CAPITOLO 9

# Diagonalizzazione di matrici e applicazioni lineari

**Esercizio 9.1.** *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare $T$ così definita*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

*Determinare inoltre il relativo autovalore.*

**Esercizio 9.2.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1 = (0,3,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ sono autovettori di $T$ e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) $D$ associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante $P$ (cioé la matrice $P$ tale che $P^{-1}AP = D$).*

**Esercizio 9.3.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di $T$ ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se $T$ è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale $T$ ha matrice associata $D$ diagonale e determinare la matrice diagonale $D$ e la matrice $P$ diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

**Esercizio 9.4.** [Esercizio 4) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Quali sono gli autovalori di una matrice diagonale? E di una matrice triangolare?*

**Esercizio 9.5.** [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Riconoscere che le due seguenti matrici $M$ sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice $P$ diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con $D$ matrice diagonale; ricordiamo che $P$ è una matrice le cui colonne sono autovettori di $M$).*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.6.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

**Esercizio 9.7.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*

c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

**Esercizio 9.8.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di $A$.*
b) *Stabilire se la matrice $A$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.9.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di $T$ e si stabilisca se $T$ è diagonalizzabile.*
b) *Si determini una base di $R^3$ formata da autovettori di $T$.*

**Esercizio 9.10.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e gli autovalori di $A$.*
b) *Si determini l'autospazio $E(\lambda)$ relativo ad ogni autovalore $\lambda$ trovato.*
c) *Si verifichi che $A$ è diagonalizzabile.*
d) *Si trovi la matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale (una tale matrice $P$ è detta diagonalizzante ed ha per colonne gli autovalori di $P$).*
e) *Si trovi la matrice diagonale $B$ simile alla matrice $A$.*

**Esercizio 9.11.** *Si ripeta l'esercizio precedente con le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.12.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di $T$.*
b) *Si stabilisca se $T$ è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice $P$ diagonalizzante.*
c) *Si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata a $T$ rispetto a $\mathcal{B}$ sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.*

**Esercizio 9.13.** [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]
*Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale $k$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.14.** *Sia $S$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

a) *Determinare autovalori e autovettori di $S$.*
b) *Stabilire se $S$ è diagonalizzabile e in caso positivo individuare la matrice diagonalizzante.*

**Esercizio 9.15.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2\right).$$

a) *Calcolare gli autovalori e gli autovettori di $T$.*
b) *$T$ diagonalizzabile?*
c) *Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?*

**Esercizio 9.16.** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{\ 1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ \}$$

a) *Si determinino gli autovalori di $T$.*
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di $T$.*
c) *Si stabilisca se $T$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.17.** *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia $S$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Trovare gli autovalori (reali) di $S$.*
b) *Trovare gli autovettori di $S$ e stabilire se $S$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.18.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Stabilire se $T$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.19.** *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori della matrice data.*
b) *Stabilire se la matrice data diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.20.** *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di $M$ al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Fissato a piacere un valore di $k$ per cui $M$ è diagonalizzabile, determinare per tale $k$ la matrice $P$ diagonalizzante.*

**Esercizio 9.21.** *Sia $A$ la matrice dipendente dal parametro reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di $A$ al variare di $k$.*
b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di $A$ per un valore opportuno di $k$.*

**Esercizio 9.22.** *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di $M$ al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di $M$.*

**Esercizio 9.23.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Determinare per quali valori di $k$ la matrice $B$ è diagonalizzabile.*
b) *Stabilire per quali valori di $k$ le due matrici $A$ e $B$ sono simili.*

**Esercizio 9.24.** *Siano $A$ e $B$ le matrici reali*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Determinare, se esistono, i valori del parametro reale $k$ per cui $A$ e $B$ sono simili.*

**Esercizio 9.25.** *Considerare le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e di $B$.*
b) *Stabilire se $A$ e $B$ sono simili.*
c) *Esistono valori di $t$ per cui $C$ e $B$ sono simili?*

**Esercizio 9.26.** *Siano $A$ e $B$ le matrici seguenti*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Dire per quali valori del parametro reale $k$ la matrice $B$ è diagonalizzabile.*
b) *Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?*

**Esercizio 9.27.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se 4 è autovalore di $A$. Calcolare gli autovalori e autovettori di $A$.*
b) *La matrice $A$ è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*
c) *Sia $C$ la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

*Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui $A$ e $C$ siano simili?*

**Esercizio 9.28.** *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori della matrice $A$.*

b) *Stabilire per quali valori del parametro reale $k$ la matrice data è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.29.** *Sia $S$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & b & b-3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

a) *Determinare autovalori e autovettori di $S$.*
b) *Trovare i valori di $b$ per i quali $S$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.30.** *Sia $A$ la matrice reale dipendente dal parametro $k$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare per quali $k$ la matrice $A$ è diagonalizzabile.*
b) *Per i valori determinati in* a)*, trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $A$*

**Esercizio 9.31.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare gli autovalori di $A$.*
b) *Stabilire per quali valori reali di $k$ la matrice $A$  diagonalizzabile.*

**Esercizio 9.32.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*
b) *Determinare, se esistono, i valori di $k$ per cui la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

*può essere associata al medesimo endomorfismo $T$.*

**Esercizio 9.33.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di $T$.*

---

## 1. Suggerimenti

Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una applicazione lineare (endomorfismo) e $M$ la matrice associata rispetto a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^n$. Parleremo quindi indifferentemente di $T$ e $M$.

---

Il **Polinomio caratteristico** di $M$ é il polinomio

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$$

Notiamo che $p_M(\lambda)$ è un polinomio di grado $n$ nell'incognita $\lambda$.

---

Un **Autovalore** di $M$ è un numero $\lambda$ per cui esiste un vettore $v \in \mathbf{R}^n$ **non nullo** tale che

$$Mv = \lambda v$$

OSSERVAZIONI:

- Se $\lambda$ é un autovalore di $M$ allora per qualche $v \neq 0$:
$$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)\, v = 0 \;\Rightarrow\; \det (M - \lambda I) = 0$$
quindi gli autovalori di $M$ sono gli **zeri del polinomio caratteristico**, ovvero si determinano risolvendo
$$\det (M - \lambda I) = 0$$
- La molteplicità di $\lambda$ come zero del polinomio caratteristico è detta **molteplicità algebrica** dell'autovalore $\lambda$.

---

Un **Autovettore** relativo a un autovalore $\lambda$ è un vettore $v$ (e sicuramente ne esistono non nulli) tale che

$$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)\, v = 0$$

Quindi $v$ è **soluzione del sistema omogeneo associato a** $M - \lambda I$.

OSSERVAZIONI:

- L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore $\lambda$ formano uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^n$), detto **Autospazio** relativo all'autovalore $\lambda$:
$$E(\lambda) = \{\text{ autovettori relativi a } \lambda \text{ }\}$$
- Chiamiamo **Molteplicità geometrica** di $\lambda$ la dimensione di $E(\lambda)$.
- Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$ formano il nucleo di $M$, ovvero le soluzioni del sistema omogeneo associato a $M$.
- Per quanto riguarda la dimensione di $E(\lambda)$ abbiamo che
$$1 \leq \dim (E(\lambda)) \leq \text{molteplicità algebrica di } \lambda$$
In particolare se un autovalore é singolo, allora il relativo autospazio ha sicuramente dimensione 1.
- Autovettori di autospazi distiniti sono linearmente indipendenti.
- Poichè gli endomorfismi sono applicazioni di uno spazio in se stesso, la base dello spazio di arrivo e di partenza è sempre la stessa (a differenza di quanto poteva accadere negli esercizi del capitolo precedente).

---

**Diagonalizzabilità**.

Una matrice $M$, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se è **simile a una matrice diagonale** $D$, ovvero esiste una matrice $P$, detta **matrice diagonalizzante**, tale che $P^{-1}MP = D$ è una matrice diagonale.

OSSERVAZIONI:

- Poiché $P^{-1}MP = D$, le matrici $M$ e $D$ sono simili.
- La matrice diagonalizzante $P$ ha per colonne autovettori linearmente indipendenti di $M$.
- $P^{-1}MP = D$ ha sulla diagonale gli autovalori di $M$.
- Una matrice $M$, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è $n$, ovvero se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $n$, ovvero se ha $n$ autovettori linearmente indipendenti.
- Condizione necessaria perchè una matrice sia diagonalizzabile è che **la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidano**.

- Se $M$ ha $n$ autovalori distinti allora è sicuramente diagonalizzabile (infatti ha sicuramente $n$ autospazi di dimensione 1).
- Se una matrice $M$ è diagonalizzabile allora esiste una **base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di** $M$. La diagonalizzazione sottintende infatti un cambiamento di base in $\mathbf{R}^n$.
- Due matrici diagonalizzabili sono associate allo stesso endomorfismo (rispetto a basi differenti) se sono simili alla stessa matrice diagonale (ovvero hanno gli stessi autovalori). Analogamente se solamente una delle due matrici è diagonalizzabile allora non possono essere associate allo stesso endomorfismo.
- Le matrici e gli endomorfismi simmetrici godono di particolari proprietà.

---

## 2. Soluzioni

**Esercizio 9.1.** *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare $T$ così definita*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

*Determinare inoltre il relativo autovalore.*

Soluzione:
Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1,0,0,1) = (2,\ -1+1,\ 0,\ 1+1) = (2,\ 0,\ 0,\ 2) = 2 \cdot v$$

Quindi $v$ è autovettore associato all'autovalore 2.

□

**Esercizio 9.2.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x,\ y+3z,\ x+y-z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1 = (0,3,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ sono autovettori di $T$ e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) $D$ associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante $P$ (cioé la matrice $P$ tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

a) Calcoliamo le immagini dei vettori $v_i$:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(0,3,1) = (0,6,2) = 2v_1, \\ T(v_2) &= T(0,-1,1) = (0,2,-2) = -2v_2, \\ T(v_3) &= T(-1,1,0) = (-1,1,0) = v_3 \end{aligned}$$

quindi $v_1$ è autovettore rispetto all'autovalore 2, $v_2$ è autovettore rispetto all'autovalore $-2$, $v_3$ è autovettore rispetto all'autovalore 1.

b) Verifichiamo che la matrice associata ai tre vettori $v_1,\ v_2$ e $v_3$ ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot (3+1) \neq 0$$

I tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Abbiamo già visto che $v_1,\ v_2$ e $v_3$ sono autovettori, quindi:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2v_1 = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_1) &= (2,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= -2v_2 = 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_2) &= (0,-2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_3) &= (0,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

e la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$D = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $D$ è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

d) Utilizzando il metodo della matrice di transizione per determinare la matrice $D$, sappiamo che la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$).

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice $D$ associata a $T$ rispetto alla nuova base è $D = P^{-1}AP$. La matrice

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è quindi la matrice diagonalizzante cercata.

□

**Esercizio 9.3.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di $T$ ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se $T$ è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale $T$ ha matrice associata $D$ diagonale e determinare la matrice diagonale $D$ e la matrice $P$ diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

SOLUZIONE:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

a) Un autovalore di $T$ è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori $v$ tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di $T$ relativi a $\lambda$. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; A \cdot v = \lambda v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione $v \neq 0$ se e solo se il sistema omogeneo trovato ha soluzione non nulla. Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi $T$ ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1, 3, 2$$

Consideriamo i tre casi

– Se $\lambda = 1$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 0, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di $T$ relativi all'autovalore 1:

$$T(t, 0, 0) = A \cdot (t, 0, 0) = (t, 0, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 1:

$$E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

– Se $\lambda = 3$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 2t, 0),\ t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di $T$ relativi all'autovalore 3:

$$T(t, 2t, 0) = A \cdot (t, 2t, 0) = (3t, 6t, 0) = 3 \cdot (t, 2t, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 3:

$$E(3) = \langle (1,2,0) \rangle$$

– Se $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(0, 0, t),\ t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di $T$ relativi all'autovalore 2:

$$T(0, 0, t) = A \cdot (0, 0, t) = (0, 0, 2t) = 2 \cdot (0, 0, t).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 2:

$$E(2) = \langle (0,0,1) \rangle$$

b) $T$ è diagonalizzabile se rispetto a una opportuna base ha associata una matrice diagonale, ovvero se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $T$. Prendiamo un autovettore relativo a ciascun autovalore:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (0,0,1)$$

e stabiliamo se sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice associata ai tre vettori:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $T$, dunque $T$ è diagonalizzabile. In realtà autovettori relativi ad autovalori differenti sono sempre linearmente indipendenti.

c) Abbiamo già determinato la base al punto precedente. Inoltre

$$\begin{array}{l} T(v_1) = v_1 \ \Rightarrow \ T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) = 3v_2 \ \Rightarrow \ T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) = 2v_3 \ \Rightarrow \ T(v_3) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} \end{array} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $D$ è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

La matrice $P$ diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

□

**Esercizio 9.4.** [Esercizio 4) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Quali sono gli autovalori di una matrice diagonale? E di una matrice triangolare?*

Soluzione:
Un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di una matrice $M$ se esiste $v \neq 0$ tale che $Mv = \lambda v$, ovvero $(M-\lambda I)v = 0$. Il metodo più semplice per verificare tale condizione è determinare per quali valori di $\lambda$ si ha

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Se $M$ è una matrice triangolare o diagonale resta tale anche la matrice $M - \lambda I$. Inoltre se

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & & \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & \dots & & \\ 0 & a_{22-\lambda} & a_{23} & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda & \dots & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(M - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda)$$

Di conseguenza $\lambda$ è un autovalore di $M$ se è verificata una delle condizioni

$$\lambda = a_{11}, \qquad \lambda = a_{22}, \ \dots \ , \ \lambda = a_{nn},$$

ovvero gli autovalori di una matrice $M$ triangolare o diagonale sono gli elementi della diagonale di $M$:

$$\lambda = a_{11}, \ a_{22}, \dots, \ a_{nn},$$

$\square$

**Esercizio 9.5.** [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Riconoscere che le due seguenti matrici $M$ sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice $P$ diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con $D$ matrice diagonale; ricordiamo che $P$ è una matrice le cui colonne sono autovettori di $M$).*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di $T$ è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori $v$ tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di $T$ relativi a $\lambda$. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \ \Rightarrow \ A \cdot v = \lambda v \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 3y + z \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = \lambda x \\ 3y + z = \lambda y \\ 4z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 3z = 0 \\ (3-\lambda)y + z = 0 \\ (4-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che la matrice ottenuta è quella associata al sistema omogeneo $(M - \lambda I)v = 0$. Quindi $T(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$ se e solo se $v$ è soluzione non nulla del sistema omogeneo associato $M - \lambda I$ Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi $T$ ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Quindi

$$\det(M-\lambda I) = 0 \ \Rightarrow \ \text{autovalori di } M\colon \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

A questo punto possiamo già affermare che la matrice $M$ è diagonalizzabile, in quanto ha 3 autovalori distinti, e di conseguenza 3 autovettori linearmente indipendenti. Per determinare la matrice $P$ diagonalizzante dobbiamo trovare gli autospazi $E(\lambda_i)$ relativi ad ogni autovalore $\lambda_i$.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - I$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2y+3z=0 \\ 2y+z=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \ (x,y,z) = (1,0,0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1,0,0) = \lambda \cdot (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0)$ e $E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y+3z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \ (x,y,z) = (1,1,0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1,1,0) = \lambda \cdot (1,1,0) = 3 \cdot (1,1,0)$ e $E(3) = \langle (1,1,0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 4$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 4I$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -3x+2y+3z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{5}{3}, 1, 1\right)t,$$

Quindi $T(5,3,3) = \lambda \cdot (5,3,3) = 4 \cdot (5,3,3)$ e $E(4) = \langle (5,3,3) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (5,3,3)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $T$. La matrice $P$ diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale $D$ è la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) = v_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = 3 \cdot (1,1,0) = 3v_2 = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= T(5,3,3) = 4 \cdot (5,3,3) = 4v_3 = (0,0,4)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dai tre autovalori.

Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di $T$ è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z, w)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori $v$ tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di $T$ relativi a $\lambda$. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Come nel caso precedente otteniamo che le soluzioni dell'equazione $T(v) = \lambda v$ sono le stesse soluzioni del sistema omogeneo associato a $M - \lambda I$; quindi $T(v) = \lambda v$ per qualche $v \neq 0$ se la matrice $M - \lambda I$ ha rango minore di 4 ovvero determinante nullo:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi

$$\det(M - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; \text{autovalori di } M\text{:} \begin{cases} \lambda_1 = 2 & \text{(doppio)} \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

A questo punto non possiamo concludere nulla circa la diagonalizzabilità di $M$ in quanto abbiamo trovato un autovalore doppio. In particolare se $E(2)$ ha dimensione 2 allora $M$ è diagonalizzabile. Viceversa se $E(2)$ ha dimensione 1 allora $M$ non è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 2I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0)t + (0, 0, 0, 1)s \quad \forall t, s \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 0, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0, 0)$, $\quad T(0, 0, 0, 1) = \lambda \cdot (0, 0, 0, 1) = 2 \cdot (0, 0, 0, 1)$ e $E(2) = \langle (1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Abbiamo così trovato che l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 2, uguale alla sua molteplicità algebrica. Di conseguenza $M$ è diagonalizzabile in quanto ha sicuramente 4 autovettori linearmente indipendenti.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4z = 0 \\ 2x = 0 \\ -w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 1, 0, 0)t, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 1, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 1, 0, 0) = 3 \cdot (1, 1, 0, 0)$ e $E(3) = \langle (1, 1, 0, 0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 5$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 5I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ -3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 2, 1, 0)\, t, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 2, 1, 0) = \lambda \cdot (1, 2, 1, 0) = 5 \cdot (1, 2, 1, 0)$ e $E(5) = \langle (1, 2, 1, 0) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 0, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (1, 2, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di $T$. La matrice $P$ diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$

(espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale $D$ è la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$T(v_1) = 2v_1 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_2) = 2v_2 = (0,2,0,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = 3v_3 = (0,0,3,0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_4) = 5v_4 = (0,0,0,5)_{\mathcal{B}}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori.

□

**Esercizio 9.6.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice $A$.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ =& (-1-\lambda)(-1-\lambda) = (-1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di $A$ sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico, quindi $A$ ha un solo autovalore (doppio):

$$\lambda = -1$$

Inoltre il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (t,0) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-1) = \langle (1,0) \rangle$$

c) La matrice $A$ non è diagonalizzabile in quanto è una matrice $2 \times 2$ con un solo autovalore linearmente indipendente.

Consideriamo la matrice $B$.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $B$:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) =& \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ =& (-1-\lambda)(1-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 5 \end{aligned}$$

b) Poichè il polinomio caratteristico di $B$ non ha zeri reali $B$ non ha autovalori.
c) La matrice $B$ non è diagonalizzabile in quanto è una matrice $2 \times 2$ priva di autovalori.

Consideriamo la matrice $C$.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $C$:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) =& \det(C - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\ =& (-3-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di $C$ sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \ \to \ \lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 1$$

Quindi $C$ ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

Consideriamo prima $\lambda_1 = -4$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-4t, t) \quad \forall \, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-4) = \langle (-4, 1) \rangle$$

Consideriamo ora $\lambda_2 = 1$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 4II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, t) \quad \forall \, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(1) = \langle (1, 1) \rangle$$

c) La matrice $C$ è diagonalizzabile in quanto è una matrice $2 \times 2$ con due autovalori distinti (di molteplicità algebrica 1), quindi $C$ ha due autovettori linearmente indipendenti.

□

**Esercizio 9.7.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:
Consideriamo la matrice $A$.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di $A$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \ \Rightarrow \ (2-\lambda) = 0 \text{ oppure } (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di $A$ sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \quad \text{doppio} \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

c) La matrice $A$ non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno). Di conseguenza esistono solamente due autovettori linearmente indipendenti e non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $A$.

Consideriamo ora la matrice $B$.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $B$:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6] - 1[-7(-\lambda-2)-6] - [-42+6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1) - 1] \\ &= (\lambda-4)[-\lambda^2 - 4\lambda - 4] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di $B$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda-4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda - 4) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di $B$ sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 4 \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio} \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ 1/6III \end{matrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 6 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 7 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 7I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice $B$ non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice $C$.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $C$:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di $C$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ (\lambda + 2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di $C$ sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t - s, t, s) = (t, t, 0) + (-s, 0, s) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0),\ (-1, 0, 1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che $C$ è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -12 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t, t, 2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

c) La matrice $C$ è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

□

**Esercizio 9.8.** *Sia $T$ l'endomorfismo definito dalla matrice associata rispetto alla base canonica:*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare Nucleo e Immagine di $T$.*
b) *Determinare autovalori e autovettori di $T$.*
c) *Stabilire se $T$ è diagonalizzabile.*
d) *Stabilire se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $A$, e in caso positivo determinarla.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\text{rg}(A) = 2$, di conseguenza:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 2, \qquad \dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(A) = 1$$

Inoltre una base dell'immagine di $T$ è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \{(0, 1, 1),\ (6, 0, 0)\}$$

Per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $A$:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-1, 0, 1)\}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $T$:

$$p_A(\lambda) = -\lambda[-\lambda(1-\lambda)] - 6[1 - \lambda - 1] = \lambda^2(1-\lambda) + 6\lambda = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 6)$$

Quindi gli autovalori di $T$ sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_3 = 3 \quad \text{singolo} \end{aligned}$$

c) Possiamo già rispondere alla seconda domanda in quanto gli autovalori sono tutti singoli, quindi la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 6y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(0) = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(-2) = \langle (-3, 1, 1) \rangle$$

Infine calcoliamo l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(3) = \langle (2, 1, 1) \rangle$$

d) Poichè $T$ è diagonalizzabile esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $T$:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \{ (1, 0, -1),\ (-3, 1, 1),\ (2, 1, 1)\ \}$$

□

**Esercizio 9.9.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di $T$ e si stabilisca se $T$ è diagonalizzabile.*

b) *Si determini una base di $R^3$ formata da autovettori di $T$.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$ sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(-2-\lambda)(5-\lambda)+12] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \end{aligned}$$

Gli autovalori di $A$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \quad \text{doppio} \\ \lambda_2 &= 1 \quad \text{singolo} \end{aligned}$$

$T$ è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/2II \\ 2III + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2y + 3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(s, -\frac{3}{2}t, t\right) \quad \forall s,t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(2) = \langle (1,0,0),\ (0,-3,2) \rangle$$

Poiché $E(1)$ ha sicuramente dimensione 1, la somma delle dimensioni degli autospazi è $3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ e $T$ è diagonalizzabile.

b) Per determinare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori dobbiamo determinare anche l'autospazio $E(1)$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/3II \\ 3III + 2II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-2t,t) \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(1) = \langle (0,-2,1) \rangle$$

Infine la base di $\mathbf{R}^3$ cercata è

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (0,-3,2),\ (0,-2,1)\}$$

□

**Esercizio 9.10.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e gli autovalori di $A$.*
b) *Si determini l'autospazio $E(\lambda)$ relativo ad ogni autovalore $\lambda$ trovato.*
c) *Si verifichi che $A$ è diagonalizzabile.*
d) *Si trovi la matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale (una tale matrice $P$ è detta diagonalizzante ed ha per colonne gli autovalori di $P$).*
e) *Si trovi la matrice diagonale $B$ simile alla matrice $A$.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora i valori di $\lambda$ per cui $p_A(\lambda) = 0$, trovando che gli autovalori di $A$ sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 1$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 1 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(1) = \langle (-2, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 2II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(4) = \langle (1, 1) \rangle$$

c) La somma delle dimensioni degli autospazi è 2, quindi $A$ è diagonalizzabile. In realtà essendo i due autovalori singoli eravamo già certi della diagonalizzabilità anche senza calcolare gli autospazi.

d) La matrice $P$ cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(-2, 1),\ (1, 1)\}$$

Tale matrice ha per colonne i vettori della base di partenza $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) La matrice $B$ si trova immediatamente utilizzando la matrice $P$ determinata al punto precedente. Infatti $B = P^{-1}AP$. Ora

$$P^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice $B$ è, come ci aspettavamo, la matrice diagonale con gli autovettori sulla diagonale.

□

**Esercizio 9.11.** *Si ripeta l'esercizio precedente con le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (5-\lambda)(3-\lambda) - 3$$
$$= \lambda^2 - 8\lambda + 12$$

Cerchiamo ora i valori di $\lambda$ per cui $p_A(\lambda) = 0$, trovando che gli autovalori di $A$ sono

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 6$$

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 3II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, -t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(2) = \langle (1, -1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 6$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 6 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(6) = \langle (3, 1) \rangle$$

c) Come nell'esercizio precedente $A$ è diagonalizzabile perché la somma delle dimensioni degli autospazi è 2 (o perché i due autovalori sono singoli).

d) La matrice $P$ cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(1, -1),\ (3, 1)\}$$

Tale matrice ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Già sappiamo che la matrice $B$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori di $A$. Lo stesso risulato lo troviamo utilizzando la matrice $P$ determinata al punto precedente. Infatti $B = P^{-1}AP$. Ora

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

Gli autovalori di $A$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2)(-\lambda^2+2\lambda+8)=0\\
&\Rightarrow\ (\lambda+2)=0 \text{ oppure } (-\lambda^2+2\lambda+8)=0\\
&\Rightarrow\ \lambda_1=-2,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=4
\end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di $A$ sono

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=-2 \quad \text{doppio}\\
&\lambda_2=4
\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso non possiamo affermare che $A$ è diagonalizzabile in quanto dipende dalla diemsione dell'autospazio $E(-2)$.

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda=-2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A-\lambda I$, con $\lambda=-2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0\\ 3 & -3 & 3 & | & 0\\ 6 & -6 & 6 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \\ III-2I\end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t-s\\ y=t\\ z=s\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z)=(t-s,t,s)=(t,t,0)+(-s,0,s) \quad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2)=\langle(1,1,0),\ (-1,0,1)\rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che $A$ è diagonalizzabile in quanto $\lambda=4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda=-2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda=4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A-\lambda I$, con $\lambda=4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & | & 0\\ 3 & -9 & 3 & | & 0\\ 6 & -6 & 0 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \\ III+2II\end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0\\ 0 & -12 & 6 & | & 0\\ 0 & 0 & 6 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x-y+z=0\\ -2y+z=0\\ 0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t\\ y=t\\ z=2t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z)=(t,t,2t) \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4)=\langle(1,1,2)\rangle$$

c) La matrice $C$ è diagonalizzabile in quanto la somma delle dimensioni degli autospazi è 3.

d) La matrice $P$ cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B}=\{(1,1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,2)\}$$

Tale matrice ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

e) Già sappiamo che la matrice $B$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori di $A$. Lo stesso risulato lo troviamo utilizzando la matrice $P$ determinata al punto precedente.

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.12.** *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di* $T$.
b) *Si stabilisca se* $T$ *è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice* $P$ *diagonalizzante.*
c) *Si determini una base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che la matrice associata a* $T$ *rispetto a* $\mathcal{B}$ *sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.*

Soluzione:

Determiniamo innanzittutto la matrice $A$ associata a $T$ rispetto alla base canonica, ovvero la matrice che ha per colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Per calcolare gli autovalori di $T$ (cioè di $A$) determiniamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] \\ =& (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

Risolvendo $p_A(\lambda) = 0$ troviamo che gli autovalori di $A$ sono

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 1$$

b) Avendo 3 autovalori distinti la matrice $A$, e quindi $T$, è sicuramente diagonalizzabile. Per calcolare la matrice diagonalizzante dobbiamo determinare gli autospazi.

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 3, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(2) = \langle (0, 3, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ \\ III - 1/3I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0, -1, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(-2) = \langle (0, -1, 1) \rangle$$

Consideriamo infine l'autovalore $\lambda = 1$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (-1, 1, 0) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(1) = \langle (-1, 1, 0) \rangle$.

La matrice $P$ cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(0, 3, 1),\ (0, -1, 1),\ (-1, 1, 0)\}$$

Di conseguenza:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La base cercata è la base $\mathcal{B}$ di autovettori trovata al punto precedente. Inoltre la matrice $D$ diagonale associata a $T$ rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice $D = P^{-1}AP$ che ha sulla diagonale gli autovalori.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.13.** [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

*Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale $k$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice $A$ e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)(2-\lambda)$$

Gli autovalori di $A$ sono quindi

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 2$, allora $A$ ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice $A$ diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 2$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e $A$ non è diagonalizzabile.

- Se $k = 2$ la matrice $A$ diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{doppio}$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 2$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1), e $A$ è diagonalizzabile.

Consideriamo ora la matrice $B$ e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$

Gli autovalori di $B$ sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$

Poichè $B$ ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica almeno 2, ma molteplicità geometrica 1, e $B$ non è diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice $C$ e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_C(\lambda) = (3-\lambda)(k-\lambda)(1-\lambda)$$

Gli autovalori di $C$ sono

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 3$, allora $C$ ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice $C$ diventa

  $$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ed ha come autovalori

  $$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 3$$

  Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato a $C - I$:

  $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,-2,0)\ \rangle$$

  Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e $C$ non è diagonalizzabile.
- Se $k = 3$ la matrice $C$ diventa

  $$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ed ha come autovalori

  $$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3 \quad \text{doppio}$$

  Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 3$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $C - 3I$:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

  Quindi $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e $C$ non è diagonalizzabile.

Consideriamo infine la matrice $D$ e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_D(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$

Gli autovalori di $D$ sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$

Poichè $D$ ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $D - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica 2.

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e l'autovalore $\lambda = k \neq 1$ ha molteplicità 1) quindi $D$ è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3, ma molteplicità geometrica 2 quindi $D$ non è diagonalizzabile.

□

**Esercizio 9.14.** *Sia $S$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

a) *Determinare autovalori e autovettori di $S$.*
b) *Stabilire se $S$ è diagonalizzabile e in caso positivo individuare la matrice diagonalizzante.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(-\lambda)(2-\lambda)$$

Gli autovalori di $A$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_3 = 2$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 1$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ III + 2I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y + z + 2w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -t \\ z = -t \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0,0),\ (0,-1,-1,1)\ \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che $A$ è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 0$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z + 4w = 0 \\ y = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \langle\ (-2,0,1,0)\ \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 & \mid & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z + 4w = 0 \\ y = 0 \\ y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle\ (2, 0, -1, 1)\ \rangle$$

b) Abbiamo già osservato che $T$ è diagonalizzabile in quanto la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $4 = \dim(\mathbf{R}^4)$, inoltre la matrice diagonalizzante $P$ è:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.15.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2\right).$$

a) *Calcolare gli autovalori e gli autovettori di $T$.*
b) *$T$ diagonalizzabile?*
c) *Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?*

Soluzione:
Calcoliamo la matrice $A$ associata a $T$, che ha per colonne $T(e_1), T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)$$

Quindi $A$ ha un solo autovalore reale $\lambda = 1$.

Calcoliamo l'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \mid & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(1) = \langle\left(\frac{3}{2}, 1, 1\right)\rangle = \langle(3, 2, 2)\rangle$.

b) $T$ non è daigonalizzabile in quanto ha un solo autovalore (singolo), quindi la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $1 < 3$.
c) Se consideriamo il campo dei numeri complessi, $T$ ha tre autovalori distinti:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Essendo 3 autovalori singoli la somma degli autospazi è sicuramente 3 e l'endomorfismo $T$ in questo caso risulta diagonalizzabile.

□

**Esercizio 9.16.** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*la matrice associata all'applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{\ 1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ \}$$

a) *Si determinino gli autovalori di* $T$.
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di* $T$.
c) *Si stabilisca se* $T$ *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\,[(1-\lambda)(-1-\lambda)-3] = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$$

e gli autovalori di $T$ sono

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -2$$

b) Calcoliamo ora gli autovettori.

– Consideriamo $\lambda = 1$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 1$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (-1,1,0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(-1,1,0)_{\mathcal{B}} = -1\cdot(1,1,0) + 1\cdot(0,3,0) + 0\cdot(0,1,1) = (-1,2,0)$$

e

$$E(1) = \langle\ (-1,2,0)\ \rangle$$

– Consideriamo $\lambda = 2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,3,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,3,1)_{\mathcal{B}} = 0\cdot(1,1,0) + 3\cdot(0,3,0) + 1\cdot(0,1,1) = (0,10,1)$$

e

$$E(2) = \langle\ (0,10,1)\ \rangle$$

– Consideriamo $\lambda = -2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ 1/3II \\ III - 1/3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,-1,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,-1,1)_\mathcal{B} = 0\cdot(1,1,0) + -1\cdot(0,3,0) + 1\cdot(0,1,1) = (0,-2,1)$$

e

$$E(-2) = \langle\ (0,-2,1)\ \rangle$$

c) La matrice $A$, e quindi l'applicazione $T$, è diagonalizzabile perchè ha tre autovalori distinti.

□

**Esercizio 9.17.** *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia $S$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_\mathcal{B}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Trovare gli autovalori (reali) di $S$.*
b) *Trovare gli autovettori di $S$ e stabilire se $S$ è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Gli autovalori di $T$ non dipendono dalla base, quindi possiamo lavorare sulla matrice $A$:
$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 49)$$
Quindi $S$ ha due autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 7$.

b) Trovare gli autovettori di $S$ possiamo comunque lavorare sulla matrice $A$ ricordando però che i vettori trovati saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$:
$$E(1) = N(A-I) : \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 5 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II - 1/2I \\ 1/3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 9 & -9 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/9II \\ 1/6III + 1/9II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$
Quindi l'autospazio $E(1)$ è generato dal vettore $(0,1,1)_\mathcal{B}$, cioè dal vettore $v_2 + v_3 = (2,2,1)$. Infine $E(1) = \langle(2,2,1)\rangle$.

Analogamente:
$$E(7) = N(A-7I) : \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + 1/2I \\ 1/3III + 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$
Quindi l'autospazio $E(7)$ è generato dal vettore $(1,1,0)_\mathcal{B}$, cioè dal vettore $v_1 + v_2 = (2,1,0)$. Infine $E(7) = \langle(2,1,0)\rangle$.

$S$ non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 7$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

□

**Esercizio 9.18.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Stabilire se $T$ è diagonalizzabile.*

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$, sviluppando rispetto alla seconda colonna:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $B$ sono

- $\lambda = 1$ doppio,
- $\lambda = 2$ doppio.

Per stabilire se $T$ è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di entrambi gli autospazi $E(1)$ e $E(2)$.

Determiniamo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + I \\ IV - I \\ III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t - s \\ z = t \\ w = s \end{cases} \quad \Rightarrow E(1) = \langle\ (2, 1, 1, 0),\ (0, -1, 0, 1)\ \rangle$$

Determiniamo ora $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ IV + II \\ \\ I - 2III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + z + w = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(2) = \langle\ (1, 0, 0, 1),\ (0, 1, 0, 0)\ \rangle$$

Quindi entrambi gli autospazi hanno dimensione due e l'endomorfismo $T$ è diagonalizzabile.

□

**Esercizio 9.19.** *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori della matrice data.*
b) *Stabilire se la matrice data diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono:

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 2 \quad \text{doppio}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 3y + 5z + 7w = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{7}{3}t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(-1) = \langle (0, -7, 0, 3) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ 5z + 7w = 0 \\ -3z = 0 \\ 8z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(2) = \langle (1,0,0,0),\ (0,1,0,0) \rangle$

b) $A$ non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $-1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

$\square$

**Esercizio 9.20.** *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di $M$ al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*

b) *Fissato a piacere un valore di $k$ per cui $M$ è diagonalizzabile, determinare per tale $k$ la matrice $P$ diagonalizzante.*

Soluzione:

Sviluppando rispetto alla seconda colonna, il polinomio caratteristico di $M$ è

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(k-\lambda)$$

quindi gli autovalori di $M$ sono $\lambda = 1,\ 2,\ k$.

Calcoliamo ora gli autospazi $E(1)$ e $E(2)$:

$$E(1) = \mathrm{N}(M-I): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\dim(E(1)) = \dim(\mathrm{N}(M-I)) = 4 - \mathrm{rg}(M-I) = 4 - 2 = 2$

$$E(2) = \mathrm{N}(M-2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ III - II \\ I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & k-1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\dim(E(2)) = \dim(\mathrm{N}(M-2I)) = 4 - \mathrm{rg}(M-2I) = 4 - 3 = 1$

a) Dobbiamo distinguere tre casi
   - Se $k \neq 1,\ 2$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono

     $$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ doppio}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ singolo}, && \dim(E(2)) = 1 \\ &\lambda = k \text{ singolo}, && \Rightarrow \dim(E(k)) = 1 \end{aligned}$$

     quindi $M$ è diagonalizzabile.
   - Se $k = 1$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono

     $$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ triplo}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ singolo}, && \dim(E(2)) = 1 \end{aligned}$$

     quindi $M$ non è diagonalizzabile.
   - Se $k = 2$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono

     $$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ doppio}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ doppio}, && \dim(E(2)) = 1 \end{aligned}$$

     quindi $M$ non è diagonalizzabile.

b) Fissiamo per esempio $k=0$. Dai calcoli svolti precedentemente, sostituendo $k=0$, ottenaimo

$$E(1) = \langle\ (-1,0,3,1),\ (0,1,0,0)\ \rangle, \qquad E(2) = \langle\ (2,1,1,0)\ \rangle$$

Calcoliamo inoltre $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(M): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \\ w=0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ E(0) = \langle\ (0,1,1,0)\ \rangle$$

Infine la matrice diagonalizzante è

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.21.** *Sia $A$ la matrice dipendente dal parametro reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di $A$ al variare di $k$.*
b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di $A$ per un valore opportuno di $k$.*

Soluzione:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$, sviluppando rispetto a opportune righe

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-k-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ k & 0 & k+2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2[(2-k-\lambda)(k+2-\lambda)+k^2] = (1-\lambda)^2[(2-\lambda)^2-k^2+k^2] \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

quindi gli autovalori di $A$ sono $\lambda = 2,\ 1$, entrambi di molteplicità algebrica due.
Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A-2I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & -k & 0 & -k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x=0 \\ (k-3)x-ky-kw=0 \\ -z=0 \\ (2-k)x+ky+kw=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -ky-kw=0 \\ z=0 \\ ky+kw=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=0 \\ w=t \end{cases} \quad \Rightarrow\ \dim(E(2)) = 1 \Rightarrow\ A \text{ non è diagonalizzabile}$$

- Se $k=0$ otteniamo

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=0 \\ w=t \end{cases} \Rightarrow \ \dim(E(2))=2 \text{ e } E(2)=\langle(0,1,0,0),\ (0,0,0,1)\rangle.$$

A questo punto $A$ può essere diagonalizzabile solo se $k=0$. Si tratta di verificare se per $k=0$ anche $\dim(E(1))=2$.

$$E(1)=N(M-I) \text{ con } k=0: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=s \\ w=-2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim(E(1))=2 \text{ e } E(1)=\langle(1,3,0,-2),\ (0,0,1,0)\rangle \text{ con } k=0.$$

a) Abbiamo verificato che $A$ è diagonalizzabile solo per $k=0$.
b) Per $k=0$ una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di $A$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4)=\{\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1),\ (1,3,0,-2),\ (0,0,1,0)\ \}$$

□

**Esercizio 9.22.** *Data la matrice*

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di $M$ al variare del parametro $k\in\mathbf{R}$.*
b) *Per $k=2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di $M$.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di $M$ è

$$p_M(\lambda)=(1-\lambda)(k-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda=1,\ 2,\ 3,\ k$ e dobbiamo discutere i valori di $k$.

– Se $k\neq 1,2,3$ i quattro autovalori sono distinti e singoli, quindi $M$ è diagonalizzabile.
– Se $k=1$ l'autovalore $\lambda=1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(1)=N(M-I): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M-I)=3$, $\dim(E(1))=1$ e $M$ non è diagonalizzabile.

– Se $k=2$ l'autovalore $\lambda=2$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(2)=N(M-2I): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ \\ IV+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y+4z-w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=s \\ z=t \\ w=2s+4t \end{cases} \Rightarrow E(2)=\langle(-1,0,1,4),\ (0,1,0,2)\rangle$$

Poiché $\lambda=2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli, per $k=2$ la matrice $M$ è diagonalizzabile.

– Se $k=3$ l'autovalore $\lambda=3$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(3)=N(M-3I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M-3I)=3$, $\dim(E(3))=1$ e $M$ non è diagonalizzabile.

b) Per $k=2$ abbiamo già determinato $E(2)$. Calcoliamo gli altri due autospazi:

$$E(1)=N(M-I):\begin{bmatrix}2&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\-1&2&3&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\w=t\end{cases}\Rightarrow E(1)=\langle(0,0,0,1)\rangle$$

$$E(3)=N(M-3I):\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&-1&1&0\\0&0&-1&0\\-1&2&3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{r}\\ \\ III+I\\ IV+II\end{array}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&4&-2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}z=0\\x-y+z=0\\y+4z-2w=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=0\\w=t\end{cases}\Rightarrow E(3)=\langle(2,2,0,1)\rangle$$

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B}=\{\ (-1,0,1,4),\ (0,1,0,2),\ (0,0,0,1),\ (2,2,0,1)\}$$

□

**Esercizio 9.23.** *Si considerino le matrici*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&4\\0&0&2\end{bmatrix}\quad e\quad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\k&1&0\\5&k-2&1\end{bmatrix}.$$

a) *Determinare per quali valori di $k$ la matrice $B$ è diagonalizzabile.*

b) *Stabilire per quali valori di $k$ le due matrici $A$ e $B$ sono simili.*

Soluzione:

a) Abbiamo che

$$p_B(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi $B$ ha due autovalori: $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=1$, doppio, ed è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $B-I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\k&0&0&0\\5&k-2&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=0\\kx=0\\5x+(k-2)y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\(k-2)y=0\end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi.

– Se $k\neq 2$ otteniamo

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 1 e $B$ non è diagonalizzabile.

– Se $k=2$ otteniamo

$$\begin{cases}x=0\\y=s\\z=t\end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e $B$ è diagonalizzabile.

b) Due matrici diagonalizzabili sono simili sse hanno gli stessi autovalori (contati on le rispettiva molteplicità). Studiamo quindi la diagonalizzabilità di $A$.

$$p_A(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Come la matrice $B$, anche $A$ è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $A-I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e $A$ è diagonalizzabile.

In conclusione $A$ e $B$ sono simili quando sono entrambe diagonalizzabili, ovvero se $k=2$

□

**Esercizio 9.24.** *Siano $A$ e $B$ le matrici reali*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Determinare, se esistono, i valori del parametro reale $k$ per cui $A$ e $B$ sono simili.*

Soluzione:

Due matrici diagonalizzabili sono simili se sono simili alla stessa matrice diagonale, ovvero se hanno gli stessi autovalori. Inoltre se una delle due matrici è diagonalizzabile mentre l'altra non lo è, allora le due matrici non sono simili. Studiamo quindi la diagonalizzabilità di $A$ e $B$.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

quindi $A$ e $B$ hanno gli stessi autovalori $\lambda_1 = 1$, doppio, e $\lambda_2 = 3$.

Per stabilire se $A$ è diagonalizzabile calcoliamo la dimensione del suo autospazio $E_A(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(E_A(1)) = 3 - \text{rg}(A-I) = 3 - 1 = 2$$

e la matrice $A$ è diagonalizzabile.

A questo punto possiamo affermare che $A$ e $B$ sono simili se e solo se anche $B$ è diagonalizzabile. Calcoliamo quindi la dimensione del suo autospazio $E_B(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B-I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-1)y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E_B(1)$ ha dimensione 2 se e solo se $k=1$.

Infine $A$ e $B$ sono simili solamente se $k=1$, quando sono entrambe simili alla matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.25.** *Considerare le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e di $B$.*
b) *Stabilire se $A$ e $B$ sono simili.*
c) *Esistono valori di $t$ per cui $C$ e $B$ sono simili?*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di $A$ è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono $\lambda = 2$ doppio e $\lambda = 1$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E_A(1) = N(A-I) : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E_A(1) = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$E_A(2) = N(A-2I) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_A(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

Analogamente calcoliamo gli autovalori e gli autovettori di $B$:

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $B$ sono $\lambda = 2$ doppio e $\lambda = 1$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E_B(1) = N(B-I) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_B(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E_B(2) = N(B-2I) : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E_B(2) = \langle (1,1,0),\ (0,0,1) \rangle$$

b) $A$ e $B$ non sono simili poiché $A$ non è diagonalizzabile mentre $B$ lo è.

c) Studiamo gli autovalori e la diagonalizzabilità di $C$:

$$p_C(\lambda) = (1-\lambda)(t-\lambda)(2-\lambda)$$

Condizione necessaria perché $B$ e $C$ siano simili è che abbiano gli stessi autovalori con la stessa molteplicità, quindi deve essere $t = 2$. Verifichiamo se per tale valore anche $C$ è diagonalizzabile.

$$E_C(2) = N(C-2I) : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E_C(2) = \langle (1,1,0),\ (1,0,1) \rangle$$

Infine per $t = 2$ le matrici $B$ e $C$ sono simili in quanto sono entrambe simili alla matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.26.** *Siano $A$ e $B$ le matrici seguenti*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Dire per quali valori del parametro reale $k$ la matrice $B$ è diagonalizzabile.*

b) *Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $B$:

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $B$ sono

- $\lambda = 1$ doppio
- $\lambda = 2$

Poichè l'autovalore $\lambda = 2$ è singolo sappiamo che il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione 1. Si tratta quindi di controllare solamente la dimensione dell'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ k & 0 & 0 & | & 0 \\ 5 & k-2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-2)y = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi

– Se $k = 2$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (0,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi se $k = 2$ la matrice $B$ è diagonalizzabile.

– Se $k \neq 2$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi se $k \neq 2$ la matrice $B$ non è diagonalizzabile.

b) Dal punto precedente sappiamo che per $k = 3$ la matrice $B$ non è diagonalizzabile. Studiamo ora la matrice $A$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono

– $\lambda = 1$ doppio
– $\lambda = 2$

Quindi $A$ ha effettivamente gli stessi autovalori di $B$.

Come per la matrice $B$, per stabilire sa $A$ è diagonalizzabile dobbiamo solamente controllare la dimensione dell'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Quindi $A$ è diagonalizzabile, ovvero è associata ad un endomorfismo diagonalizzabile, mentre per $k = 3$ la matrice $B$ non lo è. Di conseguenza le matrici $A$ e $B$ non possono essere associate allo stesso endomorfismo.

□

**Esercizio 9.27.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se 4 è autovalore di $A$. Calcolare gli autovalori e autovettori di $A$.*
b) *La matrice $A$ è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*
c) *Sia $C$ la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

*Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui $A$ e $C$ siano simili?*

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$ :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 7-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} &= (6-\lambda)\left[(7-\lambda)(3-\lambda)+3\right] - 3\left[6-2\lambda+2\right] + \left[6-14+2\lambda\right] = \\ &= (6-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24) - 3(8-2\lambda) - (2\lambda-8) = \\ &= (6-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-4) + 6(\lambda-4) - 2(\lambda-4) = \\ &= (\lambda-4)\left[(6-\lambda)(\lambda-6)+6-2\right] = -(\lambda-4)(\lambda^2-12\lambda+32) \end{aligned}$$

a) Gli autovalori di $A$ sono $\lambda = 4$ (doppio) e $\lambda = 8$. Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(4) = N(A-4I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2x+3y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(4) = \langle\ (-3,2,0),\ (1,0,2)\ \rangle$

$$E(8) = N(A-8I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \\ II-I \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(8) = \langle\ (1,1,1)\ \rangle$

b) $A$ è diagonalizzabile perché la molteplicitá algebrica e geometrica dei sui autovalori coincidono. La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Poichè $A$ è diagonalizzabile, $A$ e $C$ sono simili se anche $C$ ha gli stessi autovalori di $A$ ed è anch'essa diagonalizzabile (cioè sono simili alla stessa matrice diagonale). Perchè $A$ e $C$ abbiano gli stessi autovalori ($\lambda = 4$ doppio, e $\lambda = 8$) deve essere $t = 8$. Inoltre per tale valore l'autospazio $E(4)$ di $C$ è

$$E_C(4) = N(C-4I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_C(4) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle \Rightarrow \dim(E_C(4)) = 1$$

Di conseguenza $C$ non è diagonalizzabile e $A$ e $C$ non sono mai simili.

□

**Esercizio 9.28.** *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori della matrice $A$.*
b) *Stabilire per quali valori del parametro reale $k$ la matrice data è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$ sviluppando rispetto alla prima colonna:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& (3-k-\lambda)\cdot\left[(2-\lambda)(3-k-\lambda)-k\right] + k(3-k-\lambda) \\ &= (3-k-\lambda)(2-\lambda)(3-k-\lambda) - k(3-k-\lambda) + k(3-k-\lambda) \\ &= (3-k-\lambda)(2-\lambda)(3-k-\lambda) = (3-k-\lambda)^2(2-\lambda) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 2 \\ &\lambda_2 = 3-k \quad \text{almeno doppio} \end{aligned}$$

Notiamo che possiamo solo dire che $\lambda_2$ è almeno doppio, in quanto se $k = 1$ avremmo un unico autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, triplo.

b) Per stabilire se la matrice è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(-k+3)$, che deve essere almeno 2 (la dimensione deve essere 3 nel caso $k=1$ quando si ha un unico autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ triplo).

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(3-k)$ relativo all'autovalore $\lambda_2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-(3-k)I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k & k-1 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ -I \\ III+I \end{array} \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} kx+(k-1)y+kz=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx+kz=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema dobbiamo distinguere due casi

– Se $k=0$, allora il sistema si riduce alla sola equazione $y=0$, quindi ha soluzione

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$$

e $E(-k+3) = E(3) = \langle (1,0,0),\ (0,0,1) \rangle$. In particolare $E(-k+3)$ ha dimensione 2 uguale alla molteplicità algebrica di $\lambda_2$ (Notiamo che per $k=0$, $\lambda_1 = 2$ è singolo e $\lambda_2 = 3$ è doppio). Di conseguenza se $k=0$ la matrice è diagonalizzabile.

– Se $k \neq 0$ possiamo dividere la prima equazione per $k$ ottenendo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$$

Quindi in questo caso $E(-k+3) = \langle (1,0,-1) \rangle$. In particolare $E(-k+3)$ ha dimensione 1 minore della molteplicità algebrica di $\lambda_2$. Di conseguenza se $k \neq 0$ la matrice non è diagonalizzabile.

□

**Esercizio 9.29.** *Sia $S$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & b & b-3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

a) *Determinare autovalori e autovettori di $S$.*
b) *Trovare i valori di $b$ per i quali $S$ è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio carateristico di $A$ è:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(b-\lambda)[(3-\lambda)^2-1] = (2-\lambda)(b-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

Per determinare esattamente gli autovalori dobbiamo distinguere 3 casi

– Se $b \neq 2, 4$: $\lambda = 2$ doppio, $\lambda = 4$, $\lambda = b$
– Se $b = 2$,: $\lambda = 2$ triplo, $\lambda = 4$
– Se $b = 4$: $\lambda = 2$ doppio, $\lambda = 4$ doppio

Determiniamo l'autospazio $E(2)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & b-2 & b-3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+2I \\ III+II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo distinguere due casi
- Se $b \neq 2$, $E(2) = \langle \left(-\frac{1}{2}, -1, 1, 0\right),\ (0,0,0,1) \rangle$
- Se $b = 2$, $E(2) = \langle \left(-\frac{1}{2}, 0, 1, 0\right),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1) \rangle$

  Determiniamo l'autospazio $E(4)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -2 & b-4 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & b-4 & b-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & b-4 & b-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & b-4 & b-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi
- Se $b \neq 4$, $E(4) = \langle \left(\frac{1}{2}, -1, 1, 0\right) \rangle$
- Se $b = 4$, $E(4) = \langle \left(\frac{1}{2}, 0, 1, 0\right),\ (0,1,0,0) \rangle$

  Determiniamo l'autospazio $E(b)$ nei casi $b \neq 2, 4$:

$$\begin{bmatrix} 3-b & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 3-b & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 3-b & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II+(3-b)I \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -b^2+6b-8 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & | & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo supposto $b \neq 2, 4$ si ha $2-b \neq 0$ e $-b^2+6b-8 \neq 0$, quindi
- Se $b \neq 2, 4$, $E(b) = \langle (0,1,0,0) \rangle$

b) Abbiamo trovato che:
- Se $b \neq 2, 4$, allora $\dim(E(2)) = 2,\ \dim(E(4)) = 1,\ \dim(E(b)) = 1$, quindi $T$ è diagonalizzabile.
- Se $b = 2$, allora $\dim(E(2)) = 3,\ \dim(E(4)) = 1$, quindi $T$ è diagonalizzabile.
- Se $b = 4$, allora $\dim(E(2)) = 2,\ \dim(E(4)) = 2$, quindi $T$ è diagonalizzabile.

Infine $T$ è sempre diagonalizzabile.

□

**Esercizio 9.30.** *Sia $A$ la matrice reale dipendente dal parametro $k$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare per quali $k$ la matrice $A$ è diagonalizzabile.*
b) *Per i valori determinati in* a)*, trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $A$*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di $A$ è

$$p_A(\lambda) = (k-\lambda)[(1-\lambda)^2 - k^2] = (k-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1 - k^2]$$

Quindi gli autovalori, non necessariamente distinti, sono $\lambda = k,\ 1+k,\ 1-k$. Distinguiamo i casi in cui gli autovalori possono essere doppi:
- Se $k = 0$, allora $k+1 = -k+1 = 1$ è un autovalore doppio,
- Se $k = \frac{1}{2}$, allora $k = -k+1 = \frac{1}{2}$ è un autovalore doppio,
- Se $k \neq 0, \frac{1}{2}$ i tre autovalori sono distinti.

Di conseguenza dobbiamo distinguere tre casi per studiare la diagonalizzazione.
- Se $k = 0$ l'autovalore $\lambda = 1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(1) = N(A-I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Poichè $\text{rg}(A-I) = 2$, $\dim(E(1)) = 1$ e $A$ non è diagonalizzabile.

– Se $k=\frac{1}{2}$ l'autovalore $\lambda=\frac{1}{2}$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E\left(\frac{1}{2}\right)=N\left(A-\frac{1}{2}I\right):\ \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\0&0&0\\1&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}4I\\ \\ 2III-4I\end{array}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$2x+z=0\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=s\\z=-2t\end{cases}\Rightarrow E\left(\frac{1}{2}\right)=\langle(1,0,-2),\ (0,1,0)\rangle$$

Poiché $\lambda=\frac{1}{2}$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e l'altro autovalore $\lambda=k+1=\frac{3}{2}$ è singolo, per $k=\frac{1}{2}$ la matrice $A$ è diagonalizzabile.

– Se $k\neq 0,\frac{1}{2}$ i tre autovalori sono distinti e singoli, quindi $A$ è diagonalizzabile.

b) Calcoliamo gli autospazi:

$$E(k)=N(A-kI):\ \begin{bmatrix}1-k&0&k^2\\0&0&0\\1&0&1-k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}III\\I\\II\end{array}\begin{bmatrix}1&0&1-k\\1-k&0&k^2\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\\II-(1-k)I\\ \\\end{array}\begin{bmatrix}1&0&1-k\\0&0&2k-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+(1-k)z=0\\(2k-1)z=0\end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k\neq\frac{1}{2}$, $E(k)=\langle(0,1,0)\rangle$.

– Se $k=\frac{1}{2}$, $E(k)=E\left(\frac{1}{2}\right)=\langle(1,0,-2),\ (0,1,0)\rangle$. Notiamo che avevamo già calcolato tale autospazio al punto precedente.

$$E(k+1)=N(A-(k+1)I):\ \begin{bmatrix}-k&0&k^2\\0&-1&0\\1&0&-k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}III\\-II\\I\end{array}\begin{bmatrix}1&0&-k\\0&1&0\\-k&0&k^2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\\ \\III+kI\end{array}\begin{bmatrix}1&0&-k\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-kz=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=kt\\y=0\\z=t\end{cases}\Rightarrow E(k+1)=\langle(k,0,1)\rangle$$

$$E(1-k)=N(A-(1-k)I):\ \begin{bmatrix}k&0&k^2\\0&2k-1&0\\1&0&k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}III\\-II\\I\end{array}\begin{bmatrix}1&0&k\\0&2k-1&0\\k&0&k^2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\\ \\III-kI\end{array}\begin{bmatrix}1&0&k\\0&2k-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Anche in questo caso bisogna distinguere due casi:

– Se $k\neq\frac{1}{2}$, $E(-k+1)=\langle(-k,0,1)\rangle$.

– Se $k=\frac{1}{2}$, $E(-k+1)=E\left(\frac{1}{2}\right)=\langle\left(-\frac{1}{2},0,1\right),\ (0,1,0)\rangle$. Notiamo che avevamo già calcolato tale autospazio sia al punto precedente che calcolando $E(k)$ nel caso $k=\frac{1}{2}$.

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B}=\{\ (0,1,0),\ (k,0,1),\ (-k,0,1)\},\qquad \text{se } k\neq 0,\frac{1}{2},$$

$$\mathcal{B}=\{\ (0,1,0),\ (1,0,-2),\ (1,0,2)\},\qquad \text{se } k=\frac{1}{2},$$

Notiamo che in realtà non è necessario distinguere i due casi, anche se le basi sono ottenute da autospazi differenti, in quanto ponendo $k=\frac{1}{2}$ nella prima base si ottiene comunque la seconda base.

□

**Esercizio 9.31.** *Si consideri la matrice*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&k&0&0\\-1&0&1&-1\\3&0&0&3\end{bmatrix}$$

a) *Calcolare gli autovalori di $A$.*
b) *Stabilire per quali valori reali di $k$ la matrice $A$ diagonalizzabile.*

SOLUZIONE:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$ sviluppando rispetto alla seconda colonna:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)(2k-\lambda)-4k] = (1-\lambda)\left[\lambda^2-(2k+2)\lambda\right] \\ &= \lambda(1-\lambda)\left[\lambda-(2k+2)\right] \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $A$ sono

$$\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 2k+2$$

Dobbiamo ora distinguere tre casi:

- Se $2k+2 \neq 0, 1$, allora $A$ ha tre autovalori distinti ed è diagonalizzabile.
- Se $2k+2=0$, cioè $k=-1$ allora l'autovalore $\lambda=0$ è doppio (mentre $\lambda=1$ è singolo), quindi per stabilire se $A$ è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di $E(0)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II+1/2I \\ III+1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2,-1,1)\rangle$$

  Quindi per $k=-1$ l'autovalore $\lambda=0$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1 e $A$ non è diagonalizzabile.
- Se $2k+2=1$, cioè $k=-\frac{1}{2}$ allora l'autovalore $\lambda=1$ è doppio (mentre $\lambda=0$ è singolo), quindi per stabilire se $A$ è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di $E(1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle(0,1,0)\rangle$$

  Quindi per $k=-\frac{1}{2}$ l'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1 e $A$ non è diagonalizzabile.

□

**Esercizio 9.32.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*
b) *Determinare, se esistono, i valori di $k$ per cui la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

*può essere associata al medesimo endomorfismo $T$.*

SOLUZIONE:

a) Il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, quindi $T$ ha l'autovalore $\lambda=2$, doppio, e $\lambda=1$, singolo.

   Per stabilire se $T$ è diagonalizzabile cominciamo a calcolare l'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I): \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 \\ -6 & -1 & 3 \\ -12 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -6x-y+3z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-6t+3s \\ z=s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(2) = \langle\ (1,-6,0),\ (0,3,1)\rangle$$

   A questo punto possiamo già dire che $T$ è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio $E(1)$:

$$E(1) = \mathrm{N}(A - I): \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -1/3II \\ I \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II + 5III \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,1,2)\rangle$$

Infine la matrice $P$ diagonalizzante (formata da una base di autovettori) è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Dal momento che $A$ è diagonalizzabile con autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo, $A$ e $B$ sono associate allo stesso endomorfismo $T$ se anche $B$ ha le stesse caratteristiche. Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico di $B$:

$$p_B(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(k - \lambda)$$

quindi $A$ e $B$ hanno gli stessi autovalori se $k = 2$. Dobbiamo ora verificare che, per $k = 2$, anche $B$ sia diagonalizzabile, ovvero che $\lambda = 2$ abbia molteplicità geometrica 2:

$$E_B(2) = \mathrm{N}(B - 2I): \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1, quindi $B$ non è diagonalizzabile e $A$ e $B$ non sono associate al medesimo endomorfismo $T$ per nessun valore di $k$.

□

**Esercizio 9.33.** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di $T$.*

SOLUZIONE:

Notiamo che il generico polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ ha componenti $(a, b, c)$ rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$. In particolare $p(x) = x^2$ ha componenti $(1, 0, 0)$, $p(x) = x$ ha componenti $(0, 1, 0)$ e $p(x) = 1$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In sostanza la base $\{x^2, x, 1\}$ corrisponde quindi alla base canonica. Inoltre $T$ può essere vista come applicazione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(a, b, c) = (a + kb,\ ka + b,\ kc).$$

a) Calcoliamo la immagini degli elementi della base:

$$T(x^2) = T(1, 0, 0) = (1, k, 0) = x^2 + kx$$
$$T(x) = T(0, 1, 0) = (k, 1, 0) = kx^2 + x$$
$$T(1) = T(0, 0, 1) = (0, 0, k) = k$$

Di conseguenza la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$p_A(\lambda) = (k - \lambda)\left[(1 - \lambda)^2 - k^2\right] = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k)$$

Di conseguenza gli autovalori (non sempre distinti) sono

$$\lambda = k, \qquad \lambda = 1 - k, \qquad \lambda = 1 + k$$

□