

Prova scritta di Fisica Generale 1 e 2  
4 febbraio 2008

**Problema 1**

Un uomo di massa  $m = 70$  Kg esercita una forza in direzione orizzontale su di blocco di massa  $M = 200$  Kg che poggia su un piano orizzontale. Sia  $\mu_1 = 0.3$  il coefficiente attrito statico tra la superficie del blocco e quella del piano e  $\mu_2$  il coefficiente di attrito statico tra le scarpe dell'uomo ed il pavimento.

1. Si determini il valore minimo del coefficiente  $\mu_2$ , affinché l'uomo riesca a spostare il blocco, senza che le sue scarpe scivolino sul pavimento.
2. Quanti uomini di massa  $m' = 60$  Kg dotati di scarpe con coefficiente d'attrito statico pari a  $\mu'_2 = 0.2$  sono necessari per spostare il blocco senza scivolare?
3. Una volta in movimento, il blocco assume un coefficiente d'attrito dinamico pari a  $\mu_{1d} = 0.8\mu_1$ . Si calcoli il lavoro minimo che ciascun uomo deve esercitare, per spostare il blocco per una distanza  $d = 5m$ .
4. Quale è la velocità finale del blocco quando questo lavoro è stato esercitato? Vale il teorema delle forze vive?

**Problema 2**

Si consideri il sistema costituito da un blocco di massa  $M = 30$  Kg che appoggia su una molla verticale di massa trascurabile e di coefficiente elastico  $k = 1000$  N/m, imperniata a sua volta al pavimento, tramite un piedistallo di superficie  $S = 10$  cm<sup>2</sup>. Il pavimento può sopportare al massimo una forza per unità di superficie (pressione) pari a  $P_{max} = F_{max}/S = 10^6$  N/m<sup>2</sup> senza danneggiarsi.

1. All'equilibrio la massa  $M$  comprime la molla rispetto alla sua lunghezza a riposo. Si esprima la compressione  $x_0$  in termini dei parametri del problema e la si calcoli numericamente.
2. Ad un certo istante, mentre il primo blocco è nella sua posizione di equilibrio, un secondo blocco di massa  $m = M/2$  viene fatto precipitare sul primo da un'altezza  $h$  (distanza tra i due blocchi). Supponendo che i due corpi abbiano spessore trascurabile e rimangano attaccati dopo l'urto, si determini l'energia cinetica dissipata nell'urto.
3. Dopo l'urto la molla si comprime ulteriormente. Si esprima la massima compressione in funzione dei parametri del problema. (Suggerimento: conviene calcolare l'energia potenziale rispetto all'altezza che la molla avrebbe in assenza delle masse).
4. Si determini l'altezza massima  $h_{max}$  da cui è possibile lasciar cadere il secondo blocco senza che il pavimento si danneggi.
5. Si calcoli la frequenza delle oscillazioni del sistema dopo l'urto.

## Soluzioni

### Problema 1

1. La massima forza di reazione orizzontale che il blocco può esercitare è pari a  $F_a = \mu_1 Mg$ , quindi il corpo si sposta se l'uomo esercita su di esso una forza di modulo maggiore di questo valore. Allo stesso tempo, per il principio di azione e reazione, quando l'uomo esercita una forza  $\mathbf{F}$  sul blocco, subisce una forza di reazione  $\mathbf{F}_R$  uguale ed opposta. Quindi la massima forza che l'uomo può esercitare senza che le sue scarpe scivolino sul pavimento è pari in modulo a  $F = F_R = \mu_2 mg$ . Si ottengono quindi le seguenti condizioni limite:

$$F \geq \mu_1 Mg \quad (1)$$

$$F \leq \mu_2 mg. \quad (2)$$

Quindi  $\mu_2 \geq \mu_1 \frac{M}{m} = 0.85$ .

2. In questo caso, per spostare il blocco,  $N$  uomini di massa  $m'$  devono esercitare una forza  $F'$  ciascuno in modo che  $NF' \geq \mu_1 Mg$ . Ciascuno di essi subisce una forza di reazione che vale in modulo  $F'_R = F' = \mu_1 Mg/N$ . Come nel caso precedente, gli uomini non scivolano fintanto che  $F_R \leq \mu'_2 m'g$ . Si ottiene così la condizione

$$\mu_1 Mg/N \leq \mu'_2 m'g, \quad (3)$$

Che impone  $N \geq \frac{\mu_1 M}{\mu'_2 m'} = \frac{0.3}{0.2} \frac{200}{60} = 5$ . Sono quindi necessari cinque uomini.

3. Il lavoro minimo corrisponde alla situazione in cui la forza esercitata dagli  $N$  uomini è appena sufficiente a mantenere il blocco in movimento a velocità trascurabile. Tale forza vale  $F = \mu_{1d} Mg$ . Il lavoro totale esercitato dagli uomini è uguale e opposto a quello esercitato dalla forza di attrito, costante. Il lavoro effettuato da ciascun uomo è quindi  $W = Fd/N = \mu_{1d} Mgd/N = 470$  J.
4. La velocità rimane sempre trascurabile, così come l'energia cinetica. Il lavoro complessivo delle forze agenti sul blocco (spinta e attrito) è nullo, così come la variazione di energia cinetica. Il teorema delle forze vive è valido ed è soddisfatto anche in presenza di forze non conservative.

### Problema 2

1. La compressione iniziale si trova eguagliando la forza peso  $Mg$  con la forza, opposta, della molla  $kx_0$ . Quindi  $x_0 = Mg/k = 29.4$  cm.
2. Dalla conservazione dell'energia meccanica nella fase di caduta si ottiene che, nell'istante prima dell'urto, la velocità del secondo blocco, lasciato cadere da un'altezza  $h$ , vale  $V = \sqrt{2gh}$ . Nell'urto non si conserva l'energia cinetica, ma si conserva la quantità di moto (l'urto avviene nel punto di equilibrio della prima massa). Quindi:

$$mV = (M + m)V' \quad (4)$$

da cui segue  $V' = (1/3)V = (1/3)\sqrt{2gh}$ . L'energia cinetica del sistema costituito dai due blocchi prima dell'urto è  $E_k = (1/2)mV^2 = mgh = (1/2)Mgh$  e dopo l'urto è  $E'_k = (1/2)(M + m)V'^2 = (1/6)Mgh$ . L'energia dissipata quindi è

$$\Delta E_k = \frac{1}{6}Mgh - \frac{1}{2}Mgh = -\frac{1}{3}Mgh \quad (5)$$

3. Dopo l'urto, la molla si comprime fino al punto in cui tutta l'energia cinetica del sistema è convertita in variazione di energia potenziale. La deformazione della molla  $x$ , che si aggiunge alla deformazione iniziale  $x_0$ , si ottiene quindi imponendo la conservazione dell'energia (le forze in gioco sono conservative). L'energia meccanica immediatamente dopo l'urto è

$$E = \frac{1}{2}(M + m)V'^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 - (M + m)gx_0. \quad (6)$$

Nel momento di massima compressione invece vale

$$E = \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2 - (M + m)g(x_0 + x). \quad (7)$$

Le due energie devono essere uguali. Ricordando che  $x_0 = Mg/k$  e che  $(1/2)(M + m)V'^2 = (1/6)Mgh$ , si ottiene

$$\frac{1}{2}kx^2 - (1/2)Mgx - (1/6)Mgh = 0, \quad (8)$$

da cui risulta

$$x = \frac{Mg}{2k} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4hk}{3Mg}} \right] \quad (9)$$

4. La forza esercitata dalla molla sul pavimento è uguale in modulo a quella esercitata dalla molla sui blocchi sovrastanti, e vale  $F = k(x_0 + x)$ . Al massimo deve valere  $F = F_{max} = 10^6$  N. Da questa relazione e dalla condizione di equilibrio del punto (1) si ricava  $x_{max} = 71$  cm, da cui

$$h_{max} = \frac{3Mg}{4k} \left[ \left( x_{max} \frac{2k}{Mg} - 1 \right)^2 - 1 \right] \approx 3 \text{ m} \quad (10)$$

5. La frequenza delle oscillazioni sarà

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{3M}}. \quad (11)$$