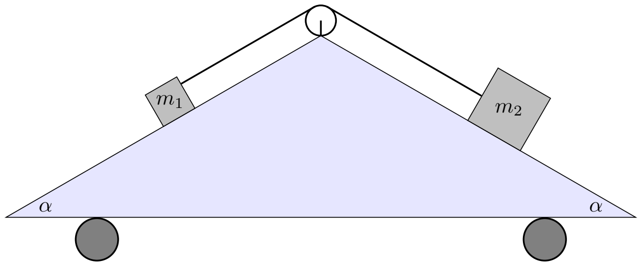
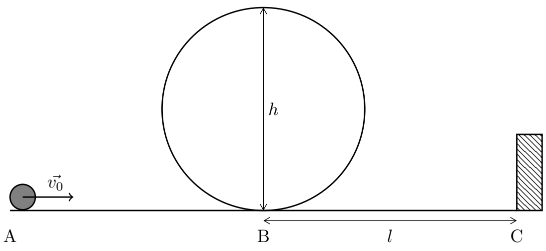
**Fisica Generale I (primo modulo)**
**A.A. 2013-2014, 19 Novembre 2013**

**Esercizio I.1**




Due corpi, di massa $m_1 = 1$ kg ed $m_2 = 1.5$ kg, sono poggiati su un cuneo di massa $M \gg m_2$ e sono connessi mediante una carrucola di massa trascurabile e da un filo ideale. Il cuneo è rappresentabile come un triangolo isoscele e l'angolo alla base è $\alpha = \pi/6$ rad. Il cuneo è inizialmente fermo su un piano orizzontale; tutte le superfici sono prive di attrito.
**a)** Calcolare le accelerazioni $a_1$ e $a_2$ delle due masse. Calcolare inoltre la tensione $T$ del filo e le reazioni vincolari $N_1$ ed $N_2$ delle due masse sulle superfici inclinate del cuneo.
Al tempo $t = t_0$, il cuneo inizia a muoversi verso destra con accelerazione costante $a_t$.
**b)** Determinare, se esiste, il valore dell'accelerazione di trascinamento $a_t$ per la quale le due masse sono in equilibrio.
**c)** Calcolare, per tale valore dell'accelerazione $a_t$, le nuove reazioni vincolari $\tilde{N}_1$ ed $\tilde{N}_2$ e confrontarle con quelle calcolate al punto **a**.

**Esercizio I.2**




Un corpo di massa $m$ è lanciato dal punto $A$ a velocità iniziale $v_0$ verso il giro della morte di altezza $h = 50$ cm come in figura.
**a)** Calcolare la velocità minima $v_0$ affinché il corpo completi il giro della morte e raggiunga il punto $B$.
Successivamente, il corpo raggiunge una regione di lunghezza $l = 1.5$ m con attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.8$ e rimbalza contro una parete in $C$ mediante un urto completamente elastico, ridirigendosi verso il giro della morte.
**b)** Calcolare la nuova velocità minima iniziale $\tilde{v}_0$ affinché il corpo possa compiere tutto il percorso e ritornare al punto iniziale $A$.
**c)** Calcolare la velocità con cui il corpo ritorna in $A$.

**Soluzione esercizio I.1**

**a)** Le forze che agiscono sulle masse sono la forza peso, la reazione vincolare del piano e la tensione del filo. Dal momento che il filo è inestensibile, le accelerazioni $a_1$ e $a_2$ sono uguali fra loro. Inoltre, siccome $m_2 > m_1$ ci si aspetta che entrambe le masse si muovano verso destra. Le equazioni della dinamica nella direzione parallela al piano inclinato sono:

$$\begin{aligned} m_1 a &= T - m_1 g \sin(\alpha) \\ m_2 a &= -T + m_2 g \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

Ricavando la tensione $T$ da una delle due equazioni e sostituendo nell'altra si ottiene l'accelerazione:

$$\boxed{a = \frac{(m_2 - m_1)\sin(\alpha)}{m_1 + m_2} g = 1.0\,\mathrm{m/s^2}} \tag{2}$$

Mentre la tensione:

$$\boxed{T = \frac{2\, m_2\, m_1\, g \sin(\alpha)}{m_1 + m_2} = 5.9\,\mathrm{N}} \tag{3}$$

Dal momento che non c'è accelerazione lungo la direzione perpendicolare al piano, si avrà semplicemente che le due reazioni vincolari sono:

$$\begin{gathered} \boxed{N_1 = m_1 g \cos(\alpha) = \ 8.5\mathrm{N}} \\ \boxed{N_2 = m_2 g \cos(\alpha) = 12.7\mathrm{N}} \end{gathered} \tag{4}$$

**b)** Quando il cuneo è trascinato con accelerazione costante verso destra, le due masse si trovano in un sistema di riferimento non inerziale e sono pertanto soggette ad una forza apparente in direzione opposta a quella dell'accelerazione $a_t$. Le equazioni della dimanica verranno modificate nel seguente modo:

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 a_t \cos(\alpha) + T - m_1 g \sin(\alpha) \\ m_2 a &= -m_2 a_t \cos(\alpha) - T + m_2 g \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{5}$$

lungo la direzione parallela ai piani, mentre lungo la direzione normale si avrà:

$$\begin{aligned} m_1 a_\perp &= N_1 - m_1 g \cos(\alpha) + a_t m_1 \sin(\alpha) \\ m_2 a_\perp &= N_2 - m_2 g \cos(\alpha) - a_t m_2 \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

Affinché si abbia equilibrio $a = a_\perp = 0$. Ciò è sufficiente a garantire che i corpi siano in quiete nel sistema di riferimento non inerziale. Dalle prime due equazioni si risolve per l'accelerazione $a_t$:

$$\boxed{a_t = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \tan\alpha = 1.1\mathrm{m/s^2}} \tag{7}$$

**c)** Usando le equazioni della dinamica nella direzione perpendicolare ai piani

inclinati si ricavano le due reazioni vincolari:

$$\begin{gathered}\boxed{N_1 = m_1 g\left(\cos(\alpha) - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) = 9.0\mathrm{N}}\\ \boxed{N_2 = m_2 g\left(\cos(\alpha) + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) = 13.6\mathrm{N}}\end{gathered} \tag{8}$$

Notare che, in virtù dell'accelerazione di trascinamento $a_t$ la reazione vincolare della seconda massa è aumentata, mentre quella della prima è diminuita.

**Soluzione esercizio I.2**

**a)** Quando il corpo effettua il giro della morte ha accelerazione centripeta e nel punto più alto sarà soggetto alla forza peso e alla reazione vincolare della guida. L'equazione della dinamica è:

$$m\frac{2v^2}{h} = mg + N \tag{9}$$

La velocità $v$ minima ad effettuare il giro si ottiene quando il corpo è sul punto di perdere il contatto dalla guida, e ciò corrisponde ad imporre reazione vincolare nulla: $N = 0$

In virtù della conservazione dell'energia, dal momento che non si sviluppano forze d'attrito in questo primo tratto, l'energia cinetica iniziale è pari all'energia meccanica nel punto d'altezza $h$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \tag{10}$$

Ma dalla condizione per la velocità sulla guida si ha che:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{5}{4}gh} = 2.5\mathrm{m/s}^2} \tag{11}$$

**b)** Dopo aver compiuto il giro della morte, il corpo si ritrova nel punto B nuovamente con velocità $v_0$. A questo punto attraversa una regione con attrito dinamico e perde un'energia pari al lavoro della forza d'attrito.

$$L = -\mu_d mg2l \tag{12}$$

Dal momento che per il risultato al punto **a** sappiamo che $v_0$ è la minima velocità necessaria per superare il giro della morte, significa che per ritornare al punto $A$, all'energia cinetica iniziale dobbiamo aggiungere l'energia che perderà il corpo sul tratto scabro. La nuova velocità iniziale si ricava dall'equazione:

$$\frac{1}{2}m\tilde{v}_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \mu_d mg2l \tag{13}$$

ovvero:

$$\boxed{\tilde{v_0} = \sqrt{v_0^2 + \mu_d g4l} = 7.3\mathrm{m/s}^2} \tag{14}$$

**c)** Ricapitolando, il corpo parte da A con velocità $\tilde{v}_0$, compie il giro della morte una prima volta, attraversa la zona con attrito in cui perde parte della sua energia e compie un urto elastico con la parete. A questo punto riattraversa la zona con attrito e perde altra parte della sua energia, ritrovandosi al punto B con velocità $v_0$, la minima per poter riattraversare il giro della morte. Quindi, non essendoci più attriti, si ritroverà nuovamente in $A$ con velocità $v_0$.