
   In questo caso anche la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2, quindi poteva essere preso come base di V anche l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, \ v_3\}$

b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere tre casi:
   - Se $k \neq 1, -2$ dalla matrice ridotta a gradini torniamo al sistema:
   $$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ (k-1)y - z = 2 \\ (k+2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{2}{k-1} \\ z = 0 \end{cases}$$
   Quindi $v_4 \in V$:
   $$v_4 = v_1 + \frac{2}{k-1} v_2$$
   Notiamo che se $k \neq 1, -2$, $\dim(V) = 3$, quindi $V = \mathbf{R}^3$ e necessariamente $v_4 \in V$.
   - Se $k = 1$ otteniamo la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -z = 2 \\ 0 = -6 \end{cases}$$
   L'ultima equazione risulta impossibile, quindi in questo caso $v_4 \notin V$:
   - Se $k = -2$ otteniamo la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -3y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + 5 \\ y = t \\ z = -3t - 2 \end{cases} \quad \forall \, t \in \mathbf{R}$$
   Anche in questo caso $v_4 \in V$:
   $$v_4 = (6t+5)\, v_1 + t \cdot v_2 + (-3t-2)\, v_3 \qquad \forall \, t \in \mathbf{R}$$
   In particolare, ponendo per esempio $t = 0$, otteniamo la combinazione $v_4 = 5v_1 - 2v_3$.

□

Esercizio 7.40. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (1, 0, 3, 1), \quad v_2 = (-3, -3, -3, 0), \quad v_3 = (0, k+1, k+1, 0), \quad v_4 = (k-1, 1, 3k-5, 2k-5),$$

dove k è un parametro reale, e sia $V = \langle v_1, v_2, v_2, v_4 \rangle$.

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio V coincide con* $\mathbf{R}^4$.
b) *Si determini la dimensione e una base di V al variare di k.*

Soluzione:

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^4$ se $\dim(V) = 4$, cioè se il rango della matrice associata a v_1, v_2, v_3, v_4 è 4. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 3 & -3 & k+1 & 3k-5 \\ 1 & 0 & 0 & 2k-5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-3I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 0 & 6 & k+1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & k-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \\ IV+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/3III \\ IV-1/3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

I quattro vettori sono linearmente indipendenti e quindi $V = \mathbf{R}^4$ se $k \neq -1, 3$

b) Dalla matrice ridotta otteniamo direttamente:
   - Se $k \neq -1, 3$, $\dim(V) = 4$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (o anche la base canonica di R^4 per esempio).
   - Se $k = -1$, $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_4\}$.
   - Se $k = 3$, $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Esercizio 7.41. *Si consideri l'insieme*

$$S = \{\ (k+1, k+1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il determinante della matrice associata ai quattro vettori

$$\det \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ k+1 & 2k & 3k & 5k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & 1 & k \end{bmatrix} = 2k \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$= 2k \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} = -2k(-k+1)$$

Se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante diverso da zero, quindi rango 4 e i vettori formano una base di $\mathbf{R}^4$.

b) Riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = v$ dove v_1, v_2, v_3, v_4 sono i vettori della base dopo avere posto $k = -1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ \\ I \\ II \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + z - w = 1 \\ -2y - 3z - 5w = 1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine le coordinate di v rispetto alla base trovata sono

$$v = (0, -2, 1, 0)_S$$

□

Esercizio 7.42. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 1, 1, 2), \quad v_2 = (0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (k, 0, 1, 1).$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*
b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori affiancata dalla matrice identica:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-kI \\ IV-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Dalla riduzione vediamo che $\text{rg}(A) = 2$ e

$$\mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_2\} \qquad (\text{oppure } \mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_3\}).$$

b) La matrice formata dalla prima, seconda, quarta e quinta colonna ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_2\}$$

□

Esercizio 7.43. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 0, 0, 0),\ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad (k \text{ parametro reale}).$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Soluzione:

a) Per rispondere anche alla domanda c) riduciamo a gradini la matrice $A|b$ in cui A ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la colonna corrispondente al vettore w.

$$\begin{bmatrix} k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ I \\ \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-kI \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3-k \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo la matrice A:
- Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2\}$.

c) Dalla matrice ridotta notiamo che
- Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \notin V$

b) Per $k = 0$ abbiamo preso come base di V l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Si tratta quindi di aggiungere a questi due vettori altri due vettori in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^4$. A tale scopo possiamo ridurre a gradini la matrice ottenuta affiancando a v_1 e v_2 i vettori della base canonica, in modo da individuare tra questi i vettori da aggiungere. Notiamo però che per $k = 0$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 0, 0)$, quindi evidentemente i vettori della base canonica da aggiungere per ottenere una base di $\mathbf{R}^4$ sono $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Infine la base cercata può essere

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_1, v_2, e_2, e_3\}$$

□

Esercizio 7.44. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{\ (-2, 0, 0),\ (1, k, -1),\ (1, -1, k)\ \}$$

a) *Trovare i valori del parametro k per cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore $k = 3$, determinare le coordinate dei vettori $v = (-3, 2, 1)$ e $w = (0, 1, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) Pochè si tratta di 3 vettori di $\mathbf{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}$ è una base sse i tre vettori che lo costituiscono sono linearmente indipendenti, cioè se la matrice associata ha rango 3. Riduciamo A a gradini:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + kII \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & -1+k^2 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3 se $k \neq \pm 1$, quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ per $k \neq \pm 1$.

In alternativa potevamo calcolare il determinante della matrice A

$$\det(A) = -2(k^2 - 1)$$

Poichè il determinante di A si annulla per $k = 1$ e per $k = -1$, la matrice A ha rango 3, cioè $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, per $k \neq \pm 1$.

b) Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i 3 vettori di $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (-2, 0, 0), \quad v_2 = (1, k, -1), \quad v_3 = (1, -1, k)$$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ _2, \ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, le coordinate di un vettore v di $\mathbf{R}^3$ rispetto a $\mathcal{B}$ corrispondono ai coefficienti della combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 con cui esprimiamo v:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v \;\Rightarrow\; v = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$$

Si tratta quindi di esprimere v e w come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere le due equazioni vettoriali

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v \qquad \text{e} \qquad xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

Per comodità riduciamo a gradini la matrice A affiancata dalle due colonne dei termini noti formate dalle componenti di v e w rispettivamente.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Per determinare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ risolviamo il sistema relativo alla prima delle due colonne dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 8 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -3 \\ 3y - z = 2 \\ 8z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{7}{8} \\ z = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Quindi v ha coordinate $\left(\dfrac{9}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{5}{8}\right)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Per determinare le coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$ risolviamo il sistema relativo alla seconda delle due colonne dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y - z = 1 \\ 8z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{8} \\ z = \frac{7}{8} \end{cases}$$

Quindi w ha coordinate $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{8}\right)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

□

Esercizio 7.45. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:* $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $w_1 = (2, 3, -1)$, $w_2 = (1, 2, 2)$, $w_3 = (1, 1, -3)$.

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione* $V \cap W$.

SOLUZIONE:

a) Riduciamo a gradini le matrici A e B associate ai vettori v_i e w_i rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$$
$$\dim(W) = \text{rg}(B) = 2$$

b) Dai risultati del punto precedente osserviamo che V e W sono sottospazi di $\mathbf{R}^3$ e che in particolare V ha dimensione 3, quindi $V = \mathbf{R}^3$. Di conseguenza:

$$V \cap W = \mathbf{R}^3 \cap W = W$$

Dai calcoli eseguinti nel punto precedente, tenendo conto che nello scrivere B abbiamo scambiato la naturale posizione di w_1 e w_3, otteniamo che:

$$\mathcal{B}(V \cap W) = \mathcal{B}(W) = \{w_3,\ w_2\}.$$

□

Esercizio 7.46. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$V = \langle (1, 0, 1),\ (1, 2, 1),\ (1, 0, 1) \rangle$$

a) *Determinare una base e la dimensione di* U *e di* V*.*
b) *Determinare una base e la dimensione di* $U \cap V$*.*
b) *Determinare una base e la dimensione di* $U + V$*.*

Soluzione:

a) Esplicitiamo U:

$$x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow U = \{(2s - t,\ s,\ t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (2, 1, 0),\ u_2 = (-1, 0, 1)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente esplicitiamo una base di V stabilendo quali tra i generatori sono linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 2, 1)\}$$

c) Conviene forse prima dimensione e base dello spazio $U+V$ in quanto si tratta dello spazio generato dai generatori dei due spazi

$$U + V = \langle v_1,\ v_2,\ u_1,\ u_2 \rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U + V) = \text{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U + V) = \{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 2, 1),\ u_1 = (2, 1, 0)\}$$

b) Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 1$$

Per determinare una base di $U \cap V$ possiamo procedere in due modi.

– MODO 1. Abbiamo visto che $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2\}$, quindi

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a + b,\ 2b,\ a + b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Ora si tratta di vedere quali di questi vettori appartengono a U. Poiché

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

possiamo imporre la condizione sul generico vettore v di V:

$$(a + b) - 2(2b) + (a + b) = 0 \ \Rightarrow\ 2a - 2b = 0 \ \Rightarrow\ a = b$$

Quindi $v \in U$ sse $a = b$, ovvero i vettori di V che appartengono anche a U sono del tipo:

$$(2b,\ 2b,\ 2b) = (2, 2, 2)b \quad b \in \mathbf{R}$$

Infine

$$U \cap V = \langle(2, 2, 2)\rangle \qquad \mathcal{B}(U \cap V) = \{(2, 2, 2)\}$$

Notiamo che $\dim(U \cap V) = 1$ come ci aspettavamo.

– MODO 2. Il seguente modo è più standard, ma i calcoli possono essere più complicati. Abbiamo già osservato che

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a + b,\ 2b,\ a + b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Analogamente $\mathcal{B}(U) = \{u_1, u_2\}$, quindi

$$U = \{u = (cu_1 + du_2) \mid c, d \in \mathbf{R}\} = \{u = (2c - d,\ c,\ d) \mid c, d \in \mathbf{R}\}$$

Quindi un vettore $w \in U \cap V$ se può essere scritto in entrambi i modi:

$$w = av_1 + bv_2 = cu_1 + du_2$$

per opportuni $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Si tratta di risolvere il sistema associato a $av_1 + bv_2 = cu_1 + du_2$, dove le incognite sono a, b, c, d:

$$\begin{cases} a + b = 2c - d \\ 2b = c \\ a + b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2c + d = 0 \\ 2b - c = 0 \\ a + b - d = 0 \end{cases}$$

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & |0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & |0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & |0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b - 2c + d = 0 \\ 2b - c = 0 \\ 2c - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}t \\ b = \frac{1}{2}t \\ c = t \\ d = t \end{cases}$$

Ponendo per esempio $t = 1$ e sostituendo in $w = cu_1 + du_2$ (o analogamente in $w = av_1 + bv_2$) otteniamo che $w = (1, 1, 1) \in U \cap V$. Infine

$$\mathcal{B}(U \cap V) = \{(1, 1, 1)\}$$

□

Esercizio 7.47. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$U = \{(0, 1, 1, 0)a + (0, 0, 0, 1)b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
c) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Soluzione:

a) Dalla definizione $U = \langle (0,1,1,0),\ (0,0,0,1) \rangle$, determinamo quindi se i due vettori sono linearmente indipendenti:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{quindi } v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono lin. indip.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(U) = \{u_1 = (0,1,1,0),\ u_2 = (0,0,0,1)\}, \qquad \dim(U) = 2$$

Esplicitiamo ora V risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = 2s \\ w = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1,-1,2,0),\ v_2 = (0,0,0,1)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

c) Lo spazio $U + V$ è lo spazio generato dai generatori dei due spazi

$$U + V = \langle v_1,\ v_2,\ u_1,\ u_2 \rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ IV \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ 3IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U + V) = \operatorname{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U + V) = \{v_1 = (0,1,1,0),\ v_2 = (0,0,0,1),\ u_1 = (1,-1,2,0)\}$$

b) Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 1$$

In questo caso senza eseguire calcoli possiamo osservare che il vettore $v_2 = (0,0,0,1) = u_2$ appartiene a entrambi gli spazi, quindi

$$\mathcal{B}(U \cap V) = \{(0,0,0,1)\}$$

□

Esercizio 7.48. *In* $\mathbf{R}^4$ *con il prodotto scalare canonico sia* U *il sottospazio dei vettori ortogonali al vettore* $(1,0,-1,0)$ *e sia* V *il sottospazio generato dai vettori* $(1,0,-2,3)$, $(-1,1,1,-4)$, $(1,1,-3,2)$.

Si trovino la dimensione e una base di U, V, $U \cap V$, $U + V$.

Soluzione:

Esplicitiamo U:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid x - z = 0\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \\ z = r \end{cases} \Rightarrow U = \{(t,\ s,\ t,\ r) \mid r,s,t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (1,0,1,0),\ u_2 = (0,1,0,0),\ u_3 = (0,0,0,1)\} \qquad \dim(U) = 3$$

Analogamente determiniamo una base di W stabilendo quali tra i generatori sono linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 2I \\ IV - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + II \\ IV + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1, 0, -2, 3),\ v_2 = (-1, 1, 1, -4)\}$$

Conviene prima determinare dimensione e base dello spazio $U + V$ in quanto si tratta dello spazio generato dai generatori dei due spazi

$$U + V = \langle U \cup V\rangle = \langle u_1,\ u_2,\ u_3,\ v_1,\ v_2\rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai cinque vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U + V) = \text{rg}(A) = 4$ e una base è

$$\mathcal{B}(U + V) = \{u_1 = (1, 0, 1, 0),\ u_2 = (0, 1, 0, 0),\ u_3 = (0, 0, 0, 1),\ v_1 = (1, 0, -2, 3)\}$$

Notiamo che $\dim(U + V) = 4$ e $U + V = \mathbf{R}^4$.

Usando la formula di Grassman otteniamo

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 1$$

Sappiamo che il generico vettore v di V è del tipo

$$v = xv_1 + yv_2 = (1, 0, -2, 3) \cdot x + (-1, 1, 1, -4) \cdot y = (x - y,\ y,\ -2x + y,\ 3x - 4y)$$

Inoltre un tale vettore appartiene anche a U se è ortogonale a $(1, 0, -1, 0)$. Imponendo quindi la condizione di ortogonalità otteniamo:

$$v \in U \cap V \text{ se } (x - y) \cdot 1 + (-2x + y) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$$

Infine

$$v \in U \cap V \text{ se } v = (2t - 3t,\ 3t,\ -4t + 3t,\ 6t - 12t) = (-1, 3, -1, -6)t$$
$$\mathcal{B}(U \cap V) = \{(-1, 3, -1, -6)\}$$

□

Esercizio 7.49. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle(1, -1, 0),\ (1, 1, -1)\rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi U e V.*
b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi $U + V$ e $U \cap V$.*

Soluzione:

a) Esplicitiamo U:

$$x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow U = \{(-t,\ s,\ t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$
$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1, 0, 1),\ u_2 = (0, 1, 0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (1, -1, 1)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

b) Lo spazio $U+V$ è lo spazio generato dai generatori (linearmente indipendenti) dei due spazi

$$U+V = \langle u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U+V) = \text{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U+V) = \{u_1 = (-1,0,1),\ u_2 = (0,1,0),\ v_1 = (1,-1,0)\}$$

Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 1$$

Per determinare una base di $U \cap V$, ricordando che $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$, possiamo scrivere

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a,b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a+b,\ -a-b,\ b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$$

Ora si tratta di vedere quali di questi vettori appartengono a U. Poiché

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z = 0\}$$

possiamo imporre la condizione $x+z=0$ al generico vettore v di V:

$$a+b+b = 0 \ \Rightarrow \ a = -2b$$

Quindi $v \in U$ sse $a = -2b$, ovvero i vettori di V che appartengono anche a U sono del tipo:

$$(-b,\ b,\ b) = (-1,1,1)b, \qquad a \in \mathbf{R}$$

Infine

$$U \cap V = \langle (-1,1,1) \rangle \qquad \mathcal{B}(U \cap V) = \{(-1,1,1)\}$$

Notiamo che $\dim(U \cap V) = 1$ come ci aspettavamo.

□

Esercizio 7.50. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z = 0\right\}$$
$$V = \langle (2,-1,-2),\ (-3,4,3) \rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Soluzione:

U e V sono due sottospazi di $\mathbf{R}^3$. Per dimostrare che $U = V$, dobbiamo dimostrare che $\dim(U) = \dim(V)$ e che $U \subseteq V$ oppure che $V \subseteq U$.

Cominciamo ad esplicitare U:

$$x+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow U = \{(-t,\ s,\ t) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1,0,1),\ u_2 = (0,1,0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (2,-1,-2),\ v_2 = (-3,4,3)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\dim(U) = \dim(V) = 2$.

In questo caso è probabilmente più semplice verificare che $V \subseteq U$. Infatti abbiamo per U una doppia definizione:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z = 0\right\} = \langle\ (-1,0,1),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Utilzzando la prima definizione è immediato verificare che i due generatori v_1 e v_2 di V appartengono a U, infatti entrambi sono vettori di $\mathbf{R}^3$ che verificano la condizione $x+z=0$. Otteniamo quindi:

$$v_1 \in U \quad \text{e} \quad v_2 \in U \ \Rightarrow \ V = \langle v_1,\ v_2 \rangle \subseteq U.$$

Infine abbiamo dimostrato che V è un sottospazio di U della stessa dimensione di U, quindi U e V coincidono.

In alternativa per dimostrare che $U \subseteq V$ avremmo dovuto considerare la matrice formata da v_1, v_2, u_1, u_2 come colonne. Tale matrice ha rango 2, quindi u_1 e u_2 sono linearmente dipendenti da v_1 e v_2 e $U \subseteq V$.

$\square$

Esercizio 7.51. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1,1,2,1) + a_2(0,-1,-1,3) + a_3(0,2,0,0) + a_4(0,0,0,1)$$

Siano

$$v_1 = (1,1,2,1), \qquad v_2 = (0,-1,-1,3), \qquad v_3 = (0,2,0,0), \qquad v_4 = (0,0,0,1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

In alternativa si può utilizzare il determinante, sviluppato rispetto alla quarta colonna:

$$\det(A) = 1 \cdot [-2(-1)] = 2 \neq 0$$

Poiché il deteminante della matrice A associata ai 4 vettori ha determinante non nullo, $\mathrm{rg}(A) = 4$, quindi i 4 vettori sono linearmenti indipendenti e una base di S è l'insieme $\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$\square$

Esercizio 7.52. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1,1,2,1) + a_2(-1,0,-1,3) + a_3(2,0,0,0) + a_4(0,0,0,1)$$

Siano

$$v_1 = (1,1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,-1,3), \qquad v_3 = (2,0,0,0), \qquad v_4 = (0,0,0,1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

□

Esercizio 7.53. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*

b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:

Notiamo che

$$v = a_1(1,1,2,1) + a_2(-1,0,-1,3) + a_3(2,0,0,0) + a_4(1,0,0,0)$$

Siano

$$v_1 = (1,1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,-1,3), \qquad v_3 = (2,0,0,0), \qquad v_4 = (1,0,0,0)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3 e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti tra loro, quindi una base può contenerne solo uno dei due; di conseguenza nella ricerca della base potevamo considerare dall'inizio solo i vettori v_1, v_2 e v_3 per verificare se sono linearmente indipendenti.

In alternativa si può utilizzare il determinante. $\det(A) = 0$, quindi i quattro vettori sono linearmente dipendenti e non possono formare una base di S. Osservando che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti consideriamo la matrice formata da v_1, v_2 e v_3:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice quadrata B' formata dalle prime tre righe è

$$\det(B') = -2 \cdot (-1) = 2 \neq 0$$

quindi $\mathrm{rg}(B') = 3$ e v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Di conseguenza una base di S è l'insieme $\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Esercizio 7.54. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(2,1,1,1,0) + a_2(1,-1,-1,3,1) + a_3(0,-3,0,1,0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,1,1,1,0), \quad v_2 = (1,-1,-1,3,0), \quad v_3 = (0,-3,0,1,0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).
b) Si tratta di stabilire quali vettori tra $v_1,\ v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \\ IV - II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 3IV + 4II \\ 3V + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 7.55. *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0,1,1,1,-2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:
Notiamo che

$$w = a_1(2,2,1,0,1) + a_2(-1,0,0,1,-4) + a_3(-1,-1,0,0,1)$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,2,1,0,1), \qquad v_2 = (-1,0,0,1,-4), \qquad v_3 = (-1,-1,0,0,1)$$

W è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se i tre vettori, o eventualmente quali, sono linearmente indipendenti. Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, o di una parte di essi. Per rispondere a entrambe le domande dobbiamo quindi ridurre a gradini la matrice associata ai tre vettori

v_1, v_2 e v_3, e al vettore v.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & -4 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \\ II - I \\ \Rightarrow 2III - II \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -4 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV - II \\ V + 4II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ V - III \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata a v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di W è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Si tratta di esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = y = z = 1$$

Infine le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1)$.

□

Esercizio 7.56. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*

b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{ \ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

E' ora evidente che ogni elemento di S si può scrivere nella forma

$$(0, -1, 1) \cdot t$$

quindi una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1)\}$$

□

Esercizio 7.57. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*

b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che
$$\begin{cases} x-2y+kz=k-1 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+4ky-2z=0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k=1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k=1$:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow x-2y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2s-t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$
Quindi
$$S=\{\ (2s-t,s,t)\mid s,t\in\mathbf{R}\}$$
Separiamo le variabili nella scrittura del generico elemento di S:
$$(2s,s,0)+(-t,0,t)=(2,1,0)\cdot s+(-1,0,1)\cdot t$$
Quindi S è generato dall'insieme
$$\mathcal{B}=\{(2,1,0),\ (-1,0,1)\}$$
Per come è stato calcolato, e comunque sarebbe immediato verificarlo, l'insieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, quindi si tratta effettivamente di una base di S.

$\square$

Esercizio 7.58. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*
$$S=\left\{x\in\mathbf{R}^5 \mid x_1-x_2+2x_5=k,\ x_1+x_3+kx_4=0\right\}.$$
a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a), *trovare una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema lineare formano un sottospazio sse si tratta di un sistema omogeneo. Di conseguenza deve essere $k=0$.
b) Risolviamo il sistema omogeneo ottentuto per $k=0$
$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_5=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$$
riducendo la matrice associata a gradini:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-r \\ x_2=-r+2t \\ x_3=r \\ x_4=s \\ x_5=t \end{cases} \qquad \forall\ r,s,t\ \in\ \mathbf{R}$$
Infine
$$\begin{aligned} S&=\{(-r,-r+2t,r,s,t)\mid r,s,t\in\mathbf{R}\ \} \\ &=\{(-1,-1,1,0,0)\cdot r\ +\ (0,0,0,1,0)\cdot s\ +\ (0,2,0,0,1)\cdot t \mid r,s,t\in\mathbf{R}\ \} \end{aligned}$$
e una base di S è
$$\mathcal{B}(S)=\{\ (-1,-1,1,0,0),\ (0,0,0,1,0),\ (0,2,0,0,1)\ \}$$

□

Esercizio 7.59. *Sia W il sottinsieme di $\mathbf{R}^5$ definito da*

$$W = \big\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 - x_3 + kx_4 + x_5 = 0,\ x_2 - 3x_4 = k,\\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0\ \big\}$$

Stabilire per quali valori di k l'insieme W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ e calcolarne una base e la dimensione.

Soluzione:

Sappiamo che le soluzioni di un sistema di equazioni lineari formano un sottospazio solamente se si tratta di un sistema omogeneo, di conseguenza W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ se $k = 0$.

Per determinare la dimensione di W (per $k = 0$) calcoliamo esplicitamente le soluzioni riducendo a gradini la matrice associata al sistema lineare.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = 3h \\ x_3 = s \\ x_4 = h \\ x_5 = t \end{cases} \quad \forall s, t, h \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} W &= \{(1,0,1,0,0)s + (-1,0,0,0,1)t + (0,3,0,1,0)h \ : \ s,t,h \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle\ (1,0,1,0,0),\ (-1,0,0,0,1),\ (0,3,0,1,0)\ \rangle \end{aligned}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W) = \{\ (1,0,1,0,0),\ (-1,0,0,0,1),\ (0,3,0,1,0)\ \} \quad \text{e} \quad \dim(W) = 3$$

Notiamo che anche senza calcolare esplicitamente le soluzioni potevamo ottenere

$$\dim(W) = n - \text{rg}(A) = 5 - \text{rg}(A) = 3$$

□

Esercizio 7.60.

a) *Trovare una base del sottospazio V di $\mathbf{R}^5$ così definito:*

$$V = \{x \in \mathbf{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\}.$$

b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^5$ contenente la base di V trovata in* a).

Soluzione:

Determiniamo le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = r + 2s - 2t \\ x_2 = 3r + 3s - 4t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases} \quad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$V = \langle (1,3,1,0,0),\ (2,3,0,1,0),\ (-2,4,0,0,1) \rangle$$

a) Dalla risoluzione del sistema omogeneo segue che

$$\mathcal{B}(V) = \{(1,3,1,0,0),\ (2,3,0,1,0),\ (-2,4,0,0,1)\}$$

b) Per completare la base $\mathcal{B}$ basta osservare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 5, quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^5) = \{(1,3,1,0,0),\ (2,3,0,1,0),\ (-2,4,0,0,1),\ (1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0)\}$$

□

Esercizio 7.61. *Sia*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k+1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k+2, \right.$$
$$\left. 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema formano uno spazio vettoriale sse il sistema è omogeneo:

$$\begin{cases} k+1=0 \\ 2k+2=0 \end{cases} \Rightarrow\ k=-1$$

b) Cerchiamo le soluzioni del sistema nel caso $k=-1$ riducendo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 16 & 12 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{3}{8}t \\ x_3 = t \\ x_4 = -2t \end{cases} \quad \forall\ t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, 1, -2\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Infine

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, -2, 1\right) \right\}, \qquad \dim(S) = 1$$

□

Esercizio 7.62. *Sia S l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} -x_1 + (k-1)x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (k+1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + (2-2k)x_4 = k-2 \\ x_1 + 4x_2 + (2k-2)x_3 + (1-k)x_4 = 2-k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Stabilire per quali k l'insieme S è uno spazio vettoriale e in tali casi determinarne una base.*
b) *Esplicitare S al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Soluzione:

L'insieme S è uno spazio vettoriale quando si tratta delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi per $k=2$. Per rispondere ad entrambe le domande effettuiamo comunque la riduzione a gradini per ogni valore di k.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & k-1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2-2k & | & k-2 \\ 1 & 4 & 2k+2 & 1-k & | & 2-k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-I \\ III+2I \\ IV+I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & k-2 \\ 0 & 4 & 2k+2 & 0 & | & 2-k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-2II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2-k \end{bmatrix}$$

a) Abbiamo già osservato che S è uno spazio vettoriale se $k=2$, nel quale caso le soluzioni sono

$$\begin{cases} -x_1+x_4=0 \\ 2x_2+3x_3=0 \\ 2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=t \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=t \end{cases} \Rightarrow \quad S=\langle(1,0,0,1)\rangle$$

Infine per $k=2$ una base di S è $\mathcal{B}(S)=\{(1,0,0,1)\}$.

b) Dalla matrice ridotta vediamo che il sistema ammette soluzione quando $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)$, cioè quando $k=2$. In tale caso abbiamo già trovato S al punto precedente: $S=\langle(1,0,0,1)\rangle$. Per $k\neq 2$ il sistema non ammette soluzioni, quindi $S=\emptyset$.

□

Esercizio 7.63. *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A=\begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*

b) *Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax=0$, nel caso $k=1$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{r} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III-kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-k^2 & -1-k \end{bmatrix}$$

Quindi

- Se $k\neq -1$ la matrice A ha rango 3.
- Se $k=-1$ la matrice A ha rango 2.

b) Ponendo $k=1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y+z+w=0 \\ -2z-2w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \\ w=-t \end{cases} \qquad \forall t\in\mathbf{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$N(A)=\{\ (-1,0,1,-1)\cdot t \mid t\in\mathbf{R}\ \}$$

e una base del nucleo è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(N(A))=\{\ (-1,0,1,-1)\ \}$$

□

Esercizio 7.64.

a) *Sia*

$$V = \langle\ (1,2,1),\ (-1,3,0),\ (3,1,2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0\ \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

SOLUZIONE:

a) Calcoliamo il rango della matrice A associata ai tre vettori riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/5II \\ III-5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 2$$
$$\mathcal{B}(V) = \{\ (1,2,1),\ (-1,3,0)\ \}$$

b) Associamo al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \dots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che i conti sono già stati eseguiti al punto precedente. Quindi

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

e

$$\dim(S) = 1$$
$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-2,1,1)\ \}$$

c) Notiamo che con la stessa matrice abbaimo risolto due esercizi differenti tra cui in genere è facile confondersi. La relazione tra i due esercizi, oltre alla medesima riduzione della matrice, è solo legata alle dimensioni:

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(S) = \text{numero delle incognite} - \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(V) + \dim(S) = \text{numero delle incognite}$$

□

Esercizio 7.65. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori:*

$$v_1 = (0,1,2,0,1), \quad v_2 = (k,1,2,0,2), \quad v_3 = (0,0,0,k,1)$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*

b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^5$.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matriceformata dai tre vettori affiancata dalla matrice identica I_5.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & k & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III \\ V \\ I \\ IV \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-I \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ IV \\ V \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-kII \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 0 & k & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 0 & k & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) Se $k \neq 0$, $\mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, mentre se $k = 0$, $\mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_2\}$
b) Se $k \neq 0$ possiamo prendere come base di $\mathbf{R}^5$ l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_1,\ e_2\}$, mentre se $k = 0$ possiamo prendere l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_2,\ e_4\}$

□

Esercizio 7.66. *Dati i vettori linearmente indipendenti* $v_1 = (3, 0, 1)$ *e* $v_2 = (1, 4, -2)$ *completare l'insieme* $S = \{v_1, v_2\}$ *in modo da ottenere una base di* $\mathbf{R}^3$.

Soluzione:

Si può completare la base utilizzando uno dei vettori canonici. Si tratta quindi di affiancare a v_1 e v_2 i tre vettori canonici di $\mathbf{R}^3$, per verificare quale di questi forma assieme a v_1 e v_2 un insieme linearmente indipendente. Riduciamo quindi a gradini la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III-I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 4III+7II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza qualsiasi dei vettori della base canonica forma con v_1 e v_2 una matrice di rango 3, ovvero un insieme linearmente indipendente. Possiamo prendere per esempio

$$\mathcal{B} = \{(3, 0, 1),\ (1, 4, 2),\ (1, 0, 0)\}$$

□

Esercizio 7.67. *Siano*

$$v_1 = (1, -1, -1, 1),\ v_2 = (k, 1, 1, -1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) *Si trovino i valori del parametro* k *per i quali* v_1 *e* v_2 *sono indipendenti.*
b) *Per* $k = 2$*, si estenda l'insieme* $\{v_1, v_2\}$ *a una base di* $\mathbf{R}^4$.

Soluzione:

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice costituita da v_1 e v_2 e dai quattro vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) I due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti quando la matrice ad essi associata ha rango 2. Di conseguenza v_1 e v_2 sono indipendenti se $k \neq -1$.
b) Ponendo $k = 2$ nella matrice ridotta otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una base di $\mathbf{R}^4$ deve essere formata da quattro vettori. Dalla matrice notiamo che se aggiungiamo alle prime due colonne, corrispondenti a v_1 e v_2, la quarta e quinta colonna (per esempio) otteniamo una matrice di rango quattro. Quindi i quattro vettori corrispondenti sono linearmente indipendenti e una base di $\mathbf{R}^4$ è data dall'insieme:

$$\{ \ v_1, \ v_2, \ (0,1,0,0), \ (0,0,1,0) \ \}$$

□

Esercizio 7.68. *Si consideri l'insieme S costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1,2,2,1), \qquad v_2 = (2,1,2,1), \qquad v_3 = (0,1,2,1)$$

a) *E' possibile estendere S a una base di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S.*

Soluzione:
Per rispondere ad entrambi i quesiti riduciamo a gradini la matrice ottenuta dalla matrice associata ai 3 vettori, affiancata dalla matrice associata ai vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-II \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III+II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 2IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai vettori v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e S può essere esteso a una base di $\mathbf{R}^4$.
b) Dalla matrice completa vediamo che la prima, seconda, terza e sesta colonna sono linearmente indipendenti, quindi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$ contenente S è data da

$$\mathcal{B} = \{ \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ e_3 = (0,0,1,0) \ \}$$

□

Esercizio 7.69. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (2,1,-1,3), \quad v_2 = (1,0,5,1), \quad v_3 = (2,-1,3,1).$$

a) *Stabilire se il vettore $v = (0,0,1,0)$ è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
b) *Completare l'insieme $\{v_1, \ v_2, \ v_3\}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Soluzione:
Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ affiancati dai quattro vettori della base canonica $e_1,\ e_2,\ e_3 = v$ e e_4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 2II - I \\ III + II \\ IV - 3II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & | & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + 5II \\ IV + II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & | & -5 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice formata dalle prime tre colonne e dalla sesta, corrisponedente all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -18 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice completa e incompleta hanno rango uguale, quindi il sistema ammette soluzione e v è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

b) La matrice formata dalle prime quattro colonne ha rango quattro, quindi l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_1\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$.

$\square$

Esercizio 7.70. *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0\ \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare una base di V.*

Soluzione:
Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,\quad a_i \in \mathbf{R}$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. A $p(x)$ possiamo associare le sue componenti $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$ formata dai polinomi $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$. Quindi a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$ possiamo associare il vettore $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4$.

Nel nostro caso la condizione $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:

$$W = \left\{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$

cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

a) L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.
b) Per trovare una base di V determiniamo una base di W per poi tornare ai polinomi.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi il generico elemento di W ha la forma

$$(-1, 1, 0, 0) \cdot r + (-1, 0, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 0, 1) \cdot t$$

e una base di W è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 1, 0, 0),\ (-1, 0, 1, 0),\ (-1, 0, 0, 1)\}$$

Associamo ora ai vettori determinati i corrispondenti polinomi:

$$\begin{aligned}(-1,1,0,0) &\Rightarrow p_1(x) = -1 + x \\ (-1,0,1,0) &\Rightarrow p_2(x) = -1 + x^2 \\ (-1,0,0,1) &\Rightarrow p_3(x) = -1 + x^3\end{aligned}$$

Infine l'insieme

$$\mathcal{B}(V) = \left\{p_1(x) = -1 + x,\ p_2(x) = -1 + x^2,\ p_3(x) = -1 + x^3\right\}$$

è una base di V.

□

Esercizio 7.71. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned}p_1 &= (0,1,1) \\ p_2 &= (1,2,1) \\ p_3 &= (-1,1,0)\end{aligned}$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(1, -1, 2)$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 7.72. *Si considerino i polinomi* $p_1 = x^2 + ax + b + c,\ p_2 = x^2 + bx + a + c,\ p_3 = x^2 + cx + a + b$.

a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri* a, b, c *i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}[x]$.
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio* $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ *al variare di* a, b, c.

Soluzione:
Associamo ad ogni polinomio il vattore che esprime le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}[x]$:

$$p_1 = (1, a, b+c), \qquad p_2 = (1, b, a+c), \qquad p_3 = (1, c, a+b)$$

Possiamo quindi svolgere l'esercizio lavorando sui tre vettori.

Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - aI \\ III - (b+c)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai tre vettori ha sempre rango minore di tre, quindi i tre vettori e i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Dal punto a) sappiamo che $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha sicuramente dimensione minore di tre. Inoltre
   - Se $a = b = c$, allora la matrice ha rango 1 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 1. Una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1\}$ (o da $\{p_2\}$ o da $\{p_3\}$).
   - Se $a \neq b$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalle prime due colonne ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_2\}$.
   - Se $a \neq c$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalla prima e terza colonna ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_3\}$.

□

Esercizio 7.73. *Sia S il sottoinsieme dello spazio dei polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ così definito:*

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare la dimensione di S.*

Soluzione:

a) Si tratta di dimostrare che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   - S è chiuso rispetto a $+$, infatti presi due elementi di S anche la loro somma sta in S:
   $$(p_1 + p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = 0$$
   - S è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di S e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in S:
   $$(\lambda p)(0) = \lambda \cdot p(0) = \lambda \cdot 0 = 0$$
b) Per calcolare la dimensione di S osserviamo innanzitutto che imponendo la condizione $p(0) = 0$ otteniamo:
   $$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx \mid a, b, c \in \mathbf{R}\ \}$$
   Vogliamo dimostrare che il polinomi $p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x$ costituiscono una base di S. Infatti
   - $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$ sono linearmente indipendenti: se
   $$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0 \ \Rightarrow\ ax^3 + bx^2 + cx = 0 \text{ (polinomio nullo)}$$
   allora $a = b = c = 0$.
   - Per come abbiamo esplicitato S è evidente che ogni elemento di S si può scrivere come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$.

   Di conseguenza $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$ formano una base di S e S ha dimensione 3.

□

Esercizio 7.74. *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Soluzione:

Come negli esercizi precedenti associamo a $p(x)$ le sue componenti rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$, $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad p = (d, c, b, a)$$

Imponiamo le due condizioni al generico polinomio di grado al più 3:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \ \Rightarrow \ d = 0 \\ p(1) = 0 \ \Rightarrow \ a+b+c+d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$$

Quindi a W corrisponde il sottospazio V formato dagli elementi di $\mathbf{R}^4$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$V = \{(d, c, b, a) \in \mathbf{R}^4 \mid d = 0, \ a+b+c = 0\}$$

Scriviamo ora le soluzioni di tale sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a = -s-t \\ b = s \\ c = t \\ d = 0 \end{cases} \qquad \forall s, t, \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$V = \langle \ (0, 0, 1, -1), \ (0, 1, 0, -1) \rangle$$

Infine

$$W = \langle p_1(x) = x^2 - x^3, \ p_2(x) = x - x^3 \ \rangle$$

□

Esercizio 7.75. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. In particolare ai polinomi $p_1, \ p_2, \ p_3$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 1, 0)$$
$$p_2 = (k, 0, -1)$$
$$p_3 = (1, 2, k)$$

Di conseguenza i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

Per rispondere a entrambe le domande dell'esercizio riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori a cui affianchiamo la matrice identica 3×3.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & | & -1 & 1 & -k \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la prima parte della matrice: se $k \neq \pm 1$ la matrice associata ai vettori $p_1, \ p_2, \ p_3$ ha rango 3, quindi i tre vettor isono linearmente indipendenti. Analogamente i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Se $k = \pm 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e dalla matrice ridotta ricaviamo che p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti. Inoltre considerando tutta la matrice possiamo notare che la prima, la seconda e la quarta colonna (per esempio) sono linearmente indipendenti. Ricordiamo che la quarta colonna corrisponde al vettore $(1, 0, 0)$ ovvero al polinomio $q = x^2$. Quindi:
   – Se $k = 1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = x^2 - 1, \quad q = x^2\right\}$$

– Se $k = -1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{ p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = -x^2 - 1, \quad q = x^2 \right\}$$

$\square$

Esercizio 7.76. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{ a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{ x^2, \quad x, \quad 1 \right\}$. Di conseguenza p_1, p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti sse lo sono i tre vettori

$$p_1 = (1, 1, 0), \; p_2 = (k, 0, -1), \; p_3 = (1, 2, k)$$

a) Riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - kIII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere tre casi

– Se $k^2 - 1 \neq 0$, ovvero $k \neq \pm 1$ la matrice ha rango 3, quindi $p_1, \; p_2$ e p_3 sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ o $k = -1$ la matrice ha rango 2, quindi $p_1, \; p_2$ e p_3 sono linearmente dipendenti.

b) Risolviamo l'equazione $xp_1 + yp_2 + zp_3 = 0$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale sistema (senza la colonna nulla dei termini noti). Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$-2t \cdot p_1 + t \cdot p_2 + t \cdot p_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e, per esempio $p_3 = 2p_1 - p_2$.

– Se $k = -1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$-2t \cdot p_1 - t \cdot p_2 + t \cdot p_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e, per esempio $p_3 = 2p_1 + p_2$.

$\square$

Esercizio 7.77. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2, \qquad p_2(x) = 3x + 4, \qquad p_3(x) = -x^2 + 6x + 6$$

e sia $W = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ generato da p_1, p_2 e p_3.

a) *Si determini la dimensione e una base di W.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il polinomio $f_k(x) = (k+1)x^2 + 3kx + 4$ appartiene a W.*

SOLUZIONE:
A ogni polinomio $a_2x^2+a_1x+a_0$ di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare il vettore (a_2,a_1,a_0) formato dalle coordinate del polinomio rispetto alla base canonica $\{x^2,x,1\}$. In questo caso otteniamo quindi i vettori

$$p_1=(1,0,2),\quad p_2=(0,3,4),\quad p_3=(-1,6,6),\quad f_k=(k+1,3k,4)$$

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo calcolare la dimensione di $\langle p_1,p_2,p_3\rangle$, mentre per rispondere alla seconda domanda dobbiamo verificare se l'equazione $xp_1+yp_2+zp_3=f_k$ ammette soluzione. Consideriamo quindi direttamente la matrice $A|b$ che ci permette di rispondere anche alla seconda domanda.

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&|&k+1\\0&3&6&|&3k\\2&4&6&|&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\\1/3II\\1/2III-I\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-1&|&k+1\\0&1&2&|&k\\0&2&4&|&-k+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\\ \\III-2II\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-1&|&k+1\\0&1&2&|&k\\0&0&0&|&-3k+1\end{bmatrix}$$

a) $\dim(W)=\text{rg}(A)=2$. Inoltre

$$\mathcal{B}(W)=\{p_1(x),\ p_2(x)\}=\{x^2+2,\quad 3x+4\}.$$

b) $f_k(x)$ appartiene a W se il sistema $A|b$ ammette soluzione. Per Rouché Capelli questo succede solo se $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|b)=2$, cioè se $k=\dfrac{1}{3}$.

□

Esercizio 7.78. *Nello spazio vettoriale $V=\mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1=x-1,\quad p_2=x+1,\quad p_3=x^2-x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B}=\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

SOLUZIONE:
Ricordiamo che a ogni polinomio $a_0x^2+a_1x+a_2\in\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0,a_1,a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B}=\left\{x^2,\quad x,\quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1,p_2 e p_3 associamo i tre vettori

$$p_1=(0,1,-1),\quad p_2=(0,1,1),\quad p_3=(1,-1,0)$$

Quindi i polinomi p_1,p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1,p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio costante 1 associamo il vettore $f=(0,0,1)$, e le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ si trovano risolvendo il sistema $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=f$.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix}0&0&1&|&0\\1&1&-1&|&0\\-1&1&0&|&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}III\\ \\I\end{matrix}\begin{bmatrix}-1&1&0&|&1\\1&1&-1&|&0\\0&0&1&|&0\end{bmatrix}\Rightarrow II+I\begin{bmatrix}-1&1&0&|&1\\0&2&-1&|&1\\0&0&1&|&0\end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1,p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow\begin{cases}-x_1+x_2=1\\2x_2-x_3=1\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\x_2=\dfrac{1}{2}\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\quad 1=-\frac{1}{2}\cdot p_1(x)+\frac{1}{2}\cdot p_2(x)$$

□

Esercizio 7.79. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3.*

a) *Si mostri che* $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = f(2) = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* V *e se ne trovi una base.*
b) *Si completi la base trovata al punto precedente ad una base di* V*.*

SOLUZIONE:

Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di V. Le due condizioni $f(1) = f(2) = 0$ si esplicitano in

$$a + b + c + d = 0, \qquad 8a + 4b + 2c + d = 0$$

Inoltre a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dalle sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$. In particolare al generico polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ associamo il vettore (a, b, c, d) di $\mathbf{R}^4$, e all'insieme U possiamo associare l'insieme

$$U' = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a + b + c + d = 0, \quad 8a + 4b + 2c + d = 0\right\}$$

a) L'insieme U' è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzione di un sistema omogeneo. Analogamente l'insieme U è uno spazio vettoriale.

Per determinare una base di U', e quindi di U, risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II - 8I} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}s + \frac{3}{4}t \\ b = -\frac{3}{2}s - \frac{7}{4}t \\ c = s \\ d = t \end{cases}$$

Quindi una base di U' è

$$\mathcal{B}(U') = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right),\ \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right) \right\} \text{ ovvero } \mathcal{B}(U') = \{(1, -3, 2, 0)\,,\ (3, -7, 0, 2)\}$$

e la corrisponedente base di U è

$$\mathcal{B}(U) = \left\{x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 3x^3 - 7x^2 + 2\right\}$$

b) Basta notare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (1, -3, 2, 0)\,,\ (3, -7, 0, 2)\}$$

è una base di $\mathbf{R}^4$, e la corrisponedente base di V, completamento della base di U, è

$$\mathcal{B}(V) = \left\{x^3, \quad x^2, \quad x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 3x^3 - 7x^2 + 2\right\}$$

□

Esercizio 7.80. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 2 - x, \qquad p_2(x) = -x + x^2, \qquad p_3(x) = 3 + x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$*.*
b) *Esprimere* $f(x) = 1 + 2x + 2x^2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$*.*

SOLUZIONE:

Ricordiamo che a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{1,\ x,\ x^2\right\}$. Di conseguenza ai polinomi $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ e $f(x)$ possiamo associamo i tre vettori

$$p_1 = (2, -1, 0) \qquad p_2 = (0, -1, 1) \qquad p_3 = (3, 1, -1) \qquad f = (1, 2, 2)$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre per esprimere il polinomio $f(x)$ come combinazione lineare di $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ equivale a esprimere il vettore f come combinazione lineare di p_1, p_2, p_3, ovvero a risolvere l'equazione $ap_1+bp_2+cp_3 = f$.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ -1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II+I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & 5 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III+II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & 5 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & | & 9 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente idipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato all'equazione $ap_1 + bp_2 + cp_3 = f$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3c = 1 \\ -2b+5c = 5 \\ 3c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = -4 \cdot p_1(x) + 5 \cdot p_2(x) + 3 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 7.81. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = 2x + x^2 - x^3, \; p_2(x) = 1 - x + x^2, \; p_3(x) = 3 + x - x^3, \; p_4(x) = x^2 + x^3$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x), \; p_2(x), \; p_3(x), \; p_4(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = (x+1)^3$ *come combinazione lineare di* $p_1(x), \; p_2(x), \; p_3(x), \; p_4(x)$.

Soluzione:

A ogni polinomio associamo il vettore formato dalle sue coordinate rispetto alla base canonica $\{1, \; x, \; x^2, \; x^3\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$p_1(x) \;\to\; p_1 = (0, 2, 1, -1) \qquad p_2(x) \;\to\; p_2 = (1, -1, 1, 0)$$
$$p_3(x) \;\to\; p_3 = (3, 1, 0, -1) \qquad p_4(x) \;\to\; p_4 = (0, 0, 1, 1)$$

I quattro polinomi formano una base di $\mathbf{R}_3[x]$ sse i quattro vettori $p_1, \; p_2, \; p_3, \; p_4$ formano una base di $\mathbf{R}^4$. Inoltre associamo al polinomio $f(x)$ il corrispondente vettore:

$$f(x) = (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \;\to\; f = (1, 3, 3, 1)$$

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo quindi risolvere l'equazione $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = f$.

Per rispondere a entrambe le domande consideriamo quindi la matrice associata ai cinque vettori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \\ IV+I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+3II \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/2III \\ 5IV+2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & 15 \end{bmatrix}$$

a) Il rango della matrice associata a p_1, p_2, p_3, p_4 è quattro, quindi i quattro vettori sono linearmente indipendenti e l'insieme $\{p_1(x), \; p_2(x), \; p_3(x), \; p_4(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Tornando al sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_4 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = p_1(x) - \frac{1}{2}\,p_2(x) + \frac{1}{2}\,p_3(x) + \frac{5}{2}\,p_4(x)$$

□

Esercizio 7.82. *Dati i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2x, \ p_2(x) = x^2 - x, \ p_3(x) = 2x + 1$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x), \ p_2(x), \ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$
b) *Esprimere* $f(x) = 3x^2 - 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x), \ p_2(x), \ p_3(x)$.

Soluzione:

Associamo a ogni polinomio il vettore dato dalle sue coordinate rispetto alla base canonica $\{x^2, \ x, \ 1\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai tre polinomi $p_i(x)$ e la polinomio $f(x)$ associamo i vettori

$$p_1 = (1, 2, 0), \quad p_2 = (1, -1, 0), \quad p_3 = (0, 2, 1), \quad f(3, 0, -2)$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo direttamente la matrice necessaria per il punto b):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2II \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & -3 & 2 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la matrice dei coefficienti. I tre polinomi formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$. Poiché $\text{rg}(A) = 3$ i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Dalla matrice ridotta otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y + 2z = -6 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{3} p_1(x) + \frac{2}{3} p_2(x) - 2 p_3(x)$$

□

Esercizio 7.83. *Sia* W *il sottoinsieme dello spazio di polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$ *definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0, \ p(1) = 0\}$$

(p''' *è la derivata terza di* p*)*

a) *Mostrare che* W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Trovare una base e la dimensione di* W.
c) *Determinare le coordinate del polinomio* $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Soluzione:

a) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo innanzitutto verificare che W è un sottoinsieme di $\mathbf{R}_2[x]$. In effetti la condizione $p''' = 0$ applicata al generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$ diventa $6a = 0$. Quindi se $p(x) \in W$ deve essere del tipo $p(x) = bx^2 + cx + d$ cioè un elemento di $\mathbf{R}_2[x]$. Inoltre W può essere riscritto come

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$$

Per dimostrare ora che si tratta di un sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
– W è chiuso rispetto alla somma, infatti presi due elementi di W anche la loro somma sta in W:

$$(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 + 0 = 0$$

– W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di W e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in W:

$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Traducendo la condizione $p(1) = 0$ sui coefficienti del generico elemento $bx^2 + cx + d$ di $\mathbf{R}_2[x]$ otteniamo $b + c + d = 0$, ovvero $d = -b - c$. Quindi ogni elemento di W è del tipo

$$p(x) = bx^2 + cx - b - c = b(x^2 - 1) + c(x - 1)$$

I due polinomi, linearmente indipendenti, $p_1(x) = x^2 - 1$ e $p_2(x) = x - 1$ costituiscono una base di W, quindi

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^2 - 1, \ p_2(x) = x - 1\right\}$$

c) Per determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata la cosa più semplice è forse associare ad ogni polinomio le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2, \quad x, \quad 1\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai polinomi $p_1(x),\ p_2(x),\ p(x)$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 0, -1), \quad p_2 = (0, 1, -1), \quad p = (2, -1, -1)$$

Risolviamo quindi l'equazione $xp_1 + yp_2 = p$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Infine $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$, ovvero $p(x)$ ha coordinate $(2, -1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

□

Esercizio 7.84. *Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$).

a) *Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.*
b) *Determinare una base di S.*

Soluzione:

a) Notiamo che la condizione percé una matrice 2×2 appartenga a S è che gli elementi di posto $1, 2$ e $2, 1$ siano uguali.
Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.
– SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

due generici elementi di S. Allora

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$$

– PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix} \in S$$

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \\ &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di S. Infatti:
– Abbiamo appena visto che il generico elemento di S si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

– Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 7.85. *Sia S il sotinsieme dello spazio delle matrici $M_{3,2}(\mathbf{R})$ così definito:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_{3,2}(\mathbf{R})$.*
b) *Determinare un insieme generatore di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
– Siano A e B due generici elementi di S:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loro somma $A + B$ è la matrice

$$A + B = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che è ancora un elemento di S
– Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ e $A \in S$ allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che è ancora un elemento di S.

b) Un possibile insieme generatore è

$$I = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Infatti ogni matrice $A \in S$ si può scrivere nella forma:

$$A = aM_1 + bM_2$$

□

Esercizio 7.86.

a) *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.
b) *Determinare una base di W.*

Soluzione:

a) Verifichiamo le due proprietà richieste per un sottospazio vettoriale.

– SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3a_1 & -a_1+b_1 \\ a_1 & -2a_1+b_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3a_2 & -a_2+b_2 \\ a_2 & -2a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

due generici elementi di W. Allora

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 3a_1+3a_2 & -a_1+b_1-a_2+b_2 \\ a_1+a_2 & -2a_1+b_1-2a_2+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(a_1+a_2) & -(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2) & -2(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = a_1+a_2 \\ b = b_1+b_2 \end{cases}$$

Quindi $A_1 + A_2 \in W$.

– PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix}$$

un generico elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 3(\lambda a) & -\lambda a+\lambda b \\ \lambda a & -2(\lambda a)+\lambda b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a' & -a'+b' \\ a' & -2a'+b' \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{cases}$$

Quindi $\lambda A \in W$.

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a \\ a & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un insieme generatore di W. Dobbiamo ora verificare se A e B sono linearmente indipendenti, ovvero se l'equazione $xA + yB = 0$ ha la sola soluzione nulla $x = y = 0$:

$$xA + yB = \begin{bmatrix} 3x & -x+y \\ x & -2x+y \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $xA + yB = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -x+y = 0 \\ x = 0 \\ -2x+y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

Quindi A e B sono linearmente indipendenti e una base di W è data da

$$\mathcal{B} = \{A, \ B\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 7.87. *Si consideri il sottospazio*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a+b+3c & 2b-6c \\ a+3b-7c & 4a+8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.

a) *Determinare una base di* S.

b) *Stabilire se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ *(ed in caso positivo esprimere* A *come combinazione lineare della base trovata in* a)*).*

Soluzione:

a) La generica matrice di S la possiamo scrivere nella forma
$$a \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$
Quindi se
$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$
lo spazio S è $S = \langle A_1,\ A_2,\ A_3 \rangle$. Per determinare una base di S dobbiamo stabilire quante e quali di tali matrici sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$. La matrice dei coefficienti associata a a tale sistema è
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I \\ \\ III \\ 1/4IV \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ III - 3I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 24 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{matrix} \\ \\ 1/8III \\ 1/3IV \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La matrice ha rango 2 quindi il sistema ammette infinite soluzioni, le tre matrici sono linearmente dipendenti e $\dim(S) < 3$. Inoltre la matrice dei coefficienti associata all'equazione $xA_1 + yA_2 = 0$, una volta ridotto diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
In questo caso l'equazione ammette solo la soluzione nulla, quindi A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(S) = 2$ e una base di S è data da
$$\mathcal{B}(S) = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
b) Si tratta di risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 = A$ ovvero il sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2y = 0 \\ x + 3y = \frac{2}{3} \\ 4x + y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \\ 4x = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$
Infine
$$A = \frac{2}{3} A_1$$
□

Esercizio 7.88. *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*
$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$
a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora
$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$
   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.

– **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M) A$$

Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} -8a-7c & -8b-7d \\ a & b \end{bmatrix}$$
$$MA = \begin{bmatrix} -8a+b & -7a \\ -8c+d & -7c \end{bmatrix}$$

Quindi

$$MA = AM \Rightarrow \begin{cases} -8a-7c = -8a+b \\ -8b-7d = -7a \\ a = -8b+d \\ b = -7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+7c = 0 \\ 7a-8b-7d = 0 \\ a+8b-d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-7I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-8II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a = -8t+s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{bmatrix} -8t+s & -7t \\ t & s \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \mid \forall s,t \in \mathbf{R} \right\}$$

Di conseguenza S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\square$

Esercizio 7.89. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$. *Dimostrare che* S *è un sottospazio di* $M_2(\mathbf{R})$ *e calcolarne la dimensione.*

Soluzione:

Sia

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$. Cominciamo a calcolare gli elementi di S:

$$AM = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -2x+2z & -2y+2w \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

$$MA = \begin{bmatrix} x-2y & -x+2y \\ z-2w & -z+2w \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Chiamiamo B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

S è quindi formato dai multilpli di B. E' perciò immediato dimostare che si tratta di un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}$:

- SOMMA. Se A_1 e A_2 appartengono a S, allora $A_1 = t_1 \cdot B$ e $A_2 = t_2 \cdot B$ per opportuni $t_1, t_2 \in S$, quindi

$$A_1 + A_2 = t_1 \cdot B + t_2 \cdot B = (t_1 + t_2) \cdot B \ \in \ S$$

- PRODOTTO per scalari. Sia $A = t \cdot B$ un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora

$$\lambda A = \lambda \cdot t \cdot B = (\lambda \cdot t) \cdot B \ \in \ S$$

In particolare S è uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato dalla matrice B.

□

Esercizio 7.90. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini una base del sottospazio* $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}$.
b) *Mostrare che il sottoinsieme* $W = \{X \in U : X$ *è invertibile*$\}$ *non è un sottospazio vettoriale di* U.

Soluzione:
Sia

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$.

$$AX = \begin{bmatrix} x+kz & y+kw \\ 2x+3z & 2y+3w \end{bmatrix} \qquad XA = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ z+2w & kz+3w \end{bmatrix}$$

Da $AX = XA$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x+kz = x+2y \\ y+kw = kx+3y \\ 2x+3z = z+2w \\ 2y+3w = kz+3w \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -2y+kz = 0 \\ kx+2y-kw = 0 \\ 2x+2z-2w = 0 \\ 2y-kz = 0 \end{cases}$$

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2III \\ I \\ II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-kI \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z - w = 0 \\ -2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -s + t \\ y = \frac{k}{2}s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

a) Abbiamo ottenuto che

$$\mathcal{B}(U) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) W non è un sottospazio in quanto, per esempio, non contiene l'elemento nullo. Infatti la matrice nulla

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è invertibile.

□

Esercizio 7.91. *Sia $W = \langle A,\ B\ , C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Cominciamo a stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolvento l'equazione matriciale $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y + (k-1)z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y + (k-1)z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti:

$$\dim(W) = 3$$
$$\mathcal{B}(W) = \{A,\ B,\ C\}$$

- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t$, $y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti. In particolare A è la matrice nulla e $A = 0 \cdot B + 0 \cdot C$ dipende linearmente da B e C. Se studiamo invece la dipendenza di B e C risolvendo l'equazione $yB + zC = 0$ otteniamo la sola soluzione $y = z = 0$ quindi B e C sono linearmente indipendenti (Infatti B e C non sono una multiplo dell'altra). Di conseguenza

$$\dim(W) = 2$$
$$\mathcal{B}(W) = \{B,\ C\}$$

$\square$

Esercizio 7.92. *Sia* $V = \langle A, B, C\rangle$ *il sottospazio di* $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ *dove*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la dimensione e una base di* V.
b) *Si esprima* $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *come combinazione lineare della base trovata al punto* a).

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione di V cominciamo a verificare se A, B e C sono linearmente indipendenti risolvendo il sistema $xA + yB + zC = 0$:

$$x\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+2y+2z & y+3z \\ x+3y+7z & 2x+4y+8z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2y+2z = 0 \\ y+3z = 0 \\ x+3y+7z = 0 \\ 2x+4y+8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 3 & 7 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ III-1/2I \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \\ IV-III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi il sistema $xA + yB + zC = 0$ ammette infinite soluzioni. Di conseguenza le tre matrici A, B, C sono linearmente dipendenti e $\dim(V) < 3$. Dai conti appena svolti si vede inoltre che risolvendo l'equazione $xA + yB = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+2y = 0 \\ y = 0 \\ x+3y = 0 \\ 2x+4y = 0 \end{cases}$$

che ammette la sola soluzione $x = y = 0$, quindi le matrici A e B sono linearmente indipendenti. Infine $\dim(V) = 2$ e una base di V è data dall'insieme $\{A, B\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Procedendo come nel punto precedente otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+2y = 2 \\ y = 2 \\ x+3y = 5 \\ 2x+4y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad D = -A + 2B$$

$\square$

Esercizio 7.93. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se* A, B *e* C *sono linearmente indipendenti in* $M_2(\mathbf{R})$.
b) *Si determini una base del sottospazio* $\langle A, B, C\rangle$.

Soluzione:

a) Le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti se l'equazione $xA + yB + zC = 0$ ha la sola soluzione $x = y = z = 0$. La matrice $xA + yB + zC$ è:

$$xA + yB + zC = \begin{bmatrix} x+2z & 2x+3y+7z \\ -3x-6z & y+z \end{bmatrix},$$

quindi l'equazione $xA + yB + zC = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ 2x+3y+7z=0 \\ -3x-6z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & 3 & 7 & | & 0 \\ -3 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III+3I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni, quindi A, B e C sono linearmente dipendenti. Notiamo che $2tA + tB - tC = 0 \ \ \forall t \in \mathbf{R}$, quindi in particolare $C = 2A + B$.

b) Abbiamo appena osservato che C è linarmente dipendente da A e B. Viceversa le matrici A e B sono linearmente indipendenti in quanto non sono una multiplo dell'altra, quindi una base del sottospazio $\langle A, B, C\rangle$ è $\{A, B\}$.

□

Esercizio 7.94. *Sia $V = \langle A,\ B,\ C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*

b) *Si stabilisca per quali k la matrice D appartiene a V. In tali casi si esprima D come combianzione lineare della base trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione e una base di V bisogna stabilire quante e quali tra le matrici A, B e C sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA + yB + zC = 0$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} 2x+2z=0 \\ x+4y+9z=0 \\ 2x+4y+10z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 4 & 9 & | & 0 \\ 2 & 4 & 10 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II-1/2I \\ III-I \\ IV-1/2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 1/4II \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

Il sistema $xA + yB + zC = 0$ ammette infinite soluzioni, quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti. Viceversa, risolvendo il sistema $xA + yB = 0$ otteniamo ol sistema equivalente

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=y=0$$

quindi A e B sono linearmente indipendenti. Infine

$$\dim(V) = 2, \qquad \mathcal{B}(V) = \{A, B\}.$$

b) Per esprimere D come combinazione lineare della base trovata dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Ripercorrendo i conti fatti precedentemente, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x=6 \\ x+4y=k-2 \\ 2x+4y=2 \\ x=k+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 6 \\ 1 & 4 & | & k-2 \\ 2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 0 & | & k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II-1/2I \\ III-I \\ IV-1/2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 4 & | & k-5 \\ 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 0 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzione solo se $k = 1$, quando otteniamo

$$\begin{cases} x=3 \\ 4y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad D = 3A - B \quad \text{se } k=1.$$

Se $k \neq 1$ la matrice D non appartiene a V.

$\square$

Esercizio 7.95. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base.*

a) *Mostrare che l'insieme $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$ è una sua base di V.*
b) *Calcolare le coordinate del vettore $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{B}'$.*

SOLUZIONE:

a) Essendo V di dimensione 4 è sufficiente verificare che i quattro vettori di $\mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti. Calcoliamo le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_2 + v_3 &= (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_3 + v_4 &= (0, -0, 1, 1)_{\mathcal{B}} \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

I quattro vettori sono linearmente indipendenti se la matrice associata ha rango 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi anche $\mathcal{B}'$ è una base di V.

b) Le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ in quanto $v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4$. A questo punto per trovare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}'$ è sufficiente risolvere l'equazione: $x(v_1 + v_2) + y(v_2 + v_3) + z(v_3 + v_4) + wv_4 = v$, dove tutti i vettori sono espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Infine $v = (1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}'}$.

$\square$

Esercizio 7.96. *Si consideri l'insieme S di matrici 3×3*

$$S = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbf{R}) \ : \ a_{11} + a_{12} = a_{32} + a_{33} = 0\}.$$

a) *Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbf{R})$. In caso affermativo, trovarne la dimensione.*
b) *Sia $Sim_3(\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali simmetriche 3×3. Trovare una base dello spazio intersezione $S \cap Sim_3(\mathbf{R})$.*

SOLUZIONE:

a) Imponendo le condizioni $a_{11} + a_{12} = a_{32} + a_{33} = 0$ alla generica matrice di $M_3(\mathbf{R})$ otteniamo che la generica matrice di S è del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}A_1 + a_{13}A_2 + a_{21}A_3 + a_{22}A_4 + a_{23}A_5 + a_{31}A_6 + a_{33}A_7$$

dove

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$S = \langle\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7\ \rangle$$

è lo spazio vettoriale generato dalle 7 matrici A_i. Inoltre le 7 matrici sono linearmente indipendenti, quindi una base di S è

$$\mathcal{B}(S) = \{\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7\ \}$$

e $\dim(S) = 7$.

b) La generica matrice A di S appartiene a $Sim_3(\mathbf{R})$ se $a_{21} = -a_{11},\ a_{31} = a_{13},\ a_{23} = -a_{33}$, quindi la generica matrice di $S \cap Sim_3(\mathbf{R})$ ha la forma:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{13} \\ -a_{11} & a_{22} & -a_{33} \\ a_{13} & -a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}B_1 + a_{13}B_2 + a_{22}B_3 + a_{33}B_4$$

dove

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1 - A_3 \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_2 + A_6$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_4 \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A_7 - A_5$$

Notiamo che le 4 matrici B_i sono linearmente indipendenti, quindi

$$\mathcal{B}(S \cap Sim_3(\mathbf{R})) = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4\}$$

$\square$

Esercizio 7.97. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A + A^T = 0\right\}.$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che ogni elemento di W ha rango minore di 3.*

Soluzione:

Notiamo che la condizione $A^T = -A$ ci dice che le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

   due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ -x-a & 0 & z+c \\ -y-b & -z-c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ -(x+a) & 0 & z+c \\ -(y+b) & -(z+c) & 0 \end{bmatrix} \in W$$

   Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda x & \lambda y \\ -\lambda x & 0 & \lambda z \\ -\lambda y & -\lambda z & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Calcoliamo il determinante della generica matrice A di W:

$$\det(A) = -x \cdot (yz) + y \cdot (xz) = -xyz + xyz = 0$$

Poiché il determinante di A è zero, il rango di A è minore di 3.

□

Esercizio 7.98. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A = A^T,\ tr(A) = 0\right\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*

b) *Trovare una base di W.*

c) *Calcolare le coordinate di* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Soluzione:

Notiamo che la condizione $A^T = A$ implica che le matrici di W siano simmetriche. Inoltre la condizione $tr(A) = 0$ implica che la somma degli elementi della diagonale principale sia 0. Di conseguenza le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \qquad \text{con } a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

– SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & w & t \\ z & t & -x-w \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, w, t, a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ b+y & d+w & e+t \\ c+z & e+t & -a-x-d-w \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d & \lambda e \\ \lambda c & \lambda e & -\lambda a - \lambda d \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$

$$= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5\}$.

c) È immediato verificare che $B = 2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_4 + 3A_5$, di conseguenza le coordinate di B rispetto alla base trovata al punto precedente sono $(2, 1, 1, -1, 3)_{\mathcal{B}}$.

□

Esercizio 7.99. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per } i \geq j\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che per ogni matrice A in W, la matrice A^2 ha rango minore di 2.*

Soluzione:

L'insieme W è formato dalle matrici triangolari superiori

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

– SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ 0 & 0 & z+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ 0 & 0 & z+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda x & \lambda y \\ 0 & 0 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Calcoliamo A^2

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza se $x = 0$ o $z = 0$ otteniamo la matrice nulla di rango zero, altrimenti $\mathrm{rg}(A^2) = 1$. In ogni caso $\mathrm{rg}(A^2) \leq 1$.

$\square$