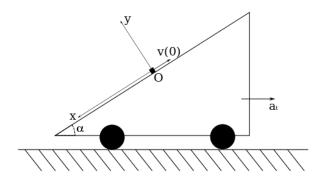
# Fisica Generale I (primo e secondo modulo) A.A. 2010-11, 14 febbraio 2011 Versione A

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fis. Gen. I:

### Esercizio I.1



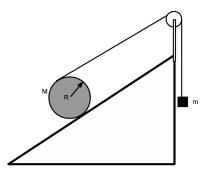
Si consideri un carrello di massa M=2 Kg come in figura. Il piano inclinato è liscio ed ha inclinazione  $\alpha=20^{\circ}$ . Un motore imprime al carrello un'accelerazione costante  $a_t=2$  m/s², parallela al pavimento, misurata rispetto al sistema di riferimento del laboratorio che è supposto essere inerziale. Al tempo  $t_0=0$  una particella puntiforme di massa m=0.5 Kg viene appoggiata sul piano inclinato con una velocità iniziale  $\vec{v}_0=-(1.5\,\mathrm{m/s})\hat{u}_x$ , misurata rispetto al carrello. Si supponga che il piano inclinato sia così lungo che la particella non ne raggiunga mai l'estremità superiore. Si risponda ai seguenti quesiti:

- 1. Si scriva l'equazione del moto della particella nel sistema di riferimento solidale al piano inclinato. Si usi il sistema di coordinate della figura con l'origine nella posizione iniziale della particella.
- 2. Si calcoli la posizione del punto in cui la particella si arresta (è istantaneamente ferma rispetto al piano).
- 3. Si calcoli il valore della reazione vincolare esercitata dal piano sulla particella; quale dovrebbe essere l'accelerazione  $a_t$  affinché la particella si stacchi dal piano?

Si immagini invece che al tempo  $t_0 = 0$  il carrello sia in quiete e il motore sia spento  $(a_t = 0)$ . Come prima, la particella di massa m viene appoggiata sul piano, con la stessa velocità  $\vec{v}_0$ , ad una quota h = 0.2 m dal pavimento. Inoltre, non vi siano attriti tra il carrello e il pavimento.

- 4. Si calcoli la velocità del carrello nell'istante in cui la particella è istantaneamente ferma rispetto al carrello stesso.
- 5. Si calcoli inoltre l'altezza raggiunta dalla particella in tale istante.

### Esercizio I.2



Una fune di massa e dimensioni trascurabili è avvolta attorno ad un cilindro di massa  $M=20~{\rm Kg}$  e raggio  $R=7~{\rm cm}$ . La fune passa attraverso una puleggia di massa trascurabile e priva di attrito e sostiene un corpo di massa  $m=4.5~{\rm Kg}$ . Il piano è inclinato di un angolo  $\theta=\pi/6$  ed è fermo. Supponendo il cilindro rotoli senza strisciare. Si determini

- 1. le equazioni del moto del cilindro e del corpo sospeso;
- 2. l'accelerazione del corpo sospeso, quella del centro di massa del cilindro e l'accelerazione angolare del cilindro.
- 3. la tensione della fune e la forza esercitata dal piano sul cilindro;
- 4. il valore minimo del coefficiente di attrito statico che assicuri puro rotolamento.
- 5. Si supponga che il sistema sia in quiete all'istante iniziale e che dopo un certo tempo t il corpo sospeso si sia alzato di una quota  $\Delta h$ . Usando la conservazione dell'energia, si calcoli la sua velocità al tempo t.

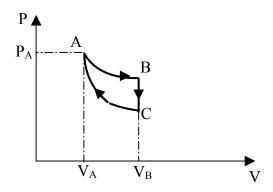
Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

## Esercizio II.1

Un contenitore a pareti adiabatiche è diviso in due parti uguali di volume  $V=0.5~\mathrm{m}^3$  da un setto, anch'esso adiabatico. In una parte del contenitore sono contenute due moli di gas biatomico  $(N_2)$  alla temperatura di  $50^{\circ}\mathrm{C}$ . Nella seconda parte del contenitore è contenuta una mole di un altro gas biatomico  $(O_2)$  alla temperatura di  $10^{\circ}\mathrm{C}$ . Ad un certo istante viene rimosso il setto che divide in due il contenitore, e i due gas raggiungono un nuovo stato di equilibrio. Si determinino temperatura e pressione finali dei gas, nonché la variazione di entropia del sistema. Si assuma che, a queste temperature, i gas possono essere considerati ideali.

### Esercizio II.2

Un gas monoatomico ideale funge da fluido termodinamico in una macchina termica che esegue il ciclo reversibile costituito nell'ordine da un'isoterma reversibile, da un'isocora reversibile e da un'adiabatica reversibile (si veda la figura). Temperatura, pressione e volume iniziale del gas sono rispettivamente  $T_A = 300 \text{ K}$ ,  $P_A = 300 \text{ kPa}$  e  $V_A = 4 \text{ m}^3$ . Durante il ciclo, il gas raggiunge il volume massimo di 10 m<sup>3</sup>. Si determini la pressione nel punto C ed il rendimento del ciclo.



#### Soluzione I.1

Qui vengono proposte le soluzioni con i risultati algebrici. La soluzione completa degli esercizi prevede anche il calcolo numerico con i valori assegnati nelle diverse versioni del testo.

1. Come suggerito dal testo per risolvere il problema consideriamo il sistema di assi disegnato in figura solidale con il carrello. Siccome il carrello si muove con accelerazione costante  $\vec{a}_t$  il sistema di riferimento non è inerziale. Dunque oltre alla forza peso e alla reazione vincolare, N, dobbiamo considerare la presenza di una forza apparente nella direzione orizzontale, di verso opposto rispetto ad  $\vec{a}_t$  e di modulo  $F_{app} = ma_t$ . Le equazioni del moto della particella nelle direzioni x e y sono dunque le seguenti:

$$x: \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta + ma_t\cos\theta,\tag{1}$$

$$y: \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\cos\theta + ma_t\sin\theta + N. \tag{2}$$

2. La particella lungo la direzione x si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione  $\vec{a} = [g \sin \theta + a_t \cos \alpha] \hat{u_x}$ , avremo dunque che

$$v_x(t) = -v_0 + at, (3)$$

$$x(t) = -v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. (4)$$

La particella sarà istantaneamente ferma rispetto al piano nell'istante  $t_1$  in cui la velocità  $v_x$  si annulla. Imponendo  $v_x(t_1)=0$  otteniamo

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{q\sin\alpha + a_t\cos\alpha}. (5)$$

La posizione della particella nel momento in cui si arresta è dunque data da

$$x(t_1) = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = -\frac{v_0^2}{2 \left[ q \sin \alpha + a_t \cos \alpha \right]}.$$
 (6)

3. La reazione vincolare si ottiene a partire dall'equazione del moto lungo y imponendo che  $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ 

$$N = m \left[ g \cos \alpha - a_t \sin \alpha \right]. \tag{7}$$

L'accelerazione  $a_t$  necessaria affinché la particella si stacchi dal piano si trova imponendo N=0

$$a_t = g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$
(8)

Se  $a_t > g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  la particella si staccherà dal piano.

4. Introduciamo un nuovo sistema di assi cartesiani O'x'y' solidale con il sistema del laboratorio. L'origine O' coincide con la posizione iniziale della particella, l'asse x' è diretto parallelamente al pavimento e l'asse y' è ortogonale ad esso. Osserviamo che la quantità di moto del sistema particella-piano in direzione x' si conserva in quanto l'unica forza che agisce in direzione x' è la reazione vincolare che è una forza interna al sistema. All'istante iniziale la quantità di moto in direzione x' è data solo dalla quantità di moto della particella, in quanto il piano risulta essere fermo

$$p_i^{x'} = mv_0 \cos \alpha. \tag{9}$$

All'istante finale avremo invece sia un contributo dalla particella sia un contributo dal piano

$$p_f^{x'} = mv_f + MV_f \tag{10}$$

dove con  $v_f$  indichiamo la velocità finale della particelle in direzione x' e con  $V_f$  la velocità finale del piano in direzione x'. Siccome all'istante finale la particella risulta essere istantaneamente ferma rispetto al piano avremo che  $V_f = v_f$ . Imponendo  $p_i^{x'} = p_f^{x'}$  otteniamo

$$V_f = \left(\frac{m}{m+M}\right) v_0 \cos \alpha \tag{11}$$

5. L'energia del sistema sarà anche conservata in quanto sul sistema agiscono soltanto forze interne o conservative. Le espressioni per l'energia finale e iniziale del sistema sono le seguenti (prendiamo la quota iniziale della particella come punto zero per misurare l'energia potenziale gravitazionale)

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 (12)$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2 + mg(h_f - h).$$
 (13)

Possiamo dunque ricavare l'altezza finale raggiunta dalla particella  $h_f$  ponendo  $E_i=E_f$ 

$$h_f = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \left[ 1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \alpha \right].$$
 (14)

#### Soluzione I.2

Qui vengono proposte le soluzioni con i risultati algebrici. La soluzione completa degli esercizi prevede anche il calcolo numerico con i valori assegnati nelle diverse versioni del testo.

1. Per descrivere in maniera completa la dinamica del sistema dobbiamo prendere in considerazione sia le equazioni del moto del corpo appeso che quelle del cilindro. In particolare il corpo può essere trattato come un punto materiale dunque possiamo descriverlo con una sola equazione  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Il cilindro invece è un corpo rigido e per descrivere il suo moto abbiamo bisogno di considerare l'equazione del centro di massa  $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$  e l'equazione delle rotazioni  $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ . Le forze che agiscono sul cilindro sono la forza di attrito con il piano  $F_a$ la tensione della fune T, la forza peso e la reazione vincolare del piano N. Le forze che agiscono sul corpo sono invece la tensione della fune e la forza peso. Indicando con  $a_1$  e  $\alpha$  le accelerazioni del centro di massa e angolare del cilindro, e con  $a_2$  l'accelerazione del corpo le equazioni del moto assumono la seguente forma

$$Ma_1 = Mg\sin\theta - T - F_a \tag{1}$$

$$0 = Mg\cos\theta - N \tag{2}$$

$$I\alpha = MqR\sin\theta - 2RT\tag{3}$$

$$ma_2 = -mg + T (4)$$

dove la prima equazione rappresenta l'equazione del centro di massa del cilindro in direzione parallela al piano inclinato, la seconda esprime il fatto che il cilindro ha accelerazione nulla in direzione ortogonale al piano, la terza descrive come il cilindro ruota ed è scritta scegliendo come polo il punto di contatto tra il piano inclinato e il cilindro; infine la quarta equazione è quella che riguarda la dinamica del corpo appeso.

2. Per ricavare le accelerazioni  $a_1$ ,  $a_2$  e  $\alpha$  osserviamo che esse non sono indipendenti tra di loro ma sono legate dalla condizione di puro rotolamento e quella di inestensibilità della fune. In particolare il puro rotolamento ci dice che  $a_1 = \alpha R$  mentre l'inestensibilità della fune lega l'accelerazione del corpo a quelle del cilindro  $a_2 = a_1 + \alpha R$ . Utilizzando queste due condizioni e le equazioni (3) e (4) si possono ricavare le accelerazioni:

$$a_1 = g \frac{2M \sin \theta - 4m}{8m + 3M}$$

$$\alpha = a_1/R$$
(5)

$$\alpha = a_1/R \tag{6}$$

$$a_2 = 2a_1 \tag{7}$$

3. La tensione della fune si ricava sempre dalle equazioni (3) e (4)

$$T = m(2a_1 + g) (8)$$

$$= g \frac{mM}{8m+3M} [4\sin\theta + 3]. \tag{9}$$

mentre la reazione vincolare N si ricava dall'equazione (2)

$$N = Mg\cos\theta. \tag{10}$$

4. Dalle equazioni precedenti si ricava anche la forza che agisce tra il cilindro e il piano inclinato nell'ipotesi di puro rotolamento:

$$F_a = \frac{Mg}{8m + 3M} \left[ (4m + M)\sin\theta + m \right] \tag{11}$$

Affinché il cilindro continui a rotolare, mantenendo istantaneamente fermo il punto di contatto con il piano, tale forza non deve superare il valore limite imposto dall'attrito statico, oltre il quale si ha strisciamento. Il valore limite è dato da  $\mu N$ . Dunque la condizione sul coefficiente di attrito statico  $\mu$  è la seguente:

$$\mu \ge \frac{F_a}{N} = \frac{1}{8m + 3M} \left\{ [4m + M] \tan \theta + \frac{m}{\cos \theta} \right\}$$
 (12)

5. La variazione di energia del corpo quando si è alzato di una quota  $\Delta h$  è data da

$$\Delta E_2 = mg\Delta h + \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{13}$$

La variazione di energia del cilindro è invece

$$\Delta E_2 = Mg\Delta h \sin\theta + \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{14}$$

Le velocità angolare  $\omega$  e lineare  $v_1$  del cilindro e quella lineare del corpo  $v_2$  sono legate dalle stesse relazioni che legano le accelerazioni ovvero  $v_1 = v_2/2$  e  $\omega = v_1/R = v_2/2R$ . A questo punto usando la conservazione dell'energia  $\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$  possiamo ricavare la velocità del corpo

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta h[M\sin\theta - m]}{3M/8 + m}}. (15)$$

Notiamo che si può usare la conservazione dell'energia nonostante la presenza della forza esterna  $F_a$ . Questo perché  $F_a$  non compie lavoro in quanto agisce su di un punto istantaneamente fermo.

### Soluzione II.1

Dal momento che il sistema è isolato si conserva l'energia interna quindi, chiamati A e B i due gas si ha che:

$$n_A c_V (T_f - T_A) + n_B c_V (T_f - T_B) = 0 (1)$$

che implica  $T_f = 309.4$  K. Dall'equazione di stato dei gas a temperatura  $T_f$  e volume 2V si ottiene  $P_f = 7.710^4$  Pa.

La variazione di entropia per un'espansione libera di un gas da uno stato di temperatura iniziale  $T_i$  e volume iniziale  $V_i$  a uno di temperatura  $T_f$  e volume  $V_f$  si determina da

$$\Delta S = nc_V \log \frac{T_f}{T_i} + nR \log \frac{V_f}{V_i} \tag{2}$$

quindi  $\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 17.3 \text{ J/K}.$ 

### Soluzione II.2

La temperatura e pressione nel punto C si ottengono dalle relazioni per le adiabatiche reversibili:

$$T_A V_A^{\gamma - 1} = T_C V_C^{\gamma - 1} \tag{1}$$

$$P_A V_A^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \,, \tag{2}$$

da cui  $T_C=162.9~{\rm K}$  e  $P_C=65.1~{\rm kPa}$ . Per calcolare il rendimento occorre determinare il calore assorbito e ceduto nel ciclo.

$$Q_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_A}{V} dV = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} = Q_{ass}$$
 (3)

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = Q_{ced} \tag{4}$$

$$Q_{CA} = 0 (5)$$

quindi

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 0.252 .$$
(6)