CAPITOLO 8

Applicazioni lineari

Esercizio 8.1. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. *Stabilire se* T *è lineare.*

Esercizio 8.2. *Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici* $M_{2\times 2}$ *avalori in* $\mathbf{R}$ *non è lineare.*

Esercizio 8.3. *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Esercizio 8.4. *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

Esercizio 8.5. *Determinare una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Esercizio 8.6. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

a) *Verificare che* T *è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di* T.
c) *Determinare la matrice* A *associata a* T *(rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare* $T(1,2)$ *usando la definizione e usando la matrice* A.

Esercizio 8.7. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita sulla base canonica di* $\mathbf{R}^2$ *nel seguente modo:* $T(e_1) = (1,2,1)$, $T(e_2) = (1,0,-1)$.

a) *Esplicitare* $T(x,y)$.
b) *Determinare la matrice* A *associata a* T *(rispetto alle basi canoniche).*
c) *Stabilire se* $(3,4,1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.8. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che* $T(v) = Av$ *con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di* T.
b) *Stabilire se* $(-3,2,1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.9. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T *del piano* $\pi : \quad x + 2y = 0$.

Esercizio 8.10. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *un parametro reale.*

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di* T *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.
b) *Determinare una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$ *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 8.11. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da*
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$
rispetto alle basi canoniche.

a) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Esercizio 8.12. *Sia $T :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*
$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T.*

Esercizio 8.13. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
rispetto alle basi canoniche.

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Stabilire per quale valore di k il vettore $v_k = (k, k, k)$ appartiene all'immagine di T.*

Esercizio 8.14. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 3x_3, -2x_3 + x_4, 0, x_1 - x_2 + x_4)$$
rispetto alle basi canoniche.

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva*
b) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.15. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*
$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*
b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Esercizio 8.16. *Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$*
$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Esercizio 8.17.

a) *Verificare che le relazioni*
$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$
definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.
b) *Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.*
c) *Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.*

Esercizio 8.18. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*
$$T(x, y, z) = (2x, y, 0)$$

(1) *Dato il vettore $w = (2, -1, 1)$, calcolare $T(w)$.*
(2) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(3) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.*
(4) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$.
(5) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
(6) *Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e alla base canonica $\mathcal{C}$ dello spazio di arrivo.*
(7) *Determinare le componenti del vettore $w = (2, -1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

(8) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* B.

Esercizio 8.19. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x, y + z)$$

(1) *Verificare che* T *è un'applicazione lineare.*
(2) *Dato il vettore* $w = (1, 1, 1)$, *calcolare* $T(w)$.
(3) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(4) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* A.
(5) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ *e* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(6) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *con* $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.
(7) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *e alla base canonica di* $\mathbf{R}^2$.
(8) *Determinare la matrice* P *di cambiamento di base dalla base canonica* $\mathcal{C}$ *alla base* $\mathcal{B}$.
(9) *Determinare le componenti del vettore* $w = (1, 1, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *utilizzando la matrice* P *(o meglio* P^{-1}*).*
(10) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* B.

Esercizio 8.20. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x + y,\ x + y,\ y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (3, -1, -5)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k. *In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Esercizio 8.21. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (x + y,\ kx + y + z,\ kx + y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (0, 1, -1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k. *In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Esercizio 8.22. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

Stabilire se T *è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro* k.

Esercizio 8.23. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di* T *al variare del parametro reale* k.
b) *Determinare la dimensione di immagine e nucleo di* T *al variare di* k.

Esercizio 8.24. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w,\ -x + 2y - z,\ -x + y + 3z - 3w)$$

(1) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.*
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^4$*

Esercizio 8.25. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + 3z,\ x - y + (k + 3)z + 2w,\ 2x - 3y + (k + 6)z + (k + 1)w)$$

dove k è un parametro reale.

Stabilire se esistono valori di k per cui T è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 8.26. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Esercizio 8.27. *Sia k un parametro reale e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4, -kx_1 + x_3, x_3 + kx_4)$$

a) *Determinare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Si dica se T è iniettivo e/o suriettivo.*

Esercizio 8.28. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + 2ax_2 + x_3, bx_1 + 2bx_2 + x_3).$$

a) *Si determinino gli eventuali valori reali di a e b per i quali T è suriettiva.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T al variare di a e b.*

Esercizio 8.29. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Esercizio 8.30. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se T invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.*

Esercizio 8.31. *Detto k un paramtro reale, sia*

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

a) *Si trovino, al variare di k, nucleo e immagine dell'endomorfismo T_A di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice A.*
b) *Stabilire per quali valori $k \in \mathbf{R}$ la funzione lineare T_A è invertibile.*

Esercizio 8.32. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k - 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare di k.*

Esercizio 8.33. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base del nucleo di T e una base dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*

Esercizio 8.34. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ 3x - z,\ 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z,\ x - y + z,\ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Esercizio 8.35. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x + y,\ 2x - y - z,\ 2y + z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1, 2, -4),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, -7)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Stabilire se T è iniettivo e/o suriettiva.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$*

Esercizio 8.36. *Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.*
b) *Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori*

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Esercizio 8.37. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da*

$$T(x, y, z) = (3x - 2y,\ x + y + z,\ 2x - 3y - z)$$

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}$.*
c) *Trovare la distanza euclidea tra il punto $P = (1, 1, 1)$ e il nucleo $N(T)$.*

Esercizio 8.38. *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 0, 2)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Si stabilisca se T è iniettivo e/o suriettivo.*

Esercizio 8.39. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base costituita dai vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T.*

Esercizio 8.40. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$*, e siano* $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (1,1)\ \}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ *due basi di* $\mathbf{R}^2$ *e* $\mathbf{R}^3$ *rispettivamente. Determinare la matrice* $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*.*

Esercizio 8.41. *Sia* $V = \mathbf{R}^3$ *e siano* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ *rispettivamente la base canonica e un'altra base di* V*.*
- a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{B}'$*.*
- b) *Svolgere l'esercizio precedente utilizzando la matrice* P*.*

Esercizio 8.42. *Sia* $T\ :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x-z, 2x+y, x-3y)$$

- a) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *costituita dai vettori* $v_1 = (1,0,0)$*,* $v_2 = (1,0,-1)$*,* $v_3 = (0,1,1)$*.*
- b) *Si trovi una base dell'immagine di* T*.*
- c) *Il determinante di una matrice associata a* T *può essere nullo?*

Esercizio 8.43. *Sia* $S\ :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita da*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1, x_2 - 3x_3).$$

- a) *Sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori* $v_1 = (1,1,1)$*,* $v_2 = (1,1,0)$*,* $v_3 = (1,0,0)$ *e sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$*. Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S*.*
- b) *Si trovi la dimensione del nucleo di* S*.*

Esercizio 8.44. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$*.*
- a) *Si scriva la matrice associata a* S *rispetto alle basi canoniche.*
- b) *Determinare basi dell'immagine* $Im(S)$ *e del nucleo* $N(S)$*.*

Esercizio 8.45. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - 3x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

- a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S*.*
- b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (0,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S*.*

Esercizio 8.46. *Sia* $V = \mathbf{R}^2$ *e siano* $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\ (1,0),\ (0,1)\ \}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1),\ (1,0)\ \}$ *due basi di* V*.*
- a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$*.*
- b) *Determinare le coordinate di* $v = (2,1)$ *utilizzando la matrice* P*.*

Esercizio 8.47. *Sia* $V = \mathbf{R}^3$ *e siano* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ *rispettivamente la base canonica e un'altra base di* V*.*
- a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{B}'$*.*
- b) *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$*. Utilizzando la matrice* P *determinare la matrice* $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}'$*.*

Esercizio 8.48. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *così definita:* $T(x,y,z) = (x + 2y + 3z,\ 3y + z,\ 4z)$*.*
- a) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
- b) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (5,3,3)\}.$$

Esercizio 8.49. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,1,2)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

b) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 8.50. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$

una base di $\mathbf{R}^3$ e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di T.*
c) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v_k = (k+1,0,k)$ appartiene all'Immagine di T.*

Esercizio 8.51. *Dati i vettori di $\mathbf{R}^3$*

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (0,2,2), \quad v_3 = (1,1,0),$$

si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$T(v_1) = (2,0,0), \quad T(v_2) = (4,4,4), \quad T(v_3) = (0,6,6)$$

a) *Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini una base del nucleo e dell'immagine di T.*

Esercizio 8.52. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ che associa ai vettori*

$$(1,1,0), \qquad (1,-1,2), \qquad (0,0,1)$$

rispettivamente i vettori

$$(1,1,0,1), \qquad (1,2,-1,0), \qquad (0,0,1,1)$$

a) *Stabilire se T è iniettiva, suriettiva, biunivoca.*
b) *Qual è l'immagine di $v = (2,0,3)$?*

Esercizio 8.53. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) *Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.*

Esercizio 8.54. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad T(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad T(e_3) = e_1 + e_3.$$

a) *Si mostri che T è invertibile.*
b) *Si scriva la matrice associata a T^{-1} rispetto ad $\mathcal{E}$.*
c) *Sia $W = \{x \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Si trovi una base del sottospazio immagine $T(W)$.*

Esercizio 8.55. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (1,0,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 8.56. *Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,1,0)\}$ di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare con matrice associata*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Stabilire per quali valori di* k *la funzione* T *è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).*
b) *Posto* $k = 1$, *si trovi una base del sottospazio* $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$, *con* $W = \langle(1,0,0,1),(0,1,0,1)\rangle$.

Esercizio 8.57. *Dati i vettori* $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,2,0)$ *e* $v_3 = (0,1,1)$, *sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$ *e* $T(v_3) = v_1$.
a) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.
b) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica.*
c) *Determinare il nucleo di* T *e trovare (se esiste) una controimmagine di* $(5,1,-11)$.

Esercizio 8.58. *Sia* $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ *la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A - A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di* S.
b) *Posto* $n = 2$, *si determini la matrice associata a* S *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per* $n = 2$, *la funzione lineare* S *è diagonalizzabile?*

Esercizio 8.59. *Sia* $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ *la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A + A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di* S.
b) *Posto* $n = 2$, *si determini la matrice associata a* S *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per* $n = 2$, *la funzione lineare* S *è diagonalizzabile?*

Esercizio 8.60. *Si* $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ *l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(ax^2 + bx + c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + a - c$$

a) *Si trovi la matrice rappresentativa di tale applicazione rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{x^2 + 2,\ x - 1,\ x + 1\right\}$$

b) *Si trovi la dimensione e una base di* $\mathrm{N}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$.

---

1. Suggerimenti

Una **Applicazione lineare** $T : V \to W$ è una funzione tra due spazi vettoriali che gode delle seguenti proprietà:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

In particolare se $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ è una base di V e $v \in V$, allora:

$$T(v) = T(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + \cdots + x_nT(v_n)$$

A ogni applicazione lineare può essere associata una **matrice** $A = M(T)$ che ha per colonne le immagini degli elementi della base di V, espresse rispetto alla base di W. Salvo indicazioni le basi di V e W sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(V) = A \cdot v \qquad \forall v \in V$$

Una applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

- Le immagini di una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T(e_1) = (1, 2, 1)$$
$$T(e_2) = (1, 0, -1)$$

- La matrice associata rispetto a una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Se non è specificato, la matrice si intende sempre associata rispetto alle basi canoniche.

Le tre precedenti definizioni definiscono la stessa applicazione lineare.

L'**Immagine** $\mathrm{Im}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ di V:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \subseteq W$$

Utilizzando la matrice $A = M(T)$ associata:

- $\mathrm{Im}(T)$ = spazio generato dalle colonne di A (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche)
- $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{$ colonne linearmente indipendenti di A $\}$ (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche).
- $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$

Il **Nucleo** $\mathrm{N}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è il sottospazio di V formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

Utilizzando la matrice A associata:

- $\mathrm{N}(T) = \{$ soluzioni del sistema omogeneo associato a A $\}$ (Prestare attenzione se le basi di U e di V non sono quelle canoniche.
- $\dim(\mathrm{N}(T)) = n - \mathrm{rg}(A)$, dove $n = \dim(V)$ = numero delle incognite del sistema lineare.

- Il teorema di **Nullità più rango** afferma che se $T : V \to W$ allora:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = n = \dim(V)$$

- Una applicazione è detta **Iniettiva** se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, cioè se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.
- Una applicazione è detta **Suriettiva** se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$, cioè se $\mathrm{Im}(T) = W$.
- Una applicazione è detta **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione è **invertibile** sse è biiettiva.

Bisogna prestare particolare attenzione quando l'applicazione non è definita sulle basi canoniche.

Matrici di transizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' =$

$\{v'_1, \dots, v'_n\}$ due basi di V. Ogni vettore w di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi delle due basi:

$$\begin{aligned} &w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = x'_1 v'_1 + \dots + x'_n v'_n \Rightarrow \\ &w = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \quad \text{componenti di } w \text{ rispetto a } \mathcal{B} \\ &w = (x'_1, \dots, x'_n)_{\mathcal{B}'} \quad \text{componenti di } w \text{ rispetto a } \mathcal{B}' \end{aligned}$$

- Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione tale che $T(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$. La matrice associata a T è detta matrice di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, indicata con $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Tale matrice ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ epressi rispetto a $\mathcal{B}'$:
$$(x'_1, \dots, x'_n) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$$
- Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione tale che $T(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)$. La matrice associata a T è detta matrice di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, indicata con $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Tale matrice ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}'$ epressi rispetto a $\mathcal{B}$:
$$(x_1, \dots, x_n) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T$$

Osservzioni
- Le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ sono una l'inversa dell'altra.
- Se $T : V \to V$ è un endomorfismo e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora
$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(T) \cdot P \qquad \text{con} \quad P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 8.1. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.*

Soluzione:
Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(2v) = 2T(v)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^3$. Sia per esempio $v = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} &T(v) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \ \Rightarrow \ 2T(v) = (2, 0, 0) \\ &T(2v) = T(2, 0, 0) = (4, 0, 0) \end{aligned}$$

Quindi $T(2v) \neq 2T(v)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 8.2. *Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici $M_{2\times 2}$ avalori in $\mathbf{R}$ non è lineare.*

Soluzione:
Sia T la funzione determinante: $T(A) = \det(A)$. Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(A) + T(B) = T(A + B)$ per ogni $A,\ B \in M_{2\times 2}$. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} &T(A) = T(B) = 0 \ \Rightarrow \ T(A) + T(B) = 0 \\ &T(A + B) = 1 \end{aligned}$$

Quindi $T(A) + T(B) \neq T(A + B)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 8.3. *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1, 2) = (3, 0), \qquad T(2, 7) = (4, 5), \qquad T(1, 5) = (1, 4)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$T(1,2)+T(1,5)=T((1,2)+(1,5))=T(1+1,2+5)=T(2,7),$$

mentre

$$\begin{aligned}&T(1,2)+T(1,5)=(3,0)+(1,4)=(4,4)\\&T(2,7)=(4,5)\end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 8.4. *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1,2)=(3,0),\qquad T(2,4)=(5,0),\qquad T(0,1)=(1,1)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$2T(1,2)=T(2\cdot 1,2\cdot 2)=T(2,4),$$

mentre

$$\begin{aligned}&2T(1,2)=2(3,0)=(6,0)\\&T(2,4)=(5,0)\end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 8.5. *Determinare una applicazione lineare $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1,1)=(1,2),\qquad T(0,2)=(4,4)$$

Soluzione:
Possiamo procedere in due modi.

(1) Ricaviamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^2$ imponendo la linearità di T:

$$\begin{aligned}&2T(0,1)=T(0,2)=(4,4)\ \Rightarrow\ T(0,1)=(2,2)\\&T(1,0)=T(1,1)-T(0,1)=(1,2)-(2,2)=(-1,0)\end{aligned}$$

Di conseguenza, preso il generico elemento $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)\in\mathbf{R}^2$, per la linearità di T deve essere

$$T(x,y)=xT(1,0)+yT(0,1)=x(-1,0)+y(2,2)=(-x+2y,2y)$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1)=(1,2)$ e $T(0,2)=(4,4)$ come richiesto.

(2) Alternativamente possiamo scrivere il generico elemento $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di cui conosciamo l'immagine (che formano una base di $\mathbf{R}^2$): $(1,1)$ e $(0,2)$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$(x,y)=a(1,1)+b(0,2)\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=x\\a+2b=y\end{cases}\quad\Rightarrow\ \begin{cases}a=x\\b=\dfrac{-x+y}{2}\end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x,y)=x(1,1)+\frac{-x+y}{2}(0,2)$$

Essendo T lineare deve quindi essere

$$\begin{aligned}T(x,y)=&x\,T(1,1)+\frac{-x+y}{2}\,T(0,2)=x(1,2)+\frac{-x+y}{2}(4,4)\\=&(x,2x)+(-2x+2y,-2x+2y)=(-x+2y,2y)\end{aligned}$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1)=(1,2)$ e $T(0,2)=(4,4)$ come richiesto.

□

Esercizio 8.6. *Sia $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y)=(x+y,2x,x-y)$.*

a) *Verificare che T è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
c) *Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare $T(1,2)$ usando la definizione e usando la matrice A.*

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che

$$\begin{aligned} T(v_1+v_2) &= T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbf{R}^2 \\ T(\lambda v) &= \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} T(v_1+v_2) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \\ T(v_1)+T(v_2) &= (x_1+y_1, 2x_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, 2x_2, x_2-y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \end{aligned}$$

Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x+\lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \\ \lambda T(v) &= \lambda(x+y, 2x, x-y) = (\lambda x+\lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \end{aligned}$$

Anche la seconda proprietà è verificata, quindi T è lineare.

b) Per definizione

$$\mathrm{N}(T) = \left\{v \in \mathbf{R}^2 \mid T(v) = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+y, 2x, x-y) = (0,0,0)\right\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \left\{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^2\right\} \subseteq \mathbf{R}^3 \\ &= \{(x+y, 2x, x-y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(1,2,1)x + (1,0,-1)y \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle (1,2,1),\ (1,0,-1) \rangle \end{aligned}$$

A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}.$$

c) La matrice A ha per colonne le immagini dei vettori della base di $\mathbf{R}^2$ espressi come combianzione lineare degli elementi della base di $\mathbf{R}^3$. Nel caso in cui le basi siano quelle canoniche la cosa è immediata:

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,1), \qquad T(e_2) = T(0,1) = (1,0,-1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che al punto b) abbiamo in sostanza trovato:

– Nucleo di T: corrisponde alle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
– Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.

---

d) Con la definizione di T:

$$T(1,2) = (1+2, 2\cdot 1, 1-2) = (3,2,-1)$$

Con la matrice A

$$T(1,2) = A \cdot (1,2)^T = (3,2,-1)$$

□

Esercizio 8.7. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1,2,1)$, $T(e_2) = (1,0,-1)$.*

a) *Esplicitare $T(x,y)$.*
b) *Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).*
c) *Stabilire se $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x,y) \in \mathbf{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di T:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1,2,1) + y \cdot (1,0,-1) = (x+y,\ 2x,\ x-y)$$

b) La matrice associata a A è la matrice che ha per colonne le immagini della base canonica di $\mathbf{R}^2$ (espresse rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$). Avendo già $T(e_1)$ e $T(e_2)$ è immediato ricavare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Il vettore $w = (3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tale che $T(x,y) = w$, ovvero se $(x+y, 2x, x-y) = (3,4,1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=4 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (3,4,1) = T(2,1) \in \mathrm{Im}(T)$$

Utilizzando la matrice associata al sistema, w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

In generale w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 8.8. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T(v) = Av$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di T.*
b) *Stabilire se $(-3,2,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Soluzione:

a)

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ A \cdot v \mid v \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Sia quindi $v = (x,y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, l'immmagine di T è formata dai vettori

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{bmatrix} = (1,2,1) \cdot x + (1,0,-1)y$$

In sostanza $\mathrm{Im}(T)$ è lo spazio generato dalle colonne di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (1,2,1),\ (1,0,-1)\rangle$$

Riduciamo perciò A a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha rango 2 e le due colonne sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}$$

Analogamente il nucleo di T è

$$\mathrm{N}(T)) = \left\{v \in \mathbf{R}^2 \mid A \cdot v = 0\right\}$$

Sia quindi $v = (x,y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, il nucleo di T è formato dalle soluzioni di

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

In sostanza il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A. Usando la matrice ridotta è immediato vedere che l'unica soluzione è il vettore nullo $(0,0)$, quindi $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$.

b) Il vettore $w = (-3,2,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se appartiene allo spazio generato dalle colonne di A, ovvero se ammette soluzione il sistema $Ax = w$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

Il sistema non ammette soluzione, quindi $w = (-3,2,1)$ non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Notiamo che

- Nucleo di T: corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
- Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.
- w appartiene all'immagine di T se il sistema $A|w$ ha soluzione, cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 8.9. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.

Soluzione:

Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi = \{(x,y,z) = (-2t,t,s) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x,y,z) = (-2t,t,s)$ di π è quindi data da

$$T(x,y,z) = A \cdot (x,y,z) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t+s \end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t+s).$$

Infine l'immagine di π è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \\ z = 2t + s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}, \qquad \Rightarrow \qquad T(\pi): \quad 5x + 7y = 0$$

□

Esercizio 8.10. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *un parametro reale.*

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di* T *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

b) *Determinare una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$ *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T rispetto alla base canonica calcolando:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1, 1, 2, -1) \\ T(e_2) &= (1, 2, 2, -2) \\ T(e_3) &= (2, 4, 4, k-4) \\ T(e_4) &= (1, 1, 3, 2) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & k-4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ IV \\ III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Sappiamo che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T))$, quindi
  - Se $k \neq 0$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$, e T è sia suriettiva che iniettiva.
  - Se $k = 0$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 3 = 1$, e T non è né suriettiva né iniettiva.

b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi
  - Se $k \neq 0$, allora
  $$\begin{aligned} &\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3),\ T(e_4)\} \\ &\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$
  - Se $k = 0$, allora
  $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_4)\}$$
  Inoltre il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:
  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
  Quindi
  $$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0, -2, 1, 0)\}$$

□

Esercizio 8.11. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ *la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.

b) *Dire se* T *è iniettiva e/o suriettiva.*

c) *Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Soluzione:
Ricordiamo che $\text{Im}(T)$ è generata da

$$T(e_1) = (1,1,0,0,-1), \qquad T(e_2) = (-1,1,1,1,-1)$$
$$T(e_3) = (0,0,0,3,0), \qquad T(e_4) = (0,0,0,0,0)$$

Quindi la dimensione di $\text{Im}(T)$ equivale al rango della matrice associata a tali vettori.

Inoltre v_k appartiene all'immagine di T se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle$.

Per rispondere a tutte le tre domande riduciamo a gradini la matrice associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ IV-III \\ V+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2III-II \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(T)) &= \text{rg}(A) = 3 \\ \mathcal{B}(\text{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(1,1,0,0,-2),\ (-1,1,1,1,0),\ (0,0,0,3,0)\} \end{aligned}$$

Inoltre dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\text{N}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\text{N}(T)) = 4 - \dim(\text{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\text{N}(T))$ notiamo che

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \text{N}(T)$$
$$\text{sse}$$
$$T(v) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) + x_4T(e_4) = 0$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice ridotta precedentemente a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{\ (0,0,0,1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\dim(\text{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbf{R}^5) \ \Rightarrow\ T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\text{N}(T)) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow\ T \text{ non è iniettiva}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema impostato all'inizio è compatibile. Dalla terza riga della matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$v_0 = T(1,1,1,t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 8.12. *Sia* $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di* T *al variare del parametro reale* k.
b) *Stabilire per quali valori di* k *il vettore* $v = (3,3,1,0)$ *appartiene all'immagine di* T.

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per rispondere alla domanda a) dobbiamo in sostanza calcolare il rango di A, mentre per rispondere alla domanda b) dobbiamo stabilire quando il sistema $A|v$ ammette soluzione. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|v$:

$$\begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ III \\ II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 2k & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV - 2kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 0 & -1+2k & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2III - II \\ 2IV - (2k-1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix}$$

Conviene forse interrompere la riduzione a questo punto.

a) $2k+1$ e $2k-1$ non possono essre contemporaneamente nulli, quindi la matrice A ha sempre rango 3:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

b) Il sistema $A|v$ ammette soluzione quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v)$. Abbiamo appena visto che $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi il sistema ammette soluzione se anche $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, cioè se $\det(A|v) = 0$. Calcoliamo quindi il determinante della matrice ridotta:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot [(2k+1)(-2k+7) - (2k-1) \cdot 5]$$
$$= 2 \cdot (-4k^2 + 2k + 12)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado vediamo che il determinante si annulla per $k = -3, 4$.

Infine v appartiene all'immagine di T quando $k = -3, 4$.

In alternativa si poteva completare la riduzione a gradini di $A|v$.

□

Esercizio 8.13. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Stabilire per quale valore di k il vettore $v_k = (k, k, k)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A affiancata dalla dal vettore v_k.:

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & 1 & | & k \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -2k \end{bmatrix}$$

a) Considerando solo la matrice dei coeficienti otteniamo

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{(2,0,2),\ (0,1,2)\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato a A otteniamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = (1,-2,2)$$

b) Il sistema associato a $A|v_k$ diventa

$$\begin{cases} 2x + y = k \\ -y + z = k \\ 0 = -2k \end{cases} \Rightarrow$$

e ammette soluzione solamente se $k = 0$. Quindi v_k appartiene a $Im(T)$ se $k = 0$.

$\square$

Esercizio 8.14. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 3x_3, -2x_3 + x_4, 0, x_1 - x_2 + x_4)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva*
b) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione:

La matrice associata a T è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ I \\ II \\ III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \ \Rightarrow\ T \text{ non è suriettiva}$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(0,0,0,1),\ (1,0,0,-1),\ (3,-2,0,0)\}$$

Inoltre

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1 \ \Rightarrow\ T \text{ non è iniettiva}$$

Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t \\ x_4 = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \;\Rightarrow\; T \text{ non è iniettiva}$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-5,-3,1,2)\}$$

$\square$

Esercizio 8.15. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*
b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3,3,k)$.*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per risponedere alla domanda b) dobbiamo risolvere il sistema $A \cdot (x,y,z)^T = (3,3,k)^T$; riduciamo quindi direttamente a gardini la matrice A affiancata dalla colonna $(3,3,k)^T$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow II + I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-6 \end{bmatrix}$$

a) Considerando la matrice A otteniamo che una base dell'immagine di T è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,-2,0),\ (0,1,1)\}$$

Risolvendo il sistema $Ax = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) \right\}$$

b) T non è iniettiva in quanto il nucleo di T ha dimensione 1.
Risolviamo il sistema $Ax = (3,3,k)^T$. Il sistema ha soluzione solo se $k = 6$ quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3,3,k)$ appartiene all'imangine di T solo se $k = 6$. In tale caso i vettori v tali che $T(v) = (3,3,k)$ sono i vettori del tipo $v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right)t, \ \forall t \in \ R$.

Notiamo che i vettori del tipo $\left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right)t$ sono gli elementi del nucleo. Infatti se $v_0 = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right)$ e $w \in \mathrm{N}(T)$, poiché $T(v_0) = (3,3,6)$, allora $T(v_0 + w) = T(v_0) + T(w) = (3,3,6) + (0,0,0) = (3,3,6)$.

$\square$

Esercizio 8.16. *Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$*

$$T(x,y,z,w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\det(A) = 2 \neq 0$, quindi T è invertibile.
Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ \\ III+I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I-III \\ 1/2II \\ -III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\mathrm{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4 - \mathrm{rg}(A) = 0$, quindi T e iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biiettiva e quindi invertibile.
b) La matrice $M\left(T^{-1}\right)$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M\left(T^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(x, y, z, w) = \left(-2x - z,\ \frac{1}{2}y,\ -x - z,\ w\right)$$

$\square$

Esercizio 8.17.

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.
b) *Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.*
c) *Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.*

Soluzione:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di $\mathbf{R}^3$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi e_i della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1,2,3$, dobbiamo esprimere ogni e_i come combinazione lineare dei vettori v_i. Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_3 = v_1 - v_3, \qquad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di T ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2) \\ T(e_3) &= T(v_1) - T(v_3) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (-1,2) - (2,1) = (-3,1) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0,1,1) - T(1,1,1) + T(1,1,0) \\ &= (0,4) - (-1,2) + (2,1) = (3,3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$\begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1) = (-1, -2),\ T(e_2) = (3, 3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1\right) \right\}$$

□

Esercizio 8.18. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (2x, y, 0)$$

(1) *Dato il vettore* $w = (2, -1, 1)$, *calcolare* $T(w)$.
(2) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(3) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* A.
(4) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$.
(5) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *con* $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.
(6) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *dello spazio di partenza e alla base canonica* $\mathcal{E}$ *dello spazio di arrivo, cioè* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$.
(7) *Determinare le componenti del vettore* $w = (2, -1, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.
(8) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* B.

Soluzione:

(1) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:

$$T(2, -1, 1) = (2 \cdot 2, -1, 0) = (4, -1, 0)$$

(2) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$
$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$
$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

La matrice A ha come colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Utilizzando la matrice A si ottiene

$$T(w) = A \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1).

(4) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle\ T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\ \rangle = \langle\ (2, 0, 0),\ (0, 1, 0)\ \rangle$$

Dalla matrice A, già ridotta a gradini, notiamo che solamente $T(e_1)$ e $T(e_2)$ sono linearmente indipendenti, di conseguenza l'immagine è uno spazio vettoriale generato da due vettori:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2, 0, 0),\ (0, 1, 0)\}$$

Il nucleo di T è formato da quei vettori dello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ la cui immagine attraverso T è il vettore nullo:

$$\mathrm{N}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(v) = (0, 0, 0)\right\}$$

Il $\mathrm{N}(T)$ è quindi formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\} = \langle\ (0, 0, 1)\ \rangle \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

(5) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(6) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e rispetto alla base $\mathcal{E}$ dello spazio di arrivo, come al punto (2), calcoliamo l'immagine di v_1, v_2 e v_3 attraverso T:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1, 0, 1) = (2, 0, 0) \\ T(v_2) &= T(0, 1, -1) = (0, 1, 0) \\ T(v_3) &= T(1, 1, -1) = (2, 1, 0) \end{aligned}$$

Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica. La matrice B ha quindi come colonne $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$:

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) Per determinare le componenti (x, y, z) di w rispetto alla base $\mathcal{B}$ dobbiamo esprimere w come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi risolvere l'eaquazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

Consideriamo la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow\ w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$.

Come metodo alternativo possiamo calcolare la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, ovvero la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere w rispetto a $\mathcal{B}$ dobbiamo prima calcolare $P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, la matrice di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

(8) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B:

$$T(w) = B \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1) e del punto (3).

□

Esercizio 8.19. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x, y + z)$$

(1) *Verificare che T è un'applicazione lineare.*
(2) *Dato il vettore $w = (1, 1, 1)$, calcolare $T(w)$.*
(3) *Determinare la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
(4) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.*
(5) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ *e* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(6) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
(7) *Determinare la matrice $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$.*
(8) *Determinare la matrice P di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$.*
(9) *Determinare le componenti del vettore $w = (1, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ utilizzando la matrice P (o meglio P^{-1}).*
(10) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B.*

Soluzione:

(1) Si tratta di verificare che:
- $T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \forall x_i, y_i, z_i \in \mathbf{R}$. Infatti:

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (2x_1, y_1 + z_1) + (2x_2, y_2 + z_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \\ T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) &= (2(x_1 + x_2), y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \end{aligned}$$

- $T(\lambda(x, y, z)) = \lambda T(x, y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}$ Infatti:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x, y, z)) &= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x, \lambda y + \lambda z) \\ \lambda T(x, y, z) &= \lambda(2x, y + z) = (2\lambda x, \lambda y + \lambda z) \end{aligned}$$

(2) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:

$$T(1, 1, 1) = (2 \cdot 1, 1 + 1) = (2, 2)$$

(3) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2, 0), \qquad T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1), \qquad T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 1)$$

La matrice A ha come colonne $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Utilizzando la matrice A si ottiene

$$T(w) = A \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ovviamente abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto 2.

(5) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle\ T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\ \rangle = \langle\ (2,0),\ (0,1),\ (0,1)\ \rangle$$

Dalla matrice A si vede che

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,0),\ (0,1)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(T) = \{(0,-1,1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\} = \langle\ (0,-1,1)\ \rangle \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,-1,1)\} \end{aligned}$$

(6) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ con $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(7) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di R^3 e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, come al punto (3), calcoliamo l'immagine di v_1, v_2 e v_3 attraverso T:

$$T(v_1) = T(2,1,0) = (4,1), \qquad T(v_2) = T(0,1,0) = (0,1), \qquad T(v_3) = T(1,0,1) = (2,1)$$

Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$. La matrice B ha come colonne $T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3)$:

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(8) La matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa di P

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(9) Per esprimere w rispetto a $\mathcal{B}$ basta calcolare $P^{-1} \cdot w$:

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0,1,1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$:

$$w = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3$$

In alternativa possiamo esprimere w come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$ risolvendo l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$ la cui matrice associata è:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{2II-I} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=1 \\ 2y-z=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$w = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad w = (0,\ 1,\ 1)_{\mathcal{B}}$$

(10) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B:

$$T(w) = B \cdot w = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (2) e del punto (4), in quanto $T(w) \in \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$, e anche lavorando con la matrice B abbiamo mantenuto come base di $\mathbf{R}^2$ la base canonica.

□

Esercizio 8.20. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x + y,\ x + y,\ y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k*.*
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k*.*
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (3, -1, -5)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k*. In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Soluzione:

(1) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base canonica:

$$T(1,0,0) = (2,1,0)$$
$$T(0,1,0) = (1,1,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,0,k)$$

Di conseguenza

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

(2) Per determinare la dimensione e una base dell'immagine di T riduciamo la matrice A a gradini.

$$\Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow_{III-II} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Si tratta ora di distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3, di conseguenza i tre vettori sono linearmente indipendenti

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3,$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ k)\}$$

  Notiamo che in questo caso $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, infatti $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 3 che quindi coincide necessariamente con lo spazio stesso.
- Se $k = 0$ la matrice ha rango 2. In particolare risultano linearmente indipendenti la prima e seconda colonna della matrice ridotta, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)\}$$

(3) Per il teorema di nullità più rango:
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(T))$$
Anche in questo caso bisogna distinguere due casi:
- Se $k \neq 0$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, quindi
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$$
ovvero
$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$$
- Se $k = 0$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, quindi
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1$$
In questo caso per determinare $\mathrm{N}(T)$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendendo la matrice ridotta e sostituendo $k = 0$ otteniamo
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in R$$
Di conseguenza
$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(T) = \{(x,y,z) = (0,0,1)t \mid t \in R\} \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,0,1)\} \end{aligned}$$

(4) Il vettore w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se w è combinazione lineare di $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$. Si tratta perciò di risolvere il sistema lineare a cui è associata la matrice A, con il vettore w come colonna dei termini noti. In questo caso dobbiamo ripetere la riduzione a gradini:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & k & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & k & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$
Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi.
- Se $k \neq 0$ abbiamo già osservato che $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, quindi w appartiene necessariamente a $\mathrm{Im}(T)$. Inoltre risolvendo il sistema otteniamo:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = -5 \\ kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}$$
ovvero $w \in \mathrm{Im}(T)$:
$$w = 4(2,1,0) - 5(1,1,1)$$
- Se $k = 0$ abbiamo scelto come base di $\mathrm{Im}(T)$ i vettori $T(e_1)$ e $T(e_2)$ corrispondenti alle prime due colonne di A. Quindi è sufficiente risolvere il sistema lineare $x\,T(e_1) + y\,T(e_2) = w$ ovvero il sistema a cui è associata la matrice formata dalle prime due colonne di A dopo avere sostituito $k = 0$:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -5 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$
ovvero $w \in \mathrm{Im}(T)$:
$$w = 4(2,1,0) - 5(1,1,1)$$

□

Esercizio 8.21. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*
$$T(x,y,z) = (x + y,\ kx + y + z,\ kx + y + kz)$$
dove $k \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

(1) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ al variare del parametro k.*

(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (0, 1, -1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k. *In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

SOLUZIONE:

(1) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base canonica:

$$T(1,0,0) = (1,k,k)$$
$$T(0,1,0) = (1,1,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,k)$$

Di conseguenza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{bmatrix}$$

(2) Per determinare la dimensione e una base dell'immagine di T riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ II - kI \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Si tratta ora di distinguere due casi

- Se $k \neq 1$ la matrice ha rango 3, di conseguenza i tre vettori sono linearmente indipendenti

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3,$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,\ k,\ k),\ (1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ k)\}$$

Notiamo che in questo caso $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, infatti $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 3 che quindi coincide necessariamente con lo spazio stesso.

- Se $k = 1$ la matrice ha rango 2. In particolare risultano linearmente indipendenti la prima e terza colonna della matrice. Quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)\}$$

Notiamo che per $k = 1$ $(1,k,k) = (1,1,1)$.

(3) Per il teorema di nullità più rango:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Anche in questo caso bisogna distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$$

ovvero

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$$

- Se $k = 1$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1$$

In questo caso per determinare $\mathrm{N}(T)$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendendo la matrice ridotta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

Di conseguenza

$$\mathrm{N}(T) = \{(x,y,z) = (-1,1,0)t \mid t \in R\}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-1,1,0)\}$$

(4) Il vettore w appartiene a $\text{Im}(T)$ se w è combinazione lineare di $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$. Si tratta perciò di risolvere il sistema lineare a cui è associata la matrice A, con il vettore w come colonna dei termini noti. In questo caso dobbiamo ripetere la riduzione a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \\ k & 1 & k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - kI \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi.

- Se $k \neq 1$ abbiamo già osservato che $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, quindi w appartiene necessariamente a $\text{Im}(T)$. Inoltre risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (1-k)y + z = 1 \\ (k-1)z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k+1}{(k-1)^2} \\ y = -\dfrac{k+1}{(k-1)^2} \\ z = \dfrac{-2}{k-1} \end{cases}$$

ovvero $w \in \text{Im}(T)$:

$$w = \frac{k+1}{(k-1)^2} \cdot (1, k, k) - \frac{k+1}{(k-1)^2} \cdot (1, 1, 1) - \frac{2}{k-1} \cdot (0, 1, k)$$

- Se $k = 1$ abbiamo scelto come base di $\text{Im}(T)$ i vettori $T(e_1) = T(e_2)$ e $T(e_3)$. Quindi è sufficiente risolvere il sistema lineare $y\,T(e_2) + z\,T(e_3) = w$ ovvero il sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

In questo caso il sistema contiene l'equazione $0 = -2$ impossibile, quindi non ammette soluzioni e w non appartiene a $\text{Im}(T)$.

$\square$

Esercizio 8.22. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

Stabilire se T *è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro* k.

Soluzione:

Notiamo innanzittutto che

- T è iniettiva se $\text{N}(T) = \{(0, 0)\}$, ovvero se $\dim(\text{N}(T)) = 0$.
- T è suriettiva se $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, ovvero se $\dim(\text{Im}(T)) = 3$.

Si tratta quindi di trovare immagine e nucleo di T.

Calcoliamo $T(e_1)$ e $T(e_2)$ per determinare la matrice associata a T:

$$T(e_1) = (k, 1, 0)$$
$$T(e_2) = (4, k, 1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a gradini.

$$\begin{matrix} II \\ \Rightarrow III \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ k & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 4-k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - (4-k^2)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\text{rg}(A) = 2$, quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \Rightarrow T \text{ non è suriettiva}$$

Notiamo che lo stesso risultato lo potevamo ottenere osservando che

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(e_1),\ T(e_2)\rangle$$

quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$. In nessun caso infatti una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ può essere suriettiva.

Per il teorema di nullità più rango

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(\mathbf{R}^2) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 - 2 = 0$$

Quindi

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\} \ \Rightarrow\ T \ \text{è iniettiva}$$

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + ky = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ \mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$$

□

Esercizio 8.23. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare del parametro reale k.*
b) *Determinare la dimensione di immagine e nucleo di T al variare di k.*

Soluzione:

a) T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^4$, cioè se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4$. Inoltre T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0,0)\}$, cioè se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 0$. Si tratta perciò di calcolare il rango di A. Utilizziamo il calcolo del determinante, che sviluppiamo rispetto alla quarta colonna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1 \cdot (k+3) \cdot \det \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 2k^2 & 0 & k \end{bmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) \cdot (k+3) \cdot (k+1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3k+4 \\ 0 & k \end{bmatrix} = (k+3) \cdot (k+1) \cdot k \end{aligned}$$

– Se $k \neq -3, -1, 0$, allora $\det(A) \neq 0$ e $\mathrm{rg}(A) = 4$. Quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è iniettiva}$$

– Se $k = -3, -1$ o 0, allora

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) \leq 3 \quad \Rightarrow \quad T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad T \text{ non è iniettiva}$$

b) Abbiamo già visto la dimensione di immagine e nucleo per $k \neq -3, -1, 0$. Consideriamo ora gli altri casi.

– Se $k = -3$ allora $\det(A) = 0$ e $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2(1+10) = 22 \neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad\qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1$$

– Se $k=-1$ allora $\det(A)=0$ e $\mathrm{rg}(A)\le 3$. Inoltre A diventa

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=1\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}=2\neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A)=3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{rg}(A)=3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T))=4-\mathrm{rg}(A)=1$$

– Se $k=0$ allora $\det(A)=0$ e $\mathrm{rg}(A)\le 3$. Inoltre A diventa

$$A=M(T)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}=1\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 1\end{bmatrix}=1-20=-19\neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A)=3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{rg}(A)=3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T))=4-\mathrm{rg}(A)=1$$

□

Esercizio 8.24. *Sia* $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x,y,z,w)=(-x-y+z+w,\ -x+2y-z,\ -x+y+3z-3w)$$

a) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T)\subseteq\mathbf{R}^3$.
c) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T)\subseteq\mathbf{R}^4$

Soluzione:

a) Calcoliamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$T(e_1)=(-1,\ -1,\ -1) \qquad T(e_2)=(-1,\ 2,\ 1)$$
$$T(e_3)=(1,\ -1,\ 3) \qquad T(e_4)=(1,\ 0,\ -3)$$

Quindi

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

b) Poichè

$$\mathrm{Im}(T)=\langle T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3),\ T(e_4)\rangle$$

ovvero $\mathrm{Im}(T)$ è generato dai vettori colonna di A, per determinarne dimensione e base riduciamo la matrice A a gradini:

$$\begin{array}{l}\\ II-I\\ III-I\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 2 & -4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\\ 1/2III\\ II\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{l}\\ \\ III-3II\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -5 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\\ \\ 1/5III\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

LA matrice A ha rango 3, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T))=3$$

Inoltre le prime tre colonne di A sono linearmente indipendenti quindi possiamo prendere come base di $\mathrm{Im}(T)$ i tre vettori $T(e_1), T(e_2),\ T(e_3)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2),\ T(e_3)\}\\ &= \{(-1,-1,-1),\ (-1,2,1),\ (1,-1,3)\}\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 3, quindi $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ (e T è suriettiva).

c) Gli elementi di $\mathrm{N}(T)$ sono i vettori di $\mathbf{R}^4$, soluzione del sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendiamo la matrice già ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x-y+z+w=0\\ y+z-2w=0\\ -z+w=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\\ w=t\end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}(T) = \{(1,1,1,1)t \mid t \in \mathbf{R}\}\\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1\\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}((T)) = \{(1,1,1,1)\}\end{aligned}$$

Notiamo che, come ci aspettavamo dal teorema di nullità più rango:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$$

□

Esercizio 8.25. *Sia $T: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x,y,z,w) = (x-2y+3z,\ x-y+(k+3)z+2w,\ 2x-3y+(k+6)z+(k+1)w)$$

dove k è un parametro reale.

Stabilire se esistono valori di k per cui T è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione:

Ricordiamo che

- T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0,0)\}$, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$
- T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, ovvero se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

Si tratta quindi di trovare immagine e nucleo di T.

Calcoliamo l'immagine degli elementi della base canonica per determinare la matrice associata a T:

$$\begin{aligned}&T(e_1) = (1,1,2), && T(e_2) = (-2,-1,-3)\\ &T(e_3) = (3,k+3,k+6), && T(e_4) = (0,2,k+1)\end{aligned}$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & k+3 & 2\\ 2 & -3 & k+6 & k+1\end{bmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a gradini.

$$\begin{matrix}\\ II-I\\ III-2I\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & k & 2\\ 0 & 1 & k & k+1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\ \\ III-II\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & k & 2\\ 0 & 0 & 0 & k-1\end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 1$, allora $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \ \Rightarrow\ T \ \text{ è suriettiva}$$
- Se $k = 1$, allora $\mathrm{rg}(A) = 2$, quindi
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \ \Rightarrow\ T \text{ non è suriettiva}$$

Per il teorema di nullità più rango
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(\mathbf{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}(T))$$
Quindi

- Se $k \neq 1$ allora
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 3 = 1$$
- Se $k = 1$ allora
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 2 = 2$$

In nessuno dei due casi si ha $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, quindi T non è mai iniettiva.

Notiamo che $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 3$ e
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) \geq 4 - 3 = 1$$
quindi sicuramente $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ non è iniettiva.

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere senza utilizzare il teorema di nullità più rango, ma risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + kz + 2w = 0 \\ (k-1)w = 0 \end{cases}$$
Quindi

- Se $k \neq 1$:
$$\begin{cases} x = (-2k-3)t \\ y = -kt \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(-2k-3,\ -k,\ 1,\ 0)t \mid t \in\ R\}$$
e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$.
- Se $k = 1$:
$$\begin{cases} x = -5s - 4t \\ y = -s - 2t \\ z = s \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(-5,\ -1,\ 1,\ 0)s + (-4,\ -2,\ 0,\ 1)t \mid s, t \in\ R\}$$
e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 2$.

□

Esercizio 8.26. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da*
$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

Ricaviamo la matrice A associata all'applicazione T calcolando le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$:
$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2)$$
$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (-1, -3)$$
$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$$
quindi
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rispondiamo ad entrambi i quesiti contemporaneamente ricordando che un'applicazione è iniettiva se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, ed è suriettiva se la sua immagine è tutto lo spazio di arrivo, ovvero in questo caso se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Poichè la matrice A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

di determinante $-1 \neq 0$, la matrice A ha rango 2. Quindi

- $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \Rightarrow T$ è suriettiva.
- Per il teorema di nullità più rango: $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow T$ non è iniettiva.

$\square$

Esercizio 8.27. *Sia k un parametro reale e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4, -kx_1 + x_3, x_3 + kx_4)$$

a) *Determinare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Si dica se T è iniettivo e/o suriettivo.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T calcolando $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III + k/2I \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Il nucleo di T è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z + 3w = 0 \\ z = 0 \\ kw = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{\ (0,0,0,0)\ \}$$

– Se $k = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (0,-3,0,1)\ \}$$

Una base dell'Immagine di T è data dai vettori linearmente indipendenti di A. Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 0$ la matrice A ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,1,-k,0),\ (0,1,0,0),\ (0,1,1,1),\ (0,3,0,k)\ \}$$

– Se $k = 0$ la matrice A ha rango 3 e in particolare risultano linearmente indipendenti i primi tre vettori:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,1,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,1,1,1)\ \}$$

b) Se $k \neq 0$ il nucleo contiene solo il vettore nullo, quindi T è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 4, quindi T è suriettiva.
Se $k = 0$ il nucleo ha dimensione 1, quindi T non è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 3, quindi T non è suriettiva.

□

Esercizio 8.28. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + 2ax_2 + x_3, bx_1 + 2bx_2 + x_3).$$

a) *Si determinino gli eventuali valori reali di a e b per i quali T è suriettiva.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T al variare di a e b.*

Soluzione:
Determiniamo la matrice A associata a T calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{l} T(e_1) = T(1,0,0) = (a,b) \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (2a,2b) \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (1,1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & 2a & 1 \\ b & 2b & 1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A scambiando prima e terza colonna (ricordando poi tale scambio nella parte b)).
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2a & a \\ 1 & 2b & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2a & a \\ 0 & 2(b-a) & b-a \end{bmatrix}$$

a) La funzione lineare T è suriettiva se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 2$, ovvero se $a \neq b$.
b) Per determinare il nucleo di T dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a A, ricordando che lo scambio di colonne corrisponde allo scambio delle incognite x e z:

$$\begin{cases} z + 2ay + ax = 0 \\ 2(b-a)y + (b-a)x = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi.
– Se $a \neq b$, allora dividendo la seconda equazione per $b - a$ otteniamo

$$\begin{cases} z + 2ay + ax = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (-2,1,0)\ \}$$

– Se $a = b$ allora resta solo la prima equazione:

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -2at - as \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (1,0,-a),\ (0,1,-2a)\ \}$$

□

Esercizio 8.29. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{r} \\ II + I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

b)
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 3 = 1$$

a) Inoltre
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \;\Rightarrow\; T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \neq 0 \Rightarrow\; T \text{ non è iniettiva}$$

$\square$

Esercizio 8.30. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se T invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

a) T invertibile se è biiettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice A ha rango 4. In sostanza T è invertibile se e solo se lo è A.

Riduciamo a gradini la matrice A:
$$\begin{array}{c} \\ 1/2II + I \\ III + 1/2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ha rango 3 quindi T non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\mathrm{rg}(A) < 4$ in quanto A ha la quarta colonna multipla della terza.

Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di A (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduszione ci serviva comunque per il punto successivo.

b) Poichè le prime tre colonne di A contengono un pivot, ne segue che
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1, -2, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-1, 0, 0, -1)\}$$

Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A:
$$\begin{cases} x - z + w = 0 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$

Quindi
$$\mathcal{B}\left(N(T)\right) = \{\ (0, 0, 1, 1)\ \}$$

$\square$

Esercizio 8.31. *Detto k un paramtro reale, sia*
$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

a) *Si trovino, al variare di k, nucleo e immagine dell'endomorfismo T_A di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice A.*
b) *Stabilire per quali valori $k \in \mathbf{R}$ la funzione lineare T_A è invertibile.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A:
$$\begin{array}{c} \\ \\ 2III - kII \end{array} \begin{bmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

– Se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3, quindi $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ e $\text{N}(T) = \{(0,0,0)\}$.
– Se $k = 0$ una base dell'immagine di T è data dall'insieme $\{(1,2,0),\ (10,0,0)\}$. Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} y + 10z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo di T è $\{(1,0,0)\}$.

b) T è invertibile se A ha rango 3, quindi se $k \neq 0$.

$\square$

Esercizio 8.32. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine* $\text{Im}(T)$ *al variare di k.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni k

$$\begin{aligned} &\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.} \\ &\dim(N(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.} \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 8.33. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base del nucleo di T e una base dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*

Soluzione:

Riduciamo A a gradini scambiando opportunamente le righe:

$$\begin{array}{c} II \\ III \\ IV \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 2I \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV + (k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

a) Il nucleo di T è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x + 2w = 0 \\ y + z + 2w = 0 \\ -z - w = 0 \\ (-k+1)w = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 1$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(T) = \{\ (0,0,0,0)\ \}$$

– Se $k = 1$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = -t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (-1,-1,-1,1)\ \}$$

Una base dell'Immagine di T è data dai vettori linearmente indipendenti di A. Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 1$ la matrice A ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (0,1,0,-2),\ (1,1,1,0),\ (k,0,1,1),\ (2,2,2,-1)\ \}$$

In realtà $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^4$.

– Se $k = 1$ la matrice A ha rango 3 e in particolare risultano linearmente indipendenti i primi tre vettori:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (0,1,0,-2),\ (1,1,1,0),\ (1,0,1,1)\ \}$$

b) Se $k \neq 1$ il nucleo contiene solo il vettore nullo, quindi T è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 4, quindi T è suriettiva.

Se $k = 1$ il nucleo ha dimensione 1, quindi T non è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 3, quindi T non è suriettiva.

□

Esercizio 8.34. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (x + y - 2z,\ 3x - z,\ 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x,y,z) = (x + z,\ x - y + z,\ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Soluzione:

Calcoliamo le matrici associate a f e g (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$):

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le matrici associate a f e g possiamo calcolare direttamente la matrice associata alle due funzioni composte. Infatti la matrice associata a $g \circ f$ è $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ e la matrice associata a $f \circ g$ è $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$. Quindi

$$M(g \circ f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la dimensione dei nuclei basta calcolare il rango delle matrici. Riducendo a gradini:

$$M(g\circ f) \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(f\circ g) \Rightarrow \quad \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathrm{N}(g\circ f)\right) &= 3 - \mathrm{rg}\left(M(g\circ f)\right) = 3-1 = 2 \\ \dim\left(\mathrm{N}(f\circ g)\right) &= 3 - \mathrm{rg}\left(M(f\circ g)\right) = 3-2 = 1 \end{aligned}$$

□

Esercizio 8.35. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x+y,\ 2x-y-z,\ 2y+z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1,2,-4),\ (0,1,1),\ (1,0,-7)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Stabilire se T è iniettivo e/o suriettiva.*

b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$*

Soluzione:

Per rispondere alla domanda a) possiamo comunque calcolare prima la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$.

b) Siano $v_1 = (1,2,-4)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,-7)$. Il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

$$T(v_1) = (3,4,0), \quad T(v_2) = (1,-2,3), \quad T(v_3) = (1,9,-7)$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & | & 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III+4I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & | & 12 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & | & 14 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i tre sistemi:

$$T(v_1): \begin{cases} x+z = 3 \\ y-2z = -2 \\ -z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -30 \\ z = 14 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (-17,-30,14)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2): \begin{cases} x+z = 1 \\ y-2z = -4 \\ -z = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -26 \\ z = -11 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (12,-26,-11)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3): \begin{cases} x+z = 1 \\ y-2z = 7 \\ -z = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 27 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (-9,27,10)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo in sostanza calcolare il rango di $M_{\mathcal{B}}(T)$. In alternativa risulta forse più semplice calcolare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica e calcolare poi il rango di questa:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III+2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dim(Im(T)) &= \text{rg}(M(T)) = 3 \;\Rightarrow\; T \text{ è suriettiva} \\ \dim(N(T)) &= 3 - \text{rg}(M(T)) = 0 \;\Rightarrow\; T \text{ è iniettiva} \end{aligned}$$

□

Esercizio 8.36. *Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.*
b) *Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori*

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a S rispetto alle basi canoniche calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{c} S(e_1) = (3, 4, 1) \\ S(e_2) = (0, -2, 0) \\ S(e_3) = (-2, 2, 2) \\ S(e_4) = (1, 3, 2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = M(S) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-4I \\ III-3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 0 \\ -2y - 6z - 5w = 0 \\ -8z - 5w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5}t \\ y = t \\ z = t \\ w = -\frac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(6, 5, 5, -8)\}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S rispetto alla basecanonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ ha per colonne la immagini $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)$ espresse però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Avendo già calcolato tali immagini, si tratta ora di esprimere $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3),\ S(e_4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1+yv_2+zv_3 = S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III-I \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1)=(-3,2,4)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2)=(2,0,-2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3)=(0,-4,2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4)=(-1,-1,3)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.37. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da*

$$T(x,y,z)=(3x-2y,\ x+y+z,\ 2x-3y-z)$$

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}=\{(2,1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$.*
c) *Trovare la distanza euclidea tra il punto $P=(1,1,1)$ e il nucleo $N(T)$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II-I \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(Im(T))=\{T(e_1),\ T(e_2)\}=\{(3,1,2),\ (-2,1,-3)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}t \\ y=t \\ z=-\frac{5}{3}t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T))=\left\{\left(\frac{2}{3},1,-\frac{5}{3}\right)\right\}, \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{B}(N(T))=\{(2,3,-5)\}$$

b) Notiamo che $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, quindi è sottinteso che la stessa base $\mathcal{B}$ va considerata sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo, e $M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice che ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse ancora rispetto a $\mathcal{B}$.

Chiamiamo $v_1,\ v_2$ e v_3 i tre vettori di $\mathcal{B}$. Dalla definizione di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(v_1)&=T(2,1,0)=(4,3,1), \\ T(v_2)&=T(1,1,0)=(1,2,-1), \\ T(v_3)&=T(0,1,1)=(-2,2,-4) \end{aligned}$$

Qui però le immagini $T(v_i)$ sono espresse rispetto alla base canonica. Per esprimere $T(v_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Se (x_i, y_i, z_i) è la soluzione di tale equazione, allora le coordinate di $T(v_i)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $T(v_i) = (x_i, y_i, z_i)_\mathcal{B}$.

Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora il sistema associato alle prime 4 colonne:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$T(v_1) = (4, 3, 1) = 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (2, 0, 1)_\mathcal{B}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla quinta:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$T(v_2) = (1, 2, -1) = -2v_1 + 5v_2 - 1v_3 = (-2, 5, -1)_\mathcal{B}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla sesta:

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ y + 2z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 14 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$T(v_3) = (-2, 2, -4) = -8v_1 + 14v_2 - 4v_3 = (-8, 14, -4)_\mathcal{B}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consisteva nell'utilizzare la matrice $M_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ di cambiamento di base, di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Sia

$$P = M_\mathcal{B}^\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_\mathcal{C}^\mathcal{B} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

c) Abbiamo visto al punto a) che il nucleo di T è la retta

$$N(T) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -5t \end{cases}$$

Il piano π perpendicolare a N(T) e passante per P è $\pi : \; 2x + 3y - 5z = 0$. Inoltre $\pi \cap N(T) = A(0, 0, 0)$. Infine

$$d(N(T), P) = d(A, P) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

□

Esercizio 8.38. *Sia* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 0, 2)\}$ *una base di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M_\mathcal{B}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica di* $\mathbf{R}^3$.
b) *Si stabilisca se* T *è iniettivo e/o suriettivo.*

Soluzione:

a) Per utilizzare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ dobbiamo esprimere gli elementi della base canonica rispetto a $\mathcal{B}$. Si ricava facilmente che

$$e_1 = v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$
$$e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}}$$
$$e_3 = \frac{1}{2}v_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

Quindi

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = (5, 0, 10)_{\mathcal{B}} = 5v_1 + 10v_3 = (5, 10, 35)$$
$$T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4, 3, -8)_{\mathcal{B}} = -4v_1 + 3v_2 - 8v_3 = (-1, -8, -31)$$
$$T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1, 0, 2)_{\mathcal{B}} = v_1 + 2v_3 = (1, 2, 7)$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 10 & -8 & 2 \\ 35 & -31 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Possiamo usare indifferentemente la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ o la matrice A. Per comodità di calcoli usiamo la matrice iniziale. $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha due righe uno multiplo dell'altra e $\text{rg}(M_{\mathcal{B}}(T)) = 2$. Quindi $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ e T non è suriettivo, e $\dim(\text{N}(T)) = 1$ e T non è iniettivo.

□

Esercizio 8.39. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base costituita dai vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T.*

Soluzione:

a) Il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$:

$$T(v_1) = (3, 2, 1), \qquad T(v_2) = (1, 0, 1), \qquad T(v_3) = (1, 1, 0)$$

e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Notiamo che essendo v_1, v_2 e v_3 particolarmente semplici la risoluzione delle equazioni che danno le coordinate è immediata:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (2, 1, -1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (0, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}$$

Dunque la matrice B associata a T rispetto a $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo usa il cambiamento di base: la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Per calcolare l'inversa usiamo il metodo della riduzione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è quindi

$$P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Infatti se indichiamo con $v_{\mathcal{B}}$ le coordinate di un vettore v rispetto a $\mathcal{B}$ e analogamente indichiamo con $T(v)_{\mathcal{B}}$ le coordinate del vettore $T(v)$ rispetto a $\mathcal{B}$, allora:

$$B \cdot v_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP \cdot v_{\mathcal{B}} = P^{-1}A \cdot v = P^{-1} \cdot T(v) = T(v)_{\mathcal{B}}$$

b) Per trovare una base del nucleo ci conviene lavorare sulla matrice A in modo da ottenere i vettori direttamente espressi rispetto alla base canonica. Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo di T è data dall'insieme

$$\{\ (0, -1, 1)\ \}$$

$\square$

Esercizio 8.40. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (1,1)\ \}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ due basi di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

La matrice A cercata ha per colonne le immagini attraverso T degli elementi di $\mathcal{B}$, espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Cominciamo a calcolare la immagini:

$$T(1,0) = (2,1,0), \qquad T(1,1) = (2,0,2)$$

I vettori cosí ottenuti sono però espressi rispetto alla base canonica. Indichiamo con

$$u_1' = (1,1,0),\ u_2' = (0,1,1),\ u_3' = (0,0,2)$$

gli elementi della base $\mathcal{B}'$. Esprimere $(2,1,0)$ e $(2,0,2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le due equazioni vettoriali: $xu_1'+yu_2'+zu_3' = (2,1,0)$ e $xu_1'+yu_2'+zu_3' = (2,0,2)$. Consideriamo quindi la matrice associata a tali sistemi, riducendola con le due colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Per risolvere l'equazione $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2,1,0)$ consideriamo la prima colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,0) = (2,1,0) = 2u_1' - u_2' + \frac{1}{2}u_3' = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Analogamente per risolvere l'equazione $xu_1'+yu_2'+zu_3' = (2,0,2)$ consideriamo la seconda colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,1) = (2,0,2) = 2u_1' - 2u_2' + 2u_3' = (2,-2,2)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.41. *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ rispettivamente la base canonica e un'altra base di V.*

a) *Determinare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$.*
b) *Svolgere l'esercizio precedente utilizzando la matrice P.*

Soluzione:

a) La matrice P cercata ha per colonne gli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Esprimere gli elementi di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le tre equazioni vettoriali $x\cdot(1,1,0)+y\cdot(0,1,1)+z\cdot(0,0,2) = e_i$, $i = 1,2,3$. Riduciamo perciò a gradini la matrice formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ con le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere e_1 otteniamo il sistema relativo alla prima colonna:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_2 otteniamo il sistema relativo alla seconda colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_3 otteniamo il sistema relativo alla terza colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che per calcolare $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ potevamo in alternativa calcolare e poi invertire la matrice di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$. Infatti $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}$ ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}'$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice P cercata è l'inversa di tale matrice:

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Nell'esercizio precedente avevamo calcolato

$$T(1,0) = (2,1,0), \qquad T(1,1) = (2,0,2)$$

e dovevamo esprimerli rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Avendo ora calcolato la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$, possiamo utilizzare P per calcolare le coordinate cercate:

$$P \cdot (2,1,0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2,1,0) = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

$$P \cdot (2,0,2)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (2,0,2) = (2,-2,2)_{\mathcal{B}'}$$

La matrice cercata è quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.42. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x - z, 2x + y, x - 3y)$$

a) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ costituita dai vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (0,1,1)$.*
b) *Si trovi una base dell'immagine di T.*
c) *Il determinante di una matrice associata a T può essere nullo?*

Soluzione:

a) Cominciamo con il calcolare le immagini di $v_1,\ v_2,\ v_3$ attraverso T:

$$T(v_1) = (1,2,1)$$
$$T(v_2) = (2,2,1)$$
$$T(v_3) = (-1,1,-3).$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini in funzione della base $\mathcal{B}$, ovvero di risolvere i tre sistemi associati a $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1)$, $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2)$ e $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3)$. Riduciamo quindi a gradini la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando quindi la differenti colonne di termini noti otteniamo:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -y+z=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (0,\ 1,\ 2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -y+z=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (1,\ 1,\ 2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y=- \\ -y+z=-3 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = -5 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (-5\ 4,\ 1)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Cominciamo con il calcolare il rango di $M_{\mathcal{B}}(T)$ riducendola a gradini:

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Quindi $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha rango 3 e una base dell'immaginie di T è formata dai tre vettori che la generano (espressi rispetto alla base canonica):

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (2,2,1),\ (-1,1,-3)\}$$

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare la matrice associata a T rispetto alla base canonica e ricavare da questa un'altra base di $\mathrm{Im}(T)$.

c) Poichè la matrice associata a T ha rango 3, ogni altra matrice associata a T rispetto a basi differenti avrà il medesimo rango e quindi determinante non nullo.

□

Esercizio 8.43. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita da*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1, x_2 - 3x_3).$$

a) *Sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori* $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,0)$ *e sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$. *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S.

b) *Si trovi la dimensione del nucleo di* S.

Soluzione:

a) Si tratta di calcolare le immagini di $v_1,\ v_2,\ v_3$ attraverso S. Non è poi necessario effettuare altre trasformazioni in quanto la base dello spazio di arrivo $\mathbf{R}^4$ è la base canonica $\mathcal{E}$.

$$S(v_1) = (2,1,1,-2)$$
$$S(v_2) = (2,1,1,1)$$
$$S(v_3) = (1,0,1,0).$$

Infine

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo M a gradini per calcolarne il rango

$$\begin{array}{c} \\ 2II-I \\ III-II \\ IV+I \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ IV \\ \\ II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+III \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha rango 3 e

$$\dim(N(S)) = 3 - \text{rg}(M) = 0$$

□

Esercizio 8.44. *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a S rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) La matrice cercata ha per colonne $S(e_1),\ S(e_2)$ e $S(e_3)$. Per determinare tali immagini possiamo procedere in due modi.

Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e e_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,2,2)$ e $v_3 = (0,0,3)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In realtà la matrice è già ridotta (triangolare superiore), quindi possiamo risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ per calcolare le imamgini di e_i, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned}
S(e_1) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (0,0,0)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0) \\
S(e_2) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 - \frac{1}{3} \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\
S(e_3) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)
\end{aligned}$$

Infine

$$A = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consiste nel ricavare direttamente le immagini di e_1 dalla matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$, sfruttando la linearità di S. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi

$$\begin{aligned}
S(v_1) &= S(1,1,1) = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (0,0,3) \\
S(v_2) &= S(0,2,2) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3 = (0,0,6) \\
S(v_3) &= S(0,0,3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 1v_2 + 3v_3 = (0,2,11)
\end{aligned}$$

Abbiamo precedentemente espresso e_1, e_2 e e_3 come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
e_3 &= (0,0,1) = \frac{1}{3}(0,0,3) \\
e_2 &= (0,1,0) = \frac{1}{2}(0,2,2) - \frac{1}{3}(0,0,3) \\
e_1 &= (1,0,0) = (1,1,1) - \frac{1}{2}(0,2,2)
\end{aligned}$$

Per la linearità di S otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
S(e_1) &= S(v_1) - \frac{1}{2}S(v_2) = (0,0,3) - \frac{1}{2}(0,0,6) = (0,0,0) \\
S(e_2) &= \frac{1}{2}S(v_2) - \frac{1}{3}S(v_3) = \frac{1}{2}(0,0,6) - \frac{1}{3}(0,2,11) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\
S(e_3) &= \frac{1}{3}S(v_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)
\end{aligned}$$

Infine la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

b) Conviene utilizare la matrice A in modo da ottenere vettori già espressi rispetto alla base canonica.

In questo caso non è necessario procedere con la riduzione a gradini. Infatti è evidente che la sottomatrice formata dalle ultime due colonne ha rango 2, quindi una base dell'immagine di S è quella formata da $S(e_2)$ e $S(e_3)$, oppure da un loro multiplo:

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (0,2,11),\ (0,2,2)\ \}$$

Dal teorema di nullità più rango sappiamo che il nucleo ha dimensione uno e avendo trovato che $S(e_1) = 0$, quindi e_1 appartiene al nucleo, possiamo concludere che una base del nucleo di S

è

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 8.45. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - 3x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S*.*
b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (0,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S*.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a S calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{matrix} S(e_1) = (2,-2,-2) \\ S(e_2) = (-2,2,2) \\ S(e_3) = (1,-3,1) \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{matrix} \\ II + I \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/2 II \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data dai vettori corrispondenti alle colonne che contengono i pivot,cioè alla prima e terza colonna:

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\ S(e_3)\}\, \{(2,-2,-2),\ ((1,-3,1)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(1,1,0)\}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ associata a S ha per colonne le immagini di $\mathcal{B}$ espresse rispetto a $\mathcal{E}$, cioè in sostanza le immagini di $\mathcal{B}$:

$$S(v_1) = (0,0,0), \qquad S(v_2) = (3,5,-1), \qquad S(v_3) = (-1,-1,3)$$

quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.46. *Sia* $V = \mathbf{R}^2$ *e siano* $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\ (1,0),\ (0,1)\ \}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1),\ (1,0)\ \}$ *due basi di* V*.*

a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$*.*
b) *Determinare le coordinate di* $v = (2,1)$ *utilizzando la matrice* P*.*

Soluzione:

a) La matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Anche se in questo caso i conti per fare ciò sono piuttosto semplici, può risultare più conveniente determinare la matrice inversa $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}'$ espressi rispetto a $\mathcal{B}$. Infatti $\mathcal{B}$ è la base canonica, quindi i vettori di $\mathcal{B}'$ sono già espressi rispetto a $\mathcal{B}$, quindi

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolare P basta ora invertire P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Infine

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Per esprimere v rispetto a $\mathcal{B}'$ basta calcolare:

$$P \cdot v^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $v = (1,1)_{\mathcal{B}'}$, ovvero $v = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,0)$.

□

Esercizio 8.47. *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ rispettivamente la base canonica e un'altra base di V.*

a) *Determinare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$.*
b) *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$. Utilizzando la matrice P determinare la matrice $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

a) La matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$ ha per colonne gli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Anziché procedere come nell'esercizio precedente invertendo la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}$ formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ (espressi automaticamente rispetto a $\mathcal{C}$), questa volta calcoliamo direttamente P.

Esprimere gli elementi di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le tre equazioni vettoriali $x \cdot (1,1,0) + y \cdot (0,1,1) + z \cdot (0,0,2) = e_i$, $i = 1,2,3$. Riduciamo perciò a gradini la matrice formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ con le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Per esprimere e_1 otteniamo il sistema relativo alla prima colonna:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_2 otteniamo il sistema relativo alla seconda colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_3 otteniamo il sistema relativo alla terza colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) La matrice $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(T)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Calcoliamo quindi

$$T(1,0) = (2,1,0), \qquad T(0,1) = (0,-1,2),$$

espressi rispetto alla base canonica. Conoscendo la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$, possiamo utilizzare P per calcolare le coordinate cercate dei vettori trovati rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$P \cdot (2,1,0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2,1,0) = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

$$P \cdot (0,-1,2)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (0,-1,2) = \left(0, -1, \frac{3}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

La matrice cercata è quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.48. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *così definita:* $T(x,y,z) = (x + 2y + 3z,\ 3y + z,\ 4z)$.

a) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*

b) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (5,3,3)\}.$$

Soluzione:

a)

$$\begin{array}{l} T(e_1) = (1,0,0) \\ T(e_2) = (2,3,0) \\ T(e_3) = (3,1,4) \end{array} \Rightarrow A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Per risolvere la seconda parte possiamo procedere in due modi.

– Calcoliamo le immagini dei vettori v_i della nuova base:

$$T(v_1) = (1,0,0), \qquad T(v_2) = (3,3,0), \qquad T(v_3) = (20,12,12)$$

Si tratta ora di esprimere i vettori trovati rispetto alla base $\mathcal{B}$ risolvendo le tre equazioni:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 3 \\ y + 3z = 3 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 20 \\ y + 3z = 12 \\ 3z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (0,0,4)_{\mathcal{B}}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

– Un altro metodo consiste nel cercare le matrici di cambiamento di base: la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Per calcolare l'inversa usiamo il metodo della riduzione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-III \\ \frac{1}{3}III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} I-II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I-5III \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è quindi

$$P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.49. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,1,2)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

SOLUZIONE:

a) Basta verificare che la matrice formata dai tre vettori ha rango 3, ovvero determinante diverso da zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 2 \neq 0$$

Quindi v_1, v_2 e v_3 sono lineramente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Come nell'esercizio precedente si può procedere in due modi. Utilizziamo il primo.
Calcoliamo le immagini dei vettori v_i della nuova base:

$$T(v_1) = A \cdot v_1 = (-2,-2,0)$$
$$T(v_2) = A \cdot v_2 = (2,0,-2)$$
$$T(v_3) = A \cdot v_3 = (4,4,8)$$

Si tratta ora di esprimere i vettori trovati rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo però come la cosa è immediata:

$$T(v_1) = T(1,1,0) = (-2,-2,0) = -2v_1 \qquad \Rightarrow T(v_1) = (-2,0,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_2) = T(-1,0,1) = (2,0,-2) = -2v_2 \qquad \Rightarrow T(v_2) = (0,-2,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = T(1,1,2) = (4,4,8) = 4v_3 \qquad \Rightarrow T(v_3) = (0,0,4)_{\mathcal{B}}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che volendo utilizzare il secondo metodo la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ottenuta è diagonale, la matrice di transizione P tale che $P^{-1}AP = M_{\mathcal{B}}(T)$ è detta diagonalizzante.

□

Esercizio 8.50. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$

una base di $\mathbf{R}^3$ *e sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *così definito:*

$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di* T.
c) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* $v_k = (k+1,0,k)$ *appartiene all'Immagine di* T.

Soluzione:

a) Per determinare $T(e_i)$, dobbiamo ricavare le coordinate di e_i rispetto alla base $\mathcal{B}$. Non è però necessario risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ in quanto seplicemente:

$$e_1 = \frac{1}{2}v_3, \qquad e_2 = -v_2, \qquad e_3 = v_1 - \frac{1}{2}v_3$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \frac{1}{2}T(v_3) = (3,2,3) \\ T(e_2) &= -T(v_2) = (0,-1,-1) \\ T(e_3) &= T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_3) = (3,1,2) - (3,2,3) = (0,-1,-1) \end{aligned}$$

e

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini

$$\begin{matrix} 1/3I \\ II - 2/3I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(M(T)) = 2 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{(3,2,3),\ (0,-1,-1)\} \end{aligned}$$

Sappiamo già che $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M(T)) = 1$. Per determinarne una base risolviamo il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,-1,1)\}$$

c) Il vettore $v_k = (k+1,0,k)$ appartiene all'Immagine di T se è combinazione lineare dei vettori della base in $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & k+1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - 2I \\ III - I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & k+1 \\ 0 & -3 & -2k-2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - 3III \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2k+1 \end{array}\right]$$

Infine, se $k = \frac{1}{2}$ la matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango, quindi il sistema ammette soluzione e v_k appartiene a $\text{Im}(T)$, mentre se $k \neq \frac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A|b) = 3 > \text{rg}(A) = 2$, quindi il sistema non ammette soluzione e v_k non appartiene a $\text{Im}(T)$.

□

Esercizio 8.51. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 2, 2), \quad v_3 = (1, 1, 0),$$

si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$T(v_1) = (2, 0, 0), \quad T(v_2) = (4, 4, 4), \quad T(v_3) = (0, 6, 6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini una base del nucleo e dell'immagine di* T*.*

SOLUZIONE:

a) Per determinare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica. A tale scopo dobbiamo prima esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3. Risolviamo le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$, $i = 1, 2, 3$, riducendo a gradini contemporaneamente le matrici associate ai tre sistemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 1 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

Sfruttando la linearità di T possiamo ora ricavare le immagini degli elementi della base canonica:

$$T(e_1) = \frac{1}{2}T(v_1) - \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0, 2, 2)$$
$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0, 4, 4)$$
$$T(e_3) = \frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_3) = (2, -2, -2)$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

In alternativa si poteva untilizzare la matrice di cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine

$$M(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini:

$$\begin{matrix} 1/2II \\ 1/2I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $M(T)$ ha rango 2 e una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(0, 2, 2),\ (2, -2, -2)\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato a T otteniamo

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi una base del nucleo di T è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-2, 1, 0)\}$$

□

Esercizio 8.52. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ che associa ai vettori*

$$(1, 1, 0), \qquad (1, -1, 2), \qquad (0, 0, 1)$$

rispettivamente i vettori

$$(1, 1, 0, 1), \qquad (1, 2, -1, 0), \qquad (0, 0, 1, 1)$$

a) *Stabilire se T è iniettiva, suriettiva, biunivoca.*
b) *Qual è l'immagine di $v = (2, 0, 3)$?*

Soluzione:

a) L'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, -1, 2),\ v_3 = (0, 0, 1)\}$$

forma una base di $\mathbf{R}^3$. La matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^4$ è

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché A è 3×4, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) \leq 3$ e T non può essere suriettiva e quindi neanche biunivoca. Calcoliamo comunque esplicitamente il rango di A per stabilire se T è iniettiva. Notiamo che A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cha ha determinante non nullo. Di conseguenza $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$ e T è iniettiva.

b) Per detereminare l'immagine di v, dobbiamo esprimerlo rispetto alla base $\mathcal{B}$ risolvendo l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ a cui è associata la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/2II \\ III + II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow v = v_1 + v_2 + v_3$$

Per calcolare $T(v)$ possiamo usare direttamente la definizione

$$T(v) = T(v_1 + v_2 + v_3) = T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0,1) + (1,2,-1,0) + (0,0,1,1) = (2,3,0,2).$$

□

Esercizio 8.53. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) *Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.*

Soluzione:
Dalla definizione otteniamo

$$\begin{aligned} &T(e_1) = (3,-1,1) \\ &T(e_2) = (0,1,-1) \\ &T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2) = (6,-2,2) + (0,1,-1) = (6,-1,1) \end{aligned}$$

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo T a gradini

$$\begin{array}{c} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza una base dell'immagine di T è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(3,-1,1),\ (0,1,-1)\}$.
Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeno associato a T:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

e una base del nucle di T è $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-2,-1,1)\}$.

b) Dai conti svolti nel punto precedente vediamo che A ha rango 2, quindi non è invertibile. Altrettanto l'endomorfismo T non è invertibile.

□

Esercizio 8.54. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad T(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad T(e_3) = e_1 + e_3.$$

a) *Si mostri che T è invertibile.*
b) *Si scriva la matrice associata a T^{-1} rispetto ad $\mathcal{E}$.*
c) *Sia $W = \{x \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Si trovi una base del sottospazio immagine $T(W)$.*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) T è invertibile sse lo è la matrice A. Poiché $\det(A) = 2 \neq 0$ la matrice e T sono invertibili.
b) La matrice associata a T^{-1} è la matrice A^{-1}:

$$A^{-1} = M(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

c) Scriviamo esplicitamente gli elementi di W:

$$\begin{cases} x_1 = -2s + t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi $W = \langle w_1 = (-2, 1, 0),\ w_2 = (1, 0, 1)\rangle$ e $T(W) = \langle T(w_1),\ T(w_2)\rangle$:

$$T(w_1) = A \cdot w_1 = (-2, 6, -3)$$
$$T(w_2) = A \cdot w_2 = (2, -2, 2)$$

I due vettori trovati sono linearmente indipendenti in quanto non sono uno multiplo dell'altro, quindi una base di $T(W)$ è

$$\mathcal{B}\,(T(W)) = \{(-2, 6, -3),\ (2, -2, 2)\}\,.$$

□

Esercizio 8.55. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base canonica. Calcoliamo quindi le immagini dei vettori v_i, utilizzando la matrice $M(T)$:

$$M(T) \cdot v_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_1) = (1, 0, 4)$$
$$M(T) \cdot v_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_2) = (4, 1, 5)$$
$$M(T) \cdot v_3^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_3) = (4, 0, 3)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi esprimere rispetto alla base $\mathcal{B}$ i vettori $T(v_i)$, trovati al punto precedente. Si tratta di risolvere i tre sistemi $xv_i + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Per comodità riduciamo a gradini i tre sistemi contemporaneamente, affiancando direttamente le tre colonne dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I - III \\ II - I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -z = -1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_1) = -3v_1 + 3v_2 + v_3 = (-3, 3, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -z = -3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_2) = -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = (-1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -z = -4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_3) = v_1 - v_2 + 4v_3 = (1, -1, 4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che per calcolare $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ potevamo anche utilizzare le matrici di cambiamento di base. Sia infatti $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$; P ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{E}$:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre la matrice di transizione dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{C}$ è l'inversa di P:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = P^{-1} \cdot M(T) \cdot P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.56. *Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,1,0)\}$ di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare con matrice associata*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Stabilire per quali valori di k la funzione T è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).*
b) *Posto $k = 1$, si trovi una base del sottospazio $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$, con $W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,1) \rangle$.*

Soluzione:

a) T è un isomorfismo se il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ è 4, infatti in tale caso $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 4$ e T è suriettiva, e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$ e T è iniettiva. In questo caso è probabilmente più rapido calcolare il determinante di M, sviluppando rispeto alla terza colonna:

$$\det\left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right) = 1 \cdot k \cdot 1 = k$$

Quindi T è un isomorfismo se $k \neq 0$ quando il rango di M è 4.

b) La matrice associata a T per $k=1$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Possiamo procedere in due modi:

– MODO 1. Esprimiamo i due vettori $w_1=(1,0,0,1)$ e $w_2=(0,1,0,1)$ come combinazione lineare delle immagini della base $\mathcal{B}$ risolvendo i due sistemi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_1$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_2$. Riduciamo a gradini le due matrici contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&1&0\\1&1&0&0&|&0&1\\0&1&1&1&|&0&0\\1&0&0&1&|&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\\II-I\\\\IV-I\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&1&0\\0&1&0&0&|&-1&1\\0&1&1&1&|&0&0\\0&0&0&1&|&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow III-II\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&1&0\\0&1&0&0&|&-1&1\\0&0&1&1&|&1&-1\\0&0&0&1&|&0&1\end{bmatrix}$$

Risolviamo il primo sistema $xT(v_1)+yT(v_2)+zT(v_3)+wT(v_4)=w_1$:

$$\begin{cases}x=1\\y=-1\\z+w=1\\w=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=1\\w=0\end{cases}\Rightarrow T^{-1}(w_1)=(1,-1,1,0)_{\mathcal{B}}=(1,0,0,1)$$

Risolviamo il secondo sistema $xT(v_1)+yT(v_2)+zT(v_3)+wT(v_4)=w_2$:

$$\begin{cases}x=0\\y=1\\z+w=-1\\w=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=-2\\w=1\end{cases}\Rightarrow T^{-1}(w_2)=(0,1,-2,1)_{\mathcal{B}}=(1,1,0,-2)$$

– MODO 2.Essendo T un isomorfismo possiamo calcolare l'inversa di $M(T)$:

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right)^{-1}=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&-1&1&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Quindi

$$T^{-1}(w_1)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})\cdot w_1^T=(1,-1,1,0)_{\mathcal{B}}=(1,0,0,1)$$
$$T^{-1}(w_2)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})\cdot w_2^T=(0,1,-2,1)_{\mathcal{B}}=(1,1,0,-2)$$

□

Esercizio 8.57. *Dati i vettori* $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,2,0)$ *e* $v_3=(0,1,1)$, *sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $T(v_1)=v_2$, $T(v_2)=v_3$ *e* $T(v_3)=v_1$.

a) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}=\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.
b) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica.*
c) *Determinare il nucleo di* T *e trovare (se esiste) una controimmagine di* $(5,1,-11)$.

Soluzione:

a) Dalla definzione di T si ha

$$T(v_1)=v_2=0\cdot v_1+1\cdot v_2+0\cdot v_3=(0,1,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_2)=v_3=0\cdot v_1+0\cdot v_2+1\cdot v_3=(0,0,1)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3)=v_1=1\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3=(1,0,0)_{\mathcal{B}}$$

quindi la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

b) Senza la necessità di impostare un sistema è facile scrivere gli elementi della base canonica come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$ e quindi trovarne l'immagine attraverso a T:

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 - \frac{1}{2}v_2 && \Rightarrow && T(e_1) = T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_2) = v_2 - \frac{1}{2}v_3 = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\\
e_2 &= \frac{1}{2}v_2 && \Rightarrow && T(e_2) = \frac{1}{2}T(v_2) = \frac{1}{2}v_3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\\
e_3 &= v_3 - \frac{1}{2}v_2 && \Rightarrow && T(e_3) = T(v_3) - \frac{1}{2}T(v_2) = v_1 - \frac{1}{2}v_3 = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) È immediato verificare che $\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)\right) = 1$, quindi $\text{rg}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)\right) = \text{rg}(M(T)) = 3$. Di conseguenza $\dim(N(T)) = 0$ e $N(T) = \{\ (0,0,0)\ \}$.

T è suriettiva, quindi esiste una controimmagine per ogni elemento di $\mathbf{R}^3$. Per trovare una controimmagine di $v = (3, 7, -14)$ ci conviene forse usare la matrice $M(T)$ risolvendo il sistema $M(T)|v$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2III \\ 2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -28 \\ 3 & 1 & 1 & | & 14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow II + 3I \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & -28 \\ 0 & 4 & -2 & | & -70 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = -28 \\ 2y - z = -35 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -16 \\ z = 3 \end{cases}$$

Quindi $T(9, -16, 3) = (3, 7, -14)$ e la controimmagine di v è $(9, -16, 3)$.

□

Esercizio 8.58. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A - A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Per definizione

$$N(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = A^T \right\} = \{\text{ matrici simmetriche di } M_n(\mathbf{R})\}$$

Provando a calcolare $S(A)$ per qualche A si vede che le matrici $S(A) = B = [b_{i,j}]$ ottenute hanno necessariamente tutti zero sulla diagonale e hanno $b_{i,j} = -b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$. Quindi:

$$\text{Im}(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = -A^T \right\} = \{\text{ matrici antisimmetriche di } M_n(\mathbf{R})\}$$

b) Sia

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice associata a S rispetto a $\mathcal{B}$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse rispetto a $\mathcal{B}$:

$$S(A_1) = A_1 - A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$
$$S(A_2) = A_2 - A_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2 - A_3 = (0,1,-1,0)_{\mathcal{B}}$$
$$S(A_3) = A_3 - A_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A_2 + A_3 = (0,-1,1,0)_{\mathcal{B}}$$
$$S(A_4) = A_4 - A_4^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3(\lambda - 2)$$

M ha due autovalori $\lambda = -2$, singolo, e $\lambda = 0$ di molteplicità algebrica 3, quindi è diagonalizzabile se l'autospazio $E(0)$ è di dimensione 3.

$$E(0) = N(M) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \\ w = r \end{cases} \Rightarrow \dim(E(0)) = 3$$

quindi S è diagonalizzabile.

□

Esercizio 8.59. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A + A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Per definizione

$$N(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = -A^T \right\} = \{ \text{ matrici antisimmetriche di } M_n(\mathbf{R}) \}$$

Notiamo che una matrice $B = [b_{i,j}]$ è antisimmetrica se ha tutti zero sulla diagonale e $b_{i,j} = -b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$.

Provando a calcolare $S(A)$ per qualche A si vede che le matrici $S(A) = B = [b_{i,j}]$ ottenute hanno o $b_{i,j} = b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$, mentre non si ha nessuna condizione su $b_{i,i}$. Quindi:

$$\mathrm{Im}(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = A^T \right\} = \{ \text{ matrici simmetriche di } M_n(\mathbf{R}) \}$$

b) Sia

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice associata a S rispetto a $\mathcal{B}$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
S(A_1) &= A_1 + A_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2A_1 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_2) &= A_2 + A_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2A_1 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_3) &= A_3 + A_3^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2A_3 = (0,0,2,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_4) &= A_4 + A_4^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A_4 = (0,0,0,2)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^3$$

M ha due autovalori $\lambda = 0$, singolo, e $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica 3, quindi è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ è di dimensione 3.

$$E(2) = N(M - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \\ w = r \end{cases} \Rightarrow \dim(E(2)) = 3$$

quindi S è diagonalizzabile.

□

Esercizio 8.60. *Si $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(ax^2 + bx + c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + a - c$$

a) *Si trovi la matrice rappresentativa di tale applicazione rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{x^2 + 2,\ x - 1,\ x + 1\right\}$$

b) *Si trovi la dimensione e una base di* $\mathrm{N}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio ax^2+bx+c di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a,b,c) rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$, ovvero a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ associamo un vettore di $\mathbf{R}^3$. Di conseguenza ai polinomi di $\mathcal{B}$ possiamo associamo i tre vettori

$$p_1 = (1,0,2), \quad p_2 = (0,1,-1), \quad p_3 = (0,1,1)$$

che formano una base di $\mathbf{R}^3$.

Analogamente possiamo considerare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$f(a,b,c) = (a-b,\ b-c,\ a-c)$$

a) Calcoliamo l'immagine di $p_1,\ p_2,\ p_3$ che poi dovremo esprimere come combinazione lineare di $p_1,\ p_2,\ p_3$.

$$\begin{aligned}
f(p_1) &= f(1,0,2) = (1,-2,-1) \\
f(p_2) &= f(0,1,-1) = (-1,2,1) \\
f(p_3) &= f(0,1,1) = (-1,0,-1)
\end{aligned}$$

Si tratta ora di risolvere le tre equazioni $xp_1 + yp_2 + zp_3 = f(p_i)$ per $i = 1, 2, 3$, per esprimere $f(p_i)$ come combinazione lineare di $p_1,\ p_2,\ p_3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a ognuna di tale equazioni, scrivendo le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i tre sistemi, considerando separatamente le tre colonne dei termini noti.

$$f(p_1): \quad \begin{cases} x = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$
$$f(p_2): \quad \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 2 \\ 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_2) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$
$$f(p_3): \quad \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_3) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice cercata è la matrice che ha $f(p_i)_{\mathcal{B}}$ come colonne:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che avevamo ottenuto $f(p_2) = -f(p_1)$, quindi alcuni calcoli potevano essere evitati.

b) Per rispondere alla seconda domanda possiamo procedere in due modi
  - Lavorare sulla matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ trovata, ricordando poi di trasformare rispetto alla base canonica i vettori trovati.
  - Determinare la matrice $M(f)$ associata a f rispetto alla base canonica

In ogni caso possiamo osservare che $f(p_2) = -f(p_1)$ (la matrice ha due colonne linearmente dipendenti), quindi sicuramente $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$ e $\dim(\mathrm{N}(f)) \geq 1$.

Consideriamo entrambi i modi.

  - Riduciamo a gradini la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$:

$$\begin{array}{c} \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+5I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'immagine di f è generata da $f(p_i),\ i = 1, 2, 3$, ovvero dalle colonne di $M_{\mathcal{B}}(f)$, mentre il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}(f)$, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 2, \qquad \dim(\mathrm{N}(f)) = 3 - \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 1$$

Per scrivere esplicitamente immagine e nucleo dobbiamo tornare a esprimerei vettori rispetto alla base canonica. L'immagine di f è generata dai vettori linearmente indipendenti corrispondenti alla prima e terza colonna di $M_{\mathcal{B}}(f)$. Quindi

$$f(p_1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}} = (1, -2, -1) = x^2 - 2x - 1$$
$$f(p_3) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = (-1, 0, -1) = -x^2 - 1$$

e una base di $\mathrm{Im}(f)$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(f)) = \left\{x^2 - 2x - 1, x^2 - 1\right\}$$

Analogamente per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}(f)$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1,0)_{\mathcal{B}} \cdot t$$

Poiché

$$(1,1,0)_{\mathcal{B}} = 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 = (1,1,1) = x^2 + x + 1$$

una base del nucleo di f è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(f)) = \left\{x^2 + x + 1\right\}$$

– In alternativa potevamo determinare la matrice $M(f)$ associata a f rispetto alla base canonica:

$$f(x^2) = f(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$f(x) = f(0,1,0) = (-1,1,0)$$
$$f(1) = f(0,0,1) = (0,-1,-1)$$

quindi

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi una base dell'immagine è data dai vettori corrispondenti alla prima e seconda colonna:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(f)) = \{(1,0,1),\ (-1,1,0)\} = \left\{x^2 + 1,\ -x^2 + x\right\}$$

Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $M(f)$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(f)) = \{(1,1,1)\} = \left\{x^2 + x + 1\right\}$$

□