Fisica Generale I
A.A. 2014-2015, 4 febbraio 2015

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1
Una sbarra sottile di lunghezza $l = 0.6$ m e massa $m = 2$ kg è vincolata a ruotare in un piano verticale, attorno ad un perno O. Il perno è posizionato ad un terzo della lunghezza della sbarra, come mostrato in figura. All'estremo della sbarra più vicino al perno è fissato un cavo inestensibile, di massa trascurabile, che tiene sospeso un contrappeso di massa M.

a) Dimostrare che le condizioni di equilibrio del sistema non dipendono dall'angolo che la sbarra forma con la verticale. Determinare inoltre il valore della massa M necessario a mantenere la sbarra in equilibrio.

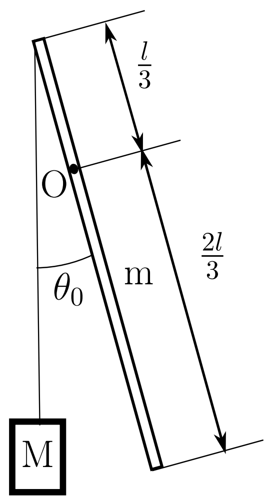
La sbarra è inizialmente inclinata di un angolo $\theta_0 = 10°$ con la verticale. Ad un certo istante il filo viene tagliato e la sbarra inizia ad oscillare attorno al perno a causa della forza peso.

b) Utilizzando l'approssimazione di piccoli angoli determinare il periodo dell'oscillazione e scrivere la legge oraria per la sbarra.

c) Determinare l'angolo θ_1, in corrispondenza di quale energia cinetica e potenziale risultano essere uguali.

Ad un certo istante un proiettile di massa $m_0 = 10$ g e velocità $v_0 = 200$ m/s viene sparato in direzione orizzontale contro la sbarra. Il proiettile si conficca nella sbarra esattamente nell'istante in cui quest'ultima si trova in posizione verticale.

d) Calcolare a quale distanza dal perno deve essere sparato il proiettile affinché, a seguito dell'urto, la sbarra si arresti completamente.



Esercizio I.2

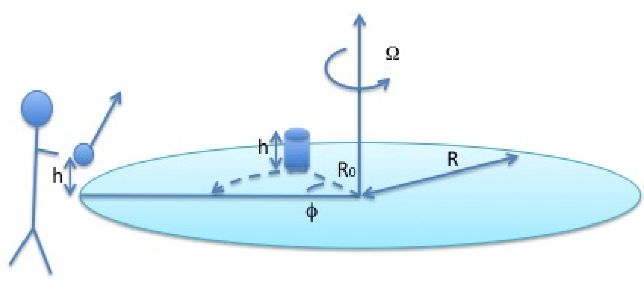
Una piattaforma circolare di raggio $R = 4$ m si trova in posizione orizzontale e ruota attorno al proprio asse verticale passante per il suo centro con velocità angolare costante $\Omega_0 = 1$ rad/s. Ad una distanza $R_0 = R/2$ dal centro è appoggiato un bicchiere di vetro che si muove in maniera solidale alla piattaforma grazie all'attrito statico tra i due. Il bicchiere ha un fondo di spessore trascurabile e può essere descritto come un cilindro cavo di raggio esterno $r_e = 2.5$ cm, raggio interno $r_i = 2$ cm, altezza $h = 8$ cm e densità uniforme pari a $\rho = 3$ g/cm^3.

a) Un bambino, che si trova fuori dalla piattaforma, lancia una pallina da ping-pong in direzione radiale nell'istante in cui al bicchiere manca un angolo $\phi = \pi/3$ per trovarsi davanti al bambino. Il lancio avviene in modo tale che la pallina, nell'istante iniziale, si trovi esattamente al bordo della piattaforma alla quota del bordo superiore del bicchiere. Determinare le componenti orizzontale e verticale della velocità di lancio necessarie per far cadere la pallina nel bicchiere.

b) Una volta caduta, la pallina si arresta nel bicchiere. La sua massa sia $m_0 = 1$ g e il suo raggio sia leggermente inferiore al raggio interno del bicchiere. Determinare modulo e direzione della forza $\vec{F_b}$ esercitata dal bicchiere sulla pallina nel piano orizzontale e della forza $\vec{F_p}$ esercitata dalla piattaforma sul bicchiere, sempre nello stesso piano. Si scrivano tali forze scomponendole lungo le direzioni radiale e tangenziale.

c) Ad un certo istante t_0 la piattaforma inizia a rallentare con una decelerazione angolare costante $\alpha = -1$ rad/s^2. Determinare come variano $\vec{F_b}$ e $\vec{F_p}$ in funzione del tempo trascorso da t_0. Si calcoli il tempo necessario all'arresto della piattaforma e l'angolo percorso.

d) Si supponga di poter variare la decelerazione α. Si calcoli il modulo del valore critico, $|\alpha_{\text{crit}}|$, al di sopra del quale il bicchiere non sta più un equilibrio sulla piattaforma, bensì si ribalta facendo perno su un punto della sua base (si trascuri la presenza della pallina e si assuma il coefficiente di attrito statico abbastanza grande da impedire comunque lo scivolamento del bicchiere).



Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Un cilindro con pistone mobile e con pareti conduttrici di calore contiene tre moli di gas ideale monoatomico. Il gas si trova inizialmente all'equilibrio alla temperatura $T_A = 403$ K e alla pressione $P_A = 10^5$ Pa. Il pistone è bloccato e il sistema viene messo in contatto termico con una miscela di acqua e ghiaccio (si usi la temperatura approssimata $T_B = 273$ K). Il gas raggiunge l'equilibrio termico con la miscela alla temperatura T_B mantenendo il volume costante. Successivamente il cilindro viene isolato termicamente e viene compiuta una compressione adiabatica reversibile fino ad uno stato di equilibrio C con pressione $P_C = P_A$. Il cilindro viene infine posto a contatto con una sorgente termica alla temperatura T_A che riporta il gas allo stato iniziale A con una trasformazione a pressione costante. Si tracci il diagramma P-V e si calcoli:
a) la massa di ghiaccio sciolta in un ciclo (si usi il calore latente di fusione $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg);
b) la temperatura in C e il calore scambiato con la sorgente termica nell'espansione C –> A;
c) il rendimento del ciclo di tale macchina termica;
d) la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

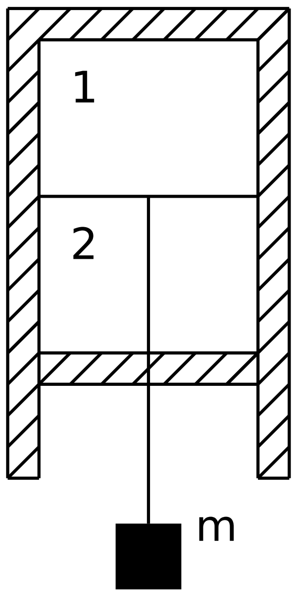
Esercizio II.2

Un cilindro con pareti adiabatiche è disposto verticalmente, come in figura. Esso racchiude due volumi di gas ideale monoatomico separati da una parete mobile, conduttrice di calore e con massa trascurabile. Il volume sottostante (2) è isolato rispetto all'ambiente da una seconda parete mobile, adiabatica e con massa trascurabile. Un corpo di massa $m = 30$ kg è appeso tramite una fune alla parete conduttrice; la fune attraversa la parete adiabatica sottostante senza comprometterne la tenuta termica. La superficie di ciascuna parete mobile è $S = 0.05$ m^2. Inizialmente le due regioni chiuse hanno volume uguale pari a $V_0 = 10^{-1}$ m^3 e la porzione soprastante (1) contiene una mole di gas. La temperatura all'equilibrio è $T_0 = 290$ K.

a) Si calcoli la pressione esterna P_{ext} e il numero di moli contenute nel volume sottostante.

b) Improvvisamente la fune si spezza e il sistema compie una trasformazione che lo porta a un nuovo stato di equilibrio. La pressione esterna rimane costante. Calcolare la temperatura finale del gas nel cilindro (suggerimento: si usino opportunamente il primo principio e l'equazione di stato).

c) Si calcoli la variazione di entropia dell'universo.



Soluzione esercizio I.1
a)
Affinché la sbarra sia in equilibrio la somma dei momenti della forza peso e della tensione data dal contrappeso, rispetto al punto vincolato O, deve essere nulla. La forza peso della sbarra è applicata al CM della stessa, ad una distanza pari a $l/6$ dal perno e i momenti delle due forze hanno segno opposto. Dunque deve essere

$$\frac{l}{3} M g \sin\theta = \frac{l}{6} m g \sin\theta.$$

Semplificando si trova:

$$\boxed{M = \frac{m}{2} = 1 \text{ kg}}.$$

La posizione di equilibrio non dipende dall'angolo perché le due forze in gioco sono parallele e quindi i vettori corrispondenti formano sempre lo stesso angolo con il rispettivo vettore della distanza tra perno e punto di applicazione.

b)
Per determinare l'equazione del moto si può partire dalla seconda equazione cardinale:

$$I_z \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{6} \sin\theta,$$

dove si è tenuto conto del fatto che una volta tagliato il filo l'unica forza a fare momento rispetto ad O è la forza peso della sbarra. Applicando l'approssimazione di piccoli angoli possiamo ritrovare l'equazione di un moto armonico:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{6I_z}\theta = -\Omega^2\theta,$$

Ci serve il momento d'inerzia per rotazioni attorno ad O. Possiamo calcolarlo usando il teorema di Steiner. Infatti, il momento d'inerzia di un'asta rispetto ad un asse ortogonale ad essa e passante per il suo centro di massa è $I_{\text{CM}} = (1/12)ml^2$ e la distanza tra i due assi è $l/6$. Possiamo dunque scrivere $I_z = (1/12)ml^2 + m(l/6)^2 = (1/9)ml^2$. A questo punto la pulsazione dell'oscillazione della sbarra diventa

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgl}{6I_z}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\,,$$

da cui si ricava il periodo

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1.27 \text{ s}}.$$

La legge oraria corrisponde alla soluzione dell'equazione armonica:

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)\,,$$

dove le costanti di integrazione A e ϕ possono essere fissate dalle condizioni iniziali, che nel nostro caso danno $A = \theta_0$ e $\phi = 0$. Dunque

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{3g}{2l}}t)}.$$

c)
Il pendolo parte da una configurazione in cui l'energia meccanica coincide con l'energia potenziale:

$$E_0 = U(\theta_0) = mg\frac{l}{6}(1-\cos\theta_0)$$

avendo posto il riferimento dell'energia potenziale alla quota del CM della sbarra quando questa si trova in posizione verticale. L'angolo per il quale l'energia potenziale diventa uguale all'energia cinetica, sarà quello in cui l'energia potenziale si è dimezzata rispetto al suo valore iniziale: $U(\theta_1) = (1/2)U(\theta_0)$. Abbiamo dunque l'equazione

$$mg\frac{l}{6}(1-\cos\theta_1) = mg\frac{l}{12}(1-\cos\theta_0)\ ,$$

da cui si ricava $\cos\theta_1 = (1/2)(1+\cos\theta_0)$, e l'angolo cercato è

$$\theta_1 = \arccos\Big(\frac{1}{2}(1+\cos\theta_0)\Big) = 7.06^\circ\,.$$

Notiamo che il risultato si spiega facilmente dal punto di vista dell'approssimazione di piccoli angoli, che si applica piuttosto bene per angoli dell'ordine di 10 gradi o meno. In questo caso il termine $(1-\cos\theta)$ può essere approssimato con $(1/2)\theta^2$; quindi per piccoli angoli l'energia potenziale è proporzionale al quadrato dell'angolo e questo significa che essa si dimezza se l'angolo viene ridotto di un fattore $\sqrt{2}$, che è proprio quanto abbiamo ottenuto in precedenza a meno di una correzione inferiore all'un per cento.

d)
In seguito ad un urto completamente anelastico l'energia cinetica del moto relativo si annulla, quindi i due corpi coinvolti finiscono per muoversi solidalmente. Nel nostro caso cerchiamo la condizione per cui il sistema si arresti del tutto. La sbarra è imperniata e durante l'urto le forze vincolari le impediscono di traslare. Dunque la quantità di moto del sistema non si conserva. Si conserva invece il momento angolare rispetto al perno in O, dato che le

stesse forze vincolari hanno momento nullo. Vogliamo che il momento angolare totale sia nullo dopo l'urto e, quindi, deve essere nullo anche prima, ovvero

$$L_{\text{proiettile}} + L_{\text{sbarra}} = l_0 m_0 v_0 - I_z \dot{\theta}_2 = 0\,,$$

dove $\dot{\theta}$ è la velocità angolare della sbarra subito prima dell'urto, quando la sbarra si trova sulla verticale, e l_0 è la distanza tra il perno O e il punto d'impatto del proiettile (presa come positiva se l'impatto avviene sotto il perno). La condizione diventa

$$l_0 = \frac{I_z \dot{\theta}_2}{m_0 v_0}\,.$$

Per risolvere il problema basta trovare la velocità angolare della sbarra quando passa per la verticale. Possiamo farlo derivando la legge oraria oppure applicando la conservazione dell'energia e considerando il fatto che, quando il corpo si trova sulla verticale, l'energia è tutta cinetica ed è uguale all'energia potenziale che aveva all'inizio dell'oscillazione:

$$\frac{1}{2} I_z \dot{\theta}_2^{\,2} = E_0 = mg\frac{l}{6}(1-\cos\theta_0) \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_2^{\,2} = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta_0).$$

Inserendo questo risultato nell'espressione precedente troviamo

$$\boxed{l_0 = \frac{ml^2}{9 m_0 v_0}\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta_0)} = 0.0345\ \text{m}}\,.$$

Soluzione esercizio I.2

a)

Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'origine coincide con la posizione iniziale della pallina, l'asse x è diretto verso il centro della piattaforma e l'asse z è verticale. Vogliamo determinare per quali valori di v_{0x} e v_{0z} la pallina entra nel bicchiere. Poiché la piattaforma si muove con velocità angolare costante il tempo di volo della pallina deve essere uguale al tempo necessario per compiere una rotazione di $\frac{\pi}{3}$:

$$\phi = \frac{\pi}{3} = \Omega_0 \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi}{3\Omega_0}\,,$$

dove abbiamo indicato con Δt il tempo di volo. Adesso possiamo scrivere l'equazione del moto scomponendola lungo la direzione orizzontale e quella verticale

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ z(t) = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

e considerare che nel tempo Δt la pallina, per cadere nel bicchiere, deve percorrere una distanza $R/2$ e tornare alla quota di $z = 0$. Dunque

$$\begin{cases} \boxed{v_{0x} = \frac{R}{2}\frac{1}{\Delta t} = \frac{3\Omega_0 R}{2\pi} = 1.91 \text{ m/s}} \\ \boxed{v_{0z} = \frac{1}{2} g \Delta t = \frac{\pi g}{6\Omega_0} = 5.13 \text{ m/s}} \end{cases}$$

b)
Da ora in poi il moto avviene nel piano della piattaforma e, pertanto, conviene usare un sistema di riferimento inerziale bidimensionale con assi x e y nel piano orizzontale e con origine nel centro della piattaforma. In questo sistema di riferimento, la piattaforma ruota con velocità angolare costante, e altrettanto fa il bicchiere con dentro la pallina. Inoltre, poiché $R_0 \gg r_1$, possiamo considerare la pallina e il bicchiere come corpi puntiformi ai fini del calcolo delle forze. Dato che la pallina compie un moto circolare uniforme di raggio R_0 soggetta unicamente alla forza vincolare esercitata dal bicchiere, $\vec{F}_b$, quest'ultima deve essere tale da garantire l'accelerazione centripeta a_c che compete al questo tipo di moto. Deve essere quindi radiale e diretta verso il centro della piattaforma. Se $\hat{r}$ è il versore radiale, allora deve essere:

$$\boxed{\vec{F}_b = -m_0 a_c \ \hat{r} = -m_0 \Omega_0^2 R_0 \ \hat{r} = (-0.002 \text{ N}) \ \hat{r}}.$$

Per la reazione vincolare esercitata dalla piattaforma sul bicchiere, $\vec{F}_p$, vale lo stesso ragionamento: il vincolo deve produrre la stessa accelerazione centripeta. Si avrà dunque

$$\boxed{\vec{F}_p = -m_1 a_c \ \hat{r} = -m_1 \Omega_0^2 R_0 \ \hat{r} = (-0.339 \text{ N}) \ \hat{r}},$$

dove m_1 è stato calcolato con la relazione $m_1 = \rho\pi h(r_e^2 - r_i^2) = 0.170$ kg e si è trascurata la massa della pallina contenuta nel bicchiere, essendo molto più piccola. Notiamo che la forza esercitata dalla piattaforma sul bicchiere è molto più grande di quella esercitata dal bicchiere sulla pallina, dato che le masse sono molto diverse e l'accelerazione è la stessa.

c)
Ora la velocità angolare della piattaforma varia secondo la legge $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$ dove α è negativa e costante. A causa della decelerazione della piattaforma la reazione vincolare varia anch'essa nel tempo e avrà due componenti perpendicolari tra loro: una radiale che produce l'accelerazione centripeta e l'altra tangenziale che produce l'accelerazione scalare $R_0\alpha$, tangente alla traiettoria. Le forze $\vec{F}_b(t)$ e $\vec{F}_p(t)$ saranno dunque

$$\begin{cases} \boxed{\vec{F}_b(t) = -m_0 R_0 \Omega^2(t) \ \hat{r} + m_0 R_0 \alpha \ \hat{\phi}} \\ \boxed{\vec{F}_p(t) = -m_1 R_0 \Omega^2(t) \ \hat{r} + m_1 R_0 \alpha \ \hat{\phi}} \end{cases}.$$

dove abbiamo indicato con $\hat{\phi}$ il versore perpendicolare a $\hat{r}$, concorde al verso di rotazione. Si vede che la componente radiale ha la stessa natura di prima, ma varia nel tempo fino ad annullarsi quando la piattaforma si arresta del tutto, mentre la componente tangenziale rimane costante durante la decelerazione ed è discorde rispetto al verso di rotazione in quanto α è negativa.

Il tempo di arresto della piattaforma si calcola facilmente da

$$\boxed{t' = \frac{\Omega_0}{|\alpha|} = 1 \text{ s}}$$

e l'angolo percorso è

$$\boxed{\Phi = \Omega_0 t' + \frac{1}{2}\alpha t'^2 = 0.5 \text{ rad} = 28.6^\circ}$$

d)

Per trovare l'accelerazione critica per il ribaltamento conviene usare un sistema di riferimento non inerziale solidale con la piattaforma. In questo sistema di riferimento il bicchiere è soggetto a due forze apparenti, tra loro perpendicolari, la forza centrifuga di modulo $m_1 R_0 \Omega_0^2$ e la forza tangenziale di modulo $m_1 R_0 |\alpha|$ concorde con il verso di rotazione. Le due forze, sommate, danno una forza complessiva $\vec{F}$ che possiamo immaginare applicata al centro di massa del bicchiere (ricordiamo infatti che, essendo $r_e \ll R_0$, la forza centrifuga si comporta come un campo uniforme sulla scala delle dimensioni del bicchiere). L'altra forza applicata allo stesso punto è la forza peso, che abbiamo indicato con $\vec{P}$ nella figura qui sotto. Sia O il punto di appoggio del bicchiere sulla piattaforma, a distanza r_e dall'asse del bicchiere stesso, lungo la direzione parallela a $\vec{F}$. Questo è il punto attorno al quale avviene il ribaltamento al di sopra di un'accelerazione critica. Conviene quindi applicare la condizione di equilibrio per rotazioni attorno ad O. Si tratta di vedere per quale valore α il momento associato alla forza $\vec{F}$ rispetto al polo O compensa esattamente il valore del momento associato alla forza peso. Nella figura non abbiamo disegnato la forza esercitata dalla piattaforma sul bicchiere tramite l'attrito statico sulla superficie d'appoggio; questa forza avrebbe modulo uguale al modulo di $\vec{F}$ e verso opposto, per impedire lo scivolamento, ma il suo momento rispetto a O è nullo, quindi non la consideriamo. Non abbiamo nemmeno indicato la reazione vincolare normale al piano di appoggio perchè essa si annulla al valore critico di α. In conclusione, la relazione che esprime la situazione critica per il ribaltamento è la seguente:

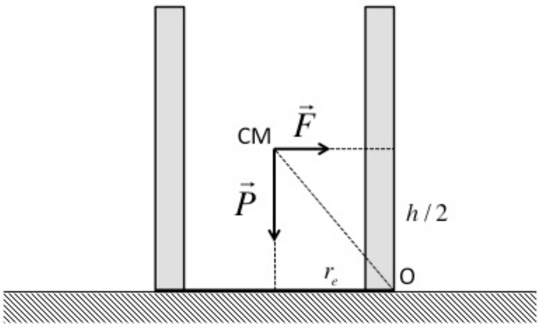
$$\frac{h}{2}|\vec{F}| = r_e m_1 g \ .$$

Si noti che $|\vec{F}|$ dipende dalla velocità angolare $\Omega(t)$ e, in particolare, decresce nel tempo se la piattaforma rallenta la rotazione. Nella relazione precedente va dunque considerato soltanto il valore iniziale di $|\vec{F}|$, quando la velocità angolare è Ω_0: se il bicchiere non si solleva all'inizio a maggior ragione non si solleverà neanche in seguito. Quindi la condizione critica per il ribaltamento è

$$\frac{h}{2} m_1 R_0 \sqrt{\Omega_0^4 + \alpha_{\text{crit}}^2} = m_1 g r_e \,,$$

da cui si ricava

$$\boxed{|\alpha_{\text{crit}}| = \sqrt{\left(\frac{2gr_e}{hR_0}\right)^2 - \Omega_0^4} = 2.89 \text{ rad/s}^2} \,.$$



Soluzione esercizio II.1

Per prima cosa conviene calcolare le coordinate termodinamiche degli stati A, B, C del sistema, che ci serviranno per i punti successivi.

Stato A: ci manca soltanto il volume, che possiamo determinare tramite l'equazione di stato del gas ideale. Dunque
$T_A = 403\text{K}$, $P_A = 10^5\text{Pa}$, $V_A = nRT_A/P_A = 10^{-1}\text{m}^3$.

Stato B: La trasformazione A −>B è isocora, il volume non varia (notiamo anche che la trasformazione è irreversibile perché il gas viene posto a contatto con una sorgente termica a temperatura significativamente diversa, e quindi compie una trasformazione non quasistatica). Conosciamo anche la temperatura finale del gas, resta da calcolare P_B, tramite l'equazione di stato o tramite la legge delle isocore. Dunque
$T_B = 273\text{K}$, $P_B = P_A T_B/T_A = 6.77 \times 10^4\text{Pa}$, $V_B = 10^{-1}\text{m}^3$.

Stato C: La trasformazione B −>C è adiabatica, reversibile. Conosciamo la pressione finale, che è uguale a P_A. Restano da calcolare il volume e la temperatura che si possono determinare con la legge delle adiabatiche quasistatiche (per esempio nella forma $PV^\gamma = \text{cost.}$) e a seguire l'equazione di stato per calcolare la coordinata mancante in C (nel nostro calcolo è la temperatura). Dunque

$T_C = P_C V_C / nR = 319\text{K}$, $P_C = 10^5\text{Pa}$, $V_C = (P_B/P_C)^{1/\gamma} V_B = 7.96 \times 10^{-2}\text{m}^3$.
La trasformazione C–>A infine è isobara e irreversibile (come prima, perché il gas viene posto a contatto con una sorgente termica a temperatura significativamente diversa, e quindi compie una trasformazione non quasistatica).

a)
Il gas scambia calore con la miscela durante la trasformazione A–>B a volume costante, il calore assorbito dal gas è $|Q_{\text{AB}}| = nc_v|\Delta T| = nc_v(T_A - T_B) = 4.86\text{kJ}$, dove abbiamo usato il calore specifico a volume costante $c_v = \frac{3}{2}R$ per un gas monoatomico ideale. Quindi, conoscendo il calore latente di fusione del ghiaccio, possiamo scrivere

$$\boxed{\Delta m_{\text{ghiaccio}} = \frac{Q_{\text{AB}}}{\lambda} = -14.7 \text{ g}}$$

. Il ghiaccio sciolto è pari a 14.7 grammi.

b)
Dalla trasformazione adiabatica B –>C avevamo già ricavato sopra il valore della temperatura in C:

$$\boxed{T_C = 319 \text{ K}}.$$

La trasformazione seguente C–>A è isobara, quindi vale

$$\boxed{Q_{\text{CA}} = nc_p\Delta T = 5.24 \text{ kJ}}$$

dove abbiamo usato il calore specifico a volume costante $c_p = \frac{5}{2}R$ per un gas monoatomico ideale.

c)
Il rendimento della macchina termica è definito come $\eta = W/|Q_{\text{ass}}|$. Si può vedere, applicando il primo principio all'intero ciclo, che una formula equivalente è $\eta = 1 - (|Q_{\text{ced}}|/|Q_{\text{ass}}|)$. Dai punti a) e b) abbiamo già i dati necessari al calcolo:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|} = 1 - \frac{|Q_{\text{AB}}|}{|Q_{\text{CA}}|} = 0.072}.$$

La macchina ha quindi un rendimento del 7.2%.
Avremmo anche potuto usare direttamente la definizione di rendimento in termini del lavoro eseguito. Nell'isocora A –> B il lavoro è nullo. Nell'adiabatica B –>C usiamo il primo principio: $W^{BC} = -\Delta U^{BC} = -nc_v\Delta T = -1.72\text{kJ}$. Nell'isobara C –>A abbiamo $W^{CA} = P\Delta V = 2.09\text{kJ}$. Il lavoro netto è $W = 373\text{J}$, che diviso per il calore $|Q^{CA}|$ dà lo stesso risultato di prima.

d)
Il gas compie un ciclo, dunque il suo stato finale corrisponde allo stato iniziale e l'entropia non varia. La variazione di entropia dell'universo è invece dovuta all'aumento di entropia delle sorgenti:

$$\boxed{\Delta S_{\mathrm{u}} = \frac{|Q^{\mathrm{AB}}|}{T_B} - \frac{|Q^{\mathrm{CA}}|}{T_A} = 4.82 \text{ J/K}}$$

dove abbiamo considerato che il serbatoio con la miscela di acqua e ghiaccio assorbe energia nel ciclo, mentre il serbataio a temperatura più alta lo cede.

Soluzione esercizio II.2

Calcoliamo le coordinate termodinamiche per i sistemi (1) e (2) nello stato iniziale.

Del sistema (1) conosciamo temperatura, volume e numero di moli e possiamo calcolare la pressione tramite l'equazione di stato del gas ideale:
$T_{1,i} = 290\text{K}$, $P_{1,i} = 2.41 \times 10^4\text{Pa}$, $V_{1,i} = 10^{-1}\text{m}^3$, $n_1 = 1\text{mol}$.

Del sistema (2) conosciamo temperatura e volume, resta da calcolare la pressione. Il sistema (2) è separato dal sistema (1) da una parete mobile su cui agisce la pressione del gas, più la pressione dovuta alla massa sospesa. Come si vede dal disegno, la massa tende a creare in (2) una pressione maggiore rispetto al sistema (1). La differenza $P_{2,i} - P_{1,i}$ sarà data semplicemente dalla forza peso per unità d'area:
$T_{2,i} = 290\text{K}$, $P_{2,i} = P_{1,i} + mg/S = 3.00 \times 10^4\text{Pa}$, $V_{2,i} = 10^{-1}\text{m}^3$.

a)
Attraverso la parete mobile adiabatica il gas in (2) è all'equilibrio con la pressione esterna P_{ext}, pertanto la pressione esterna è uguale alla pressione in (2) calcolata in precedenza:

$$\boxed{P_{\text{ext}} = P_{2,i} = 3.00 \times 10^4 \text{ Pa}}.$$

Il numero di moli n_2 può essere calcolato tramite l'equazione di stato del gas ideale:

$$\boxed{n_2 = \frac{P_{2,i}V_{2,i}}{RT_{2,i}} = 1.24 \text{ mol}}.$$

b)
La trasformazione è irreversibile e connette due stati di equilibrio. Possiamo applicare il primo principio a ciascuno dei due sottosistemi 1 e 2: per il sistema 1 scriviamo $Q_1 = \Delta U_1 + W_1$ e per il sistema 2 scriviamo $Q_2 =$

$\Delta U_2 + W_2 + W_{\text{ext}}$, dove abbiamo indicato con W_1 e W_2 i lavori eseguiti dal gas sulla parete mobile interna e con W_{ext} il lavoro eseguito dal gas sulla parete mobile in basso, contro la pressione esterna costante. Possiamo sommare membro a membro le due equazioni, notando che i due calori Q_1 e Q_2 sono l'uno l'opposto dell'altro e danno somma nulla (gli unici scambi di calore avvengono attraverso la parete interna tra i due gas, e che anche W_1 e W_2 danno somma nulla per il principio di azione e reazione. Dunque si ha

$$\Delta U_{\text{tot}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = -W_{\text{ext}}$$

che corrisponde al primo principio applicato al sistema complessivo 1+2. Ora, il lavoro è $W_{\text{ext}} = P_{\text{ext}} \left(V_{\text{tot},f} - V_{\text{tot},i}\right)$ e la variazione dell'energia interna è $\Delta U = n_{\text{tot}} c_v \left(T_f - T_i\right)$, dato che il gas nei due scomparti ha la stessa temperature sia all'inizio che alla fine. Dunque abbiamo

$$n_{\text{tot}} c_v \left(T_f - T_i\right) = P_{\text{ext}} \left(V_{\text{tot},f} - V_{\text{tot},i}\right) .$$

Per ricavare la temperatura finale ci manca il volume finale, che però può essere espresso in termini della temperatura finale tramite l'equazione di stato

$$P_{\text{ext}} V_{\text{tot},f} = n_{\text{tot}} R T_f .$$

Combinando le due equazioni si ottiene infine

$$\boxed{T_f = \frac{P_{\text{ext}} V_{\text{tot},i} + n_{\text{tot}} c_v T_i}{n_{\text{tot}} \left(c_v + R\right)} = 303 \text{ K}} .$$

c)

La variazione di entropia dell'universo corrisponde alla variazione di entropia del gas, visto che l'ambiente non ha scambi termici e il suo stato termodinamico rimane invariato. Per il calcolo della variazione di entropia del gas dobbiamo usare due coordinate termodinamiche: scegliamo la pressione e la temperatura, visto che per queste quantità abbiamo già tutte le informazioni. La variazione di temperatura è la stessa in entrambi i sottosistemi, mentre solo il gas in (1) subisce una variazione di pressione. Il risultato è quindi:

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}} = n_{\text{tot}} c_P \ln \frac{T_f}{T_i} - n_1 R \ln \frac{P_{\text{ext}}}{P_{1,i}} = 0.171 \text{ J/K}} .$$

Avremmo potuto usare anche un'espressione con i volumi, facendo però attenzione a separare il termine che riguarda il sistema (1) con n_1 e $V_{1,f}$ dal termine per il sistema (2) con n_2 e $V_{2,f}$, visto che sia il numero di moli, sia il volume finale sono diversi per i due sottosistemi.