Soluzione Prova Scritta di Fisica Generale 1 e 2

Prova del 04/09/2008

Esercizio 1

L'evoluzione temporale del sistema si può suddividere in due momenti: un "urto" iniziale tra il cannoncino e annesso carrello (sistema $C + C$) e il proiettile (sistema p) e successivamente i moti separati dei due sistemi.

Si pongano rispettivamente l'asse x nella direzione dei binari e l'asse y in direzione ortogonale. Il sistema è libero nella direzione dei binari e pertanto la quantità di moto Q_x, che è nulla all'istante inziale, lo rimane fino all'istante successivo allo sparo, prima che l'azione delle forze esterne ne vari l'entità. Lungo l'asse y invece il carrello è vincolato nello spostamento dalla presenza del binario e pertanto la quantità di moto non si conserva nell'urto. Dalla conservazione di Q_x si può calcolare la velocità di rinculo del carrello

$$v_{0,C+C} = v_{0x,p}\frac{m_p}{M_{C+C}} \tag{1}$$

Successivamente allo sparo la legge oraria del proiettile è

$$x_p(t) = v_{0x,p}t \tag{2}$$
$$y_p(t) = v_{0y,p}t - 1/2\ gt^2 \tag{3}$$

Per quanto riguarda il carrello si ha invece

$$x_{C+C}(t) = -v_{0,C+C}t + 1/2\ at^2 \tag{4}$$

dove a è l'accelerazione costante imposta con l'applicazione di una forza esterna.

Si vuole che al momento in cui il proiettile ricade a terra, esso venga raccolto dal carrello. L'istante t_f è determinato dalla condizione che il proiettile ritorni all'altezza iniziale, fissata per comodità come 0 dell'asse y

$$y_p(t_f) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_f = 2\frac{2v_{0y,p}}{g} \tag{5}$$

Affinchè il proiettile venga raccolto dal carrello, si deve avere $x_p(t_f) = x_{C+C}(t_f)$, da cui risulta

$$a = 2\frac{(v_{0x,p} + v_{0,C+C})}{t_f} \tag{6}$$

Esercizio 2

Le due masse, m_1 ed m_2,in caduta libera sono entrambe soggette all'accelerazione di gravità, uguale per entrambe. Il sistema si comporterà quindi come un oscillatore armonico il cui centro di massa accelera verso il basso con accelerazione g. La sua posizione iniziale è

$$x_{CM}(0) = \frac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

e quindi la sua legge oraria sarà

$$x_{CM}(t) = x_{CM}(0) + 1/2\ gt^2 \tag{8}$$

Se definiamo la coordinata relativa $d(t) = x_2(t) - x_1(t)$, la forza elastica in modulo vale $F_{el} = k|d - l_0|$. Essendo $\ddot{d} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$ si ottiene

$$\ddot{d} = \frac{-(d - l_0)k}{m_2} - \frac{(d - l_0)k}{m_1} = (l_0 - d)\frac{k}{\mu} \tag{9}$$

dove μ è la massa ridotta del sistema

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{3}{2m_2} \tag{10}$$

Si vede subito che l'equazione 9 è quella di un oscillatore armico, la cui soluzione generale è data da

$$d(t) = Asin(t\sqrt{k/\mu}) + Bcos(t\sqrt{k/\mu}) + l_0 \tag{11}$$

Usando le condizioni al contorno $\dot{d}(0) = 0$ e $d(0) = l_0/2$ si ottiene $A = 0$ e $B = -l_0/2$.

Per ottenere le leggi orarie delle due masse, bisogna sommare i due moti: quello del centro di massa e quello della coordinata relativa, facendo attenzione al fatto che le masse sono diverse. Pertanto definendo

$$x_{1,2}(t) = x_{CM}(t) + x_{1,2}^{cm}, \tag{12}$$

si ottiene

$$x_1^{cm} = -\frac{m_2 d}{m_1 + m_2} = -1/3\ d \qquad x_2^{cm} = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} = 2/3\ d. \tag{13}$$

Ne consegue

$$x_1(t) = x_{CM}(t) - \frac{d(t)}{3} \tag{14}$$

$$x_2(t) = x_{CM}(t) + \frac{2d(t)}{3} \tag{15}$$