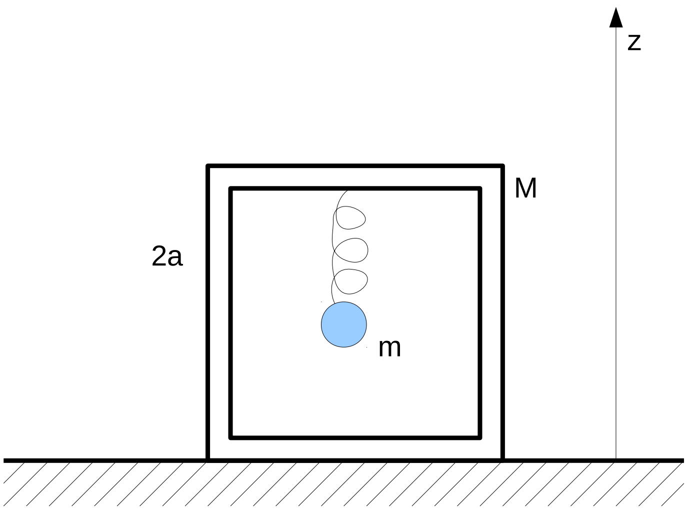
Fisica Generale I
A.A. 2014-2015, 23 giugno 2015

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1
Una scatola cubica di lato $L = 2a$ e massa $M = 200$ g contiene al suo interno una pallina puntiforme di massa $m = 100$ g. La pallina è appesa alla parete superiore della scatola per mezzo di una molla di costante elastica $k = 60$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = a = 10$ cm e massa trascurabile. Inizialmente la scatola è appoggiata a terra.

a) Utilizzando il sistema di riferimento in figura, si determini l'espressione per la posizione di equilibrio della pallina z_0 e per la reazione vincolare N esercitata dal pavimento sulla base della scatola.
b) Si supponga che la pallina sia tirata sul fondo della scatola e poi, in un dato istante, venga lasciata andare da ferma. Determinare la quota z_1 e la velocità v_1 della pallina nel momento in cui la scatola si stacca da terra.
c) Determinare la velocità del centro di massa v_{CM} del sistema (scatola+pallina) e l'energia meccanica E al momento del distacco.
d) Si descriva il moto del sistema e il moto relativo successivo al distacco da terra.
e) Si calcoli la quota massima raggiunta dal CM e l'energia meccanica del moto relativo in quell'istante.



Esercizio I.2

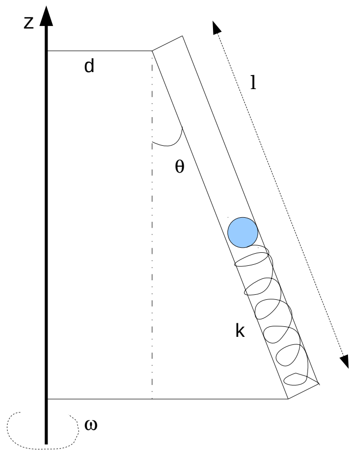
Una sottile provetta di vetro di lunghezza $l = 20$ cm è fissata ad un asse verticale z, con l'estremo superiore che dista $d = 5$ cm dall'asse stesso e con un'inclinazione di $\theta = 15^o$ rispetto a z (si veda la figura). All'interno della provetta, in corrispondenza dell'estremo inferiore, è fissata una molla di costante elastica $k = 1$ N/m e lunghezza a riposo pari a $l_0 = l/2$. All'altra estremità della molla è attaccata una pallina di plastica di raggio $r_p = 5.3$ mm e densità omogenea $\rho_p = 0.8$ kg/dm^3. Le masse della provetta e della molla siano trascurabili. Le dimensioni trasverse della provetta possono essere considerate trascurabili rispetto a d.

a) Inizialmente la pallina è ferma a metà della provetta. Si scriva l'equazione del moto della pallina per gli spostamenti s lungo l'asse della provetta, si determini il periodo di oscillazione T e la posizione all'equilibrio s_0.

b) Si ripeta il punto precedente, determinando s_0' e T', nel caso in cui l'intero sistema ruoti attorno a z con velocità angolare costante $\omega_0 = 18.7$ rad/s.

c) Si supponga adesso di rimuovere la molla. Inizialmente la pallina si trova a metà provetta, a velocità nulla rispetto ad essa. L'intero sistema ruota a velocità angolare iniziale ω_0, ma è libero di cambiare tale velocità angolare nel tempo. La pallina andrà a toccare un'estremità della provetta. Determinare la velocità angolare ω_1 che il sistema avrà quando la pallina raggiunge tale estremità.

d) Si spieghi qualitativamente cosa cambierebbe nel caso in cui la provetta venisse riempita con acqua ($\rho_a = 1$ kg/dm^3). Quali dei risultati dei punti precedenti (s_0, T, s_0', T', ω_1) subirebbero una variazione?



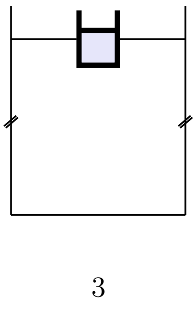
Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Una mole di gas monoatomico ideale compie un ciclo formato da quattro trasformazioni reversibili: un'adiabatica AB, un'isocora BC, un'isoterma CD e infine una ulteriore isocora (DA) con:
$V_A = 0.03$ m^3, $V_C = 0.04$ m^3, $T_A = 450$ K, $T_C = 400$ K.
a) Calcolare le pressioni in A, B C, D e tracciare il diagramma PV del ciclo.
b) Calcolare i calori scambiati nelle singole trasformazioni.
c) Si calcoli la variazione di entropia dell'universo su un ciclo completo. Calcolare la variazione di entropia del gas, dell'ambiente e dell'universo su un ciclo completo se invece la trasformazione DA avvenisse in modo irreversibile, a contatto con un unico termostato alla temperatura T_A.
d) Calcolare T_C^* tale che, fermi restando gli altri dati del problema, il rendimento del ciclo termico risulti nullo.

Esercizio II.2

Un cilindro con pistone mobile, con pareti conduttrici di calore, contiene un volume $V_1 = 10$ l di elio (monoatomico, ideale) inizialmente alla pressione atmosferica ($P_1 = 10^5$ Pa). La massa delle pareti del contenitore è $M = 6.5$ kg ed il loro volume è pari a $V_C = 1$ l (si può trascurare la massa del gas rispetto alla massa del contenitore). Inizialmente il recipiente galleggia su una vasca piena d'acqua alla temperatura di 10°C.
Il contenitore viene portato lentamente sul fondo della vasca, profonda 10 m, con un processo reversibile (quasistaticamente e senza dissipazioni).
La densità dell'acqua vale $\rho = 1000$ kg/m^3 e per l'accelerazione gravitazionale si prenda il valore approssimato $g = 10$ m/s^2.
a) Si calcolino le coordinate termodinamiche del gas (P_2, V_2, T_2) quando il cilindro si trova sul fondo (non si dimentichi la pressione idrostatica!).
b) Si discuta l'equilibrio (stabilità) del cilindro sul fondo della vasca.
c) Si calcoli la variazione di entropia del gas e dell'acqua (considerata come un termostato) in questa trasformazione.
L'acqua nella vasca viene poi lentamente riscaldata.
d) Si calcoli la temperatura T_3 alla quale il contenitore si stacca dal fondo e la variazione di entropia del gas in questa trasformazione.
e) La temperatura dell'acqua si stabilizza infine a $T_f = T_3 + 1$ K. Si discuta la posizione finale del recipiente rispetto al livello dell'acqua e lo stato finale del gas (P_f, V_f).



Soluzione esercizio I.1

a)
All'equilibrio sulla pallina agiscono la forza di gravità e quella elastica che si compensano. Detta z_0 la quota a cui si trova la pallina, misurata rispetto alla quota $z = 0$ sul pavimento, si avrà

$$F = -mg - k(z_0 - a) = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = a - \frac{mg}{k} = 8.37 \text{ cm}\,. \tag{1}$$

Sulla scatola agiscono tre forze: la propria forza peso $-Mg$, la forza elastica esercitata dalla molla nel punto in cui è appesa che, per il principio di azione-reazione, è uguale al peso della pallina, $-mg$, e infine la reazione vincolare esercitata dal pavimento N. Quest'ultima si trova dalla condizione di equilibrio:

$$N = (M + m)g\,. \tag{2}$$

In pratica, com'era da aspettarsi, il pavimento compensa esattamente il peso totale del sistema scatola+pallina. La forza elastica è una forza interna al sistema e non entra nella condizione di equilibrio.

b)
Fintantoché la scatola rimane ferma, tutta la dinamica del problema sta nel moto della sola pallina soggetta alla forza della molla. Il moto è armonico e segue l'equazione

$$m\ddot{z} = -k\,(z - z_0)\;, \tag{3}$$

dove z_0 è la quota di equilibrio calcolata al punto precedente. Date le condizioni iniziali $z(0) = 0$ e $v(0) = 0$, la soluzione risulta essere

$$z(t) = z_0(1 - \cos\omega t) \tag{4}$$
$$v(t) = z_0\omega \sin\omega t \tag{5}$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$.
La reazione vincolare N non è più costante, ma assume valori diversi in funzione della quota z della pallina. Per calcolare $N(z)$ si può ragionare in due modi equivalenti. Il primo consiste nel considerare l'equilibrio della sola scatola, supponendo che stia ferma appoggiata al suolo. La scatola è soggetta alla propria forza peso, Mg, la forza elastica impressa dalla molla, $k(z - a)$ e la reazione vincolare $N(z)$. Notiamo che, a differenza del punto precedente, la forza elastica non è più uguale al peso della pallina appesa, dato che questa non è in equilibrio. Tenuto conto del verso di ciascuna forza, l'equazione per l'equilibrio della scatola diventa

$$N(z) = Mg - k(z - a)\,. \tag{6}$$

Si vede che N diminuisce mano a mano che la pallina sale e, dato che N deve essere positiva o al più nulla (il pavimento non può trattenere la scatola), il distacco avviene quando $N(z) = 0$, alla quota

$$z_1 = a + \frac{Mg}{k} = 13.27 \text{ cm}\,. \tag{7}$$

Il secondo metodo consiste nel considerare il sistema complessivo scatola+pallina e scrivere l'equazione del moto del centro di massa, la cui accelerazione è fissata solo dalle forze esterne agenti sul sistema, che sono i due pesi Mg e mg e la reazione vincolare $N(z)$:

$$(M+m)\ddot{z}_{\text{CM}} = N(z) - (M+m)g\,. \tag{8}$$

Fino a che la scatola rimane ferma, l'accelerazione del CM può essere calcolata a partire dall'accelerazione della pallina:

$$\ddot{z}_{\text{CM}} = \frac{m\ddot{z}}{M+m} = \frac{-k(z-z_0)}{M+m} = \frac{-k(z-a)-mg}{M+m}\,, \tag{9}$$

avendo usato i risultati (1) e (3). Combinando le ultime due espressioni si ritrova il risultato precedente per $N(z)$ e, di conseguenza, lo stesso risultato per z_1.
Infine, per calcolare la velocità al momento del distacco conviene usare la conservazione dell'energia meccanica per la pallina:

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}k(z_1-a)^2 + mgz_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{10}$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}[a^2-(z_1-a)^2] - 2gz_1} = 1.66 \text{ m/s}\,. \tag{11}$$

In modo leggermente più complicato, si poteva calcolare v_1 anche sostituendo z con z_1 nella legge oraria (4), per ricavare il tempo del distacco t_1 da inserire poi nell'espressione della velocità (5). Ancora meglio, si poteva riscrivere le (4) e (5) rispettivamente come $\cos^2\omega t = (z_1-z_0)^2/z_0^2$ e $\sin^2\omega t = v_1^2/(z_0\omega)^2$, e sommarle per trovare

$$v_1 = z_0\omega\sqrt{1 - \frac{(z_1-z_0)^2}{z_0^2}}\,, \tag{12}$$

che è lo stesso risultato di prima, espresso in modo diverso.

c)
Al momento del distacco la scatola è ancora ferma e la velocità del CM data da

$$v_{\text{CM}} = \frac{mv_1}{M+m} = \frac{v_1}{3} = 0.55 \text{ m/s} = 55 \text{ cm/s}\,. \tag{13}$$

Chiamiamo E_i e E_d rispettivamente l'energia meccanica iniziale, quando la pallina è ferma in $z = 0$, e quella al momento del distacco, quando la pallina si trova in z_1 con velocità v_1 e la scatola è ancora ferma. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E_i &= Mga + \frac{1}{2}ka^2 \\ E_d &= Mga + \frac{1}{2}k(z_1 - a)^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 \end{aligned} \tag{14}$$

Inserendo i dati noti, otteniamo $E_i = 0.496$ J. Ovviamente vale anche $E_d = E_i$, dato che l'energia si conserva. Quest'ultima relazione l'abbiamo già usata in (10) per calcolare v_1.

d)

Dal momento del distacco in poi ($t \geq t_1$) non è più possibile trattare separatamente il moto della pallina da quello della scatola, dato che entrambe si muovono. Per procedere è necessario considerare il sistema come un sistema a due corpi che interagiscono tra loro tramite una molla, soggetti al campo (esterno) di gravità. Dato che il moto è di pura traslazione verticale, i due corpi possono essere visti come due particelle di massa M e m poste agli estremi di una molla verticale. Il loro centro di massa si muoverà come una particella soggetta alla forza peso, e seguirà un moto balistico con accelerazione g:

$$z_{\mathrm{CM}}(t) = z_{\mathrm{CM}}(t_1) + v_{\mathrm{CM}}(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \tag{15}$$

$$v_{\mathrm{CM}}(t) = v_{\mathrm{CM}}(t_1) - g(t - t_1) \tag{16}$$

con

$$z_{\mathrm{CM}}(t_1) = \frac{Ma + mz_1}{m + M} = 11.1 \text{ cm} \tag{17}$$

e $v_{\mathrm{CM}}(t_1) = 0.55$ cm/s calcolato la punto precedente.

Il moto relativo invece risentirà della sola forza elastica e sarà armonico con pulsazione $\sqrt{k/\mu}$, dove $\mu = mM/(M+m)$ è la massa ridotta. Se chiamiamo z_r la differenza tra la quota del CM della scatola e quella della pallina, si ha $z_r = \Delta l$, dove Δl è l'allungamento della molla (con segno). Il moto relativo è dunque fornito dalla legge oraria

$$z_r(t) = A\cos(\sqrt{k/\mu}\ t + \phi) \tag{18}$$

potendo fissare le costanti di integrazione A e ϕ tramite la conoscenza dei valori z_1 e v_1. Infine, dalle espressioni di $z_{\mathrm{CM}}(t)$ e $z_r(t)$ si può facilmente ricavare le posizioni nel tempo dei CM della scatola e della pallina (ma non è necessario ai fini del problema).

e)

Per calcolare la quota massima raggiunta dal CM del sistema basta riprendere le equazioni (15) e (16) e imporre $v_{\mathrm{CM}}(\hat{t}) = 0$. Ricavando $(\hat{t} - t_1)$ dalla seconda e sostituendolo nella prima, si trova il risultato

$$z_{\max} = z_{\rm CM}(\hat{t}) = z_{\rm CM}(t_1) + \frac{v_{\rm CM}^2(t_1)}{2g} = 12.6 \text{ cm} . \tag{19}$$

A questa quota l'energia meccanica del sistema è ancora uguale al valore iniziale E_i calcolato al punto (c), dato che l'energia si conserva. La stessa energia possiamo anche scriverla come somma dell'energia potenziale $(M + m)gz_{\max}$ e dell'energia meccanica del moto relativo (a sua volta somma di quella cinetica del moto relativo e dell'energia potenziale della molla), mentre l'energia cinetica associata al moto del CM è nulla in $z_{\max}$. Dunque abbiamo

$$E_r = E_i - (M + m)gz_{\max} = 0.126 \text{ J} . \tag{20}$$

Soluzione esercizio I.2

a)

Le componenti delle forze che agiscono sulla pallina trasversalmente alla provetta si compensano per effetto dei vincoli e possiamo ignorarle. Nella direzione parallela alla provetta invece, l'equazione del moto è

$$m\ddot{s} = -ks - mg\cos\theta \ , \tag{21}$$

ovvero

$$\ddot{s} + \Omega^2 s = -g\cos\theta \ , \tag{22}$$

con $\Omega = \sqrt{k/m}$. Qui stiamo prendendo s positivo verso l'alto e nullo quando la pallina si trova a metà provetta. La massa m può essere calcolata a partire dalla densità assegnata:

$$m = (4/3)\pi r_p^3 \rho_p = 0.5 \text{ g} , \tag{23}$$

da cui $\omega = 44$ rad/s e il periodo

$$T = 2\pi/\Omega = 0.14 \text{ s} . \tag{24}$$

La soluzione generale dell'equazione del moto è

$$s(t) = A\cos(\Omega t + \phi) - \frac{mg\cos\theta}{k} \tag{25}$$

dove la costante a destra può essere identificata come la posizione di equilibrio della pallina sotto l'azione combinata della forza elastica e della forza peso:

$$s_0 = -\frac{mg\cos\theta}{k} = -4.73 \text{ mm} . \tag{26}$$

b)

In questo caso possiamo metterci nel sistema di riferimento rotante, solidale con la provetta e quindi considerare anche la forza centrifuga. Questa ha direzione radiale e modulo che dipende dalla posizione s della pallina. Infatti, il modulo della forza centrifuga è $m\omega_0^2 r$ dove la distanza della pallina dall'asse vale $r = d + (l_0 - s)\sin\theta$, con $l_0 = l/2$. Dobbiamo prendere la componente della forza nella direzione della provetta e aggiungerla all'equazione del moto:

$$m\ddot{s} = -ks - mg\cos\theta - m\omega_0^2[d + (l_0 - s)\sin\theta]\sin\theta\ . \tag{27}$$

Notiamo che la forza centrifuga contribuisce sia con un termine proporzionale a s, che si aggiunge al termine della forza elastica, sia con un termine costante. Possiamo scrivere

$$\ddot{s} = -\Omega'^2 s - mg\cos\theta - m\omega_0^2(d + l_0\sin\theta)\sin\theta\ , \tag{28}$$

con $\Omega'^2 = (k/m) - \omega_0^2\sin^2\theta$, e il periodo diventa

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{(k/m) - \omega_0^2\sin^2\theta}} = 0.141\ \mathrm{s}\,. \tag{29}$$

Notiamo che il periodo è cambiato di molto poco rispetto al T del punto precedente perché $\omega_0^2\sin^2\theta$ è molto minore di k/m. Per apprezzare la variazione bisognerebbe fare il calcolo con più cifre significative o, meglio, sviluppare T' così:

$$T' \simeq T\left(1 + \frac{\omega_0^2\sin^2\theta}{2(k/m)}\right)\ , \tag{30}$$

dove il secondo termine nella parentesi vale circa 6×10^{-3}.
Infine, annulando il membro di destra dell'equazione del moto, possiamo trovare la nuova posizione di equilibrio

$$s_0' = -\frac{mg\cos\theta + m\omega_0^2(d + l_0\sin\theta)\sin\theta}{k - m\omega_0^2\sin^2\theta} = -8.26\ \mathrm{mm}\,. \tag{31}$$

All'equilibrio, la molla è più compressa rispetto al punto precedente perché la forza centrifuga aggiunge una componente, non piccola, concorde alla forza peso.

c)

In assenza della molla la pallina sarà spinta verso il fondo della provetta sia dalla forza peso che dalla forza centrifuga. Dato che la velocità angolare di rotazione del sistema ω può variare liberamente (nessun momento di forze esterne viene applicato all'asse di rotazione), ne segue che durante la caduta si conserva il momento angolare. Nel calcolo del momento angolare possiamo approssimare la pallina come una particella puntiforme. Inoltre, osserviamo che la componente del momento angolare nella direzione dell'asse di rotazione può sempre essere scritta come $I\omega$, dove il momento d'inerzia è semplicemente $I = mr^2 = m[d + (l_0 - s)]^2$ indipendentemente dalla velocità che la pallina può avere lungo la provetta. Dunque si ha

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 \tag{32}$$

con

$$I_0 = m(d + l_0 \sin\theta)^2 \quad ; \quad I_1 = m(d + l \sin\theta)^2 \tag{33}$$

Inserendo i dati del problema, si trova

$$\omega_1 = 0.555\ \omega_0 = 10.38 \ \ \mathrm{rad/s}\,. \tag{34}$$

d)

Se la provetta fosse piena d'acqua dovremmo considerare l'effetto della spinta di Archimede. Trascuriamo gli effetti viscosi e concentriamoci sul bilancio delle forze in gioco.

Rispetto al punto a) le forze agenti sulla pallina saranno

$$m\ddot{s} = -ks - mg\cos\theta + m_a g\cos\theta = -ks + (m_a - m)g\cos\theta \tag{35}$$

dove l'ultimo termine è il peso dell'acqua spostata (o meglio, la sua componente nella direzione della provetta). Notiamo che, essendo la densità dell'acqua maggiore di quella della pallina, la massa m_a è maggiore di m e l'effetto complessivo è equivalente ad una forza peso efficace $(m_a - m)g\cos\theta$ diretta verso l'alto. Si può scrivere

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s + \frac{m_a - m}{m}g\cos\theta \tag{36}$$

e si vede che la presenza dell'acqua cambia la posizione di equilibrio ma non il periodo di oscillazione. Notiamo anche che la posizione di equilibrio si trova sopra la metà della provetta (s positivo), coerentemente con il fatto che la spinta di Archimede è maggiore della forza peso.

Nel caso del punto b) vale sostanzialmente il discorso precedente, ma bisogna prestare attenzione al fatto che la spinta di Archimede va intesa non solo come il peso della massa d'acqua spostata, ma come il peso efficace nel sistema di riferimento in rotazione, che include anche il contributo della forza apparente centrifuga. Dunque, l'equazione del moto diventa

$$m\ddot{s} = -ks + (m_a - m)\{g\cos\theta + \omega_0^2[d + (l_0 - s)\sin\theta]\sin\theta\}\,, \tag{37}$$

ovvero

$$\ddot{s} = -\Omega''^2 s + \frac{m_a - m}{m}[g\cos\theta - \omega_0^2(d + l_0\sin\theta)\sin\theta]\ , \tag{38}$$

con

$$\Omega''^2 = \frac{k}{m} + \frac{m_a - m}{m}\omega_0^2 \sin^2\theta\,, \tag{39}$$

e si vede che in questo caso l'acqua modifica anche la pulsazione, e dunque il periodo, dell'oscillatore, dato che la spinta di Archimede contiene un termine lineare in s.
Per il punto c) si può dire che ω_1 varierebbe sicuramente in presenza dell'acqua per due motivi: 1) il momento d'inerzia del sistema in rotazione cambia a causa della massa nella colonna d'acqua, 2) l'estremo della provetta in cui la pallina tende ad andare non sarà più quello inferiore bensì quello superiore.

Soluzione esercizio II.1

a)
Per calcolare la pressione P_A usiamo l'equazione di stato del gas ideale

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 1.25 \times 10^5 \ \ \text{Pa}\,. \tag{40}$$

La trasformazione AB è un'adiabatica, quindi PV^γ rimane costante. Dato che $V_B = V_C$, segue che

$$P_B = P_A \frac{V_A^\gamma}{V_B^\gamma} = P_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^\gamma = 7.72 \times 10^4 \ \ \text{Pa}\,. \tag{41}$$

Ora calcoliamo anche T_B con la legge del gas ideale

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 371 \ \ \text{K}\,. \tag{42}$$

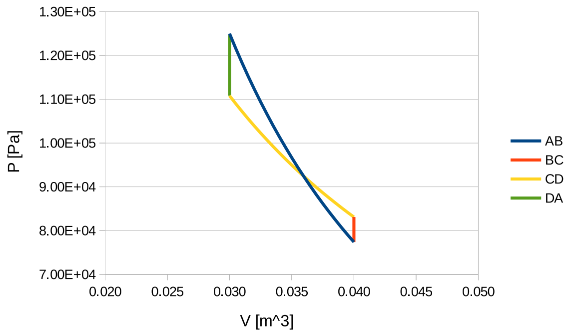
La trasformazione BC è un'isocora, quindi P/T è costante e

$$P_C = P_B \frac{T_C}{T_B} = 8.31 \times 10^4 \ \ \text{Pa}\,. \tag{43}$$

Infine CD è un'isoterma, dunque PV è costante e

$$P_D = P_C \frac{V_C}{V_D} = 1.11 \times 10^5 \ \ \text{Pa}\,. \tag{44}$$

Riassumendo:
$T_A = 450$ K, $V_A = 0.03$ m^3, $P_A = 1.25 \times 10^5$ Pa.
$T_B = 371$ K, $V_B = 0.04$ m^3, $P_B = 7.72 \times 10^4$ Pa.
$T_C = 400$ K, $V_C = 0.04$ m^3, $P_C = 8.31 \times 10^4$ Pa.
$T_D = 400$ K, $V_D = 0.03$ m^3, $P_D = 1.11 \times 10^5$ Pa.



b)
La trasformazione AB è adiabatica, quindi $Q_{\mathrm{AB}} = 0$.
La trasformazione BC è isocora, dunque il lavoro compiuto è nullo. Applicando il primo principio della termodinamica $Q_{\mathrm{BC}} = \Delta U_{\mathrm{BC}} = nc_V \Delta T = 356$ J.
Invece nella trasformazione CD, isoterma, non si ha variazione di energia interna, la quale dipende soltanto dalla temperatura. Quindi per il primo principio si ha

$$Q_{\mathrm{CD}} = W_{\mathrm{CD}} = \int_C^D P dV = nRT_C \int_C^D \frac{dV}{V} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} = -956 \text{ J} \,. \quad (45)$$

Infine per DA, isocora, calcoliamo il calore come per BC: $Q_{\mathrm{DA}} = \Delta U_{\mathrm{DA}} = nc_V \Delta T = 623$ J. Notiamo che il gas assorbe calore in entrambe le trasfomazioni isocore e lo cede nell'isoterma.

c)
Dato che le trasformazioni sono tutte reversibili, la variazione di entropia dell'universo su un ciclo è nulla.
Nel caso in cui la trasformazione isocora DA sia irreversibile, la variazione di entropia dell'universo si può calcolare come la somma della variazione di entropia del gas e dell'ambiente lungo DA. In tutte le altre trasformazioni, essendo reversibili, avremo $\Delta S_i^{\mathrm{gas}} + \Delta S_i^{\mathrm{amb}} = 0$.
La variazione di entropia del gas nella trasformazione isocora irreversibile DA vale $\Delta S_{\mathrm{DA}}^{\mathrm{gas}} = nc_V \ln(T_A/T_D) = 1.47$ J/K. Inoltre il gas scambia calore con un unico termostato alla temperatura T_A, e la variazione di entropia di quest'ultimo vale $\Delta S_{\mathrm{DA}}^{\mathrm{amb}} = Q_{\mathrm{DA}}^{\mathrm{amb}}/T_A = -nc_V(T_A - T_D)/T_A = -1.38$ J/K.
Quindi la variazione di entropia dell'universo sul ciclo risulta essere $\Delta S_{\mathrm{ciclo}}^U = \Sigma_i \Delta S_i^{\mathrm{gas}} + \Delta S_i^{\mathrm{amb}} = \Delta S_{\mathrm{DA}}^{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{DA}}^{\mathrm{amb}} = 0.09$ J/K, ed è positiva in coerenza con il secondo principio.
La variazione di entropia del gas su un ciclo è banalmente nulla perché l'entropia è una funzione di stato.
La variazione di entropia dell'ambiente su un ciclo deve quindi coincidere con $\Delta S_{\mathrm{ciclo}}^U$.

d)

Se il rendimento del ciclo termico deve essere nullo, vuol dire che il lavoro totale compiuto dal gas deve essere nullo (l'area inclusa dal ciclo nel diagramma P-V tenendo conto dei versi di percorrenza). Calcoliamo dunque il lavoro totale.

La trasformazione AB è adiabatica e dunque $W_{\mathrm{AB}} = -\Delta U_{\mathrm{AB}} = nc_V(T_A - T_B) = 979$ J, indipendente da T_C. Le trasformazioni isocore BC e DA non danno contributo al lavoro qualunque sia T_C. Per la trasformazione isoterma CD abbiamo $W_{\mathrm{CD}} = nRT_C \ln(V_D/V_C)$. La condizione per avere lavoro totale nullo diventa $W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{AB}} = 0$, ovvero

$$T_C = \frac{W_{\mathrm{AB}}}{nR\ln(V_C/V_D)} = 409 \text{ K}\,. \tag{46}$$

Soluzione esercizio II.2

a)

Dello stato iniziale, quando il cilindro galleggia sull'acqua, conosciamo la temperatura $T_1 = 283$ K, che è uguale a quella dell'acqua, il volume $V_1 = 10$ l, che è assegnato, e la pressione $P_1 = 10^5$ Pa, che è uguale a quella atmosferica. Tramite l'equazione di stato del gas ideale possiamo anche calcolare il numero di moli di elio, che è un dato che ci servirà dopo: $n = P_1V_1/RT_1 = 0.425$ mol. Dato che la massa atomica dell'elio è di 4 g/mol, la massa del gas equivale a 1.7 g, che è effettivamente trascurabile rispetto alla massa del contenitore. Ora possiamo calcolare le coordinate anche dello stato finale, quando il cilindro si trova sul fondo. Per prima cosa notiamo che la pressione esercitata sul contenitore quando si trova in fondo è la somma di quella atmosferica e della pressione idrostatica dovuta al fluido: $P_2 = P_1 + \rho gh = 2P_1$. Infatti in acqua, dove la densità è 10^3 Kg/m^3, ogni 10 metri di profondità equivalgono a una atmosfera in più. Inoltre la temperatura del gas rimane uguale a quella dell'acqua, $T_2 = T_1 = 283$ K. Dall'equazione di stato del gas segue $V_2 = V_1P_1/P_2 = 5$ l.

b)

Fissato un asse verticale rivolto verso l'alto, le forze agenti sul sistema (cilindro+gas) sono la forza peso e la spinta di Archimede. Il volume di acqua spostata è pari alla somma dei volumi del gas e delle pareti del cilindro. Dunque la forza totale è $F = -Mg + \rho g\,(V_C + V_2) = -5N$ ed è rivolta verso il basso. Quindi il cilindro rimane stabilmente appoggiato al fondo.

c)

La variazione di entropia del gas nel passaggio dallo stato 1 allo stato 2,

che hanno la stessa temperatura, è data da $\Delta S_{12}^{\text{gas}} = Q_{12}^{\text{gas}}/T_1 = W_{12}^{\text{gas}}/T_1 = nR\ln(V_2/V_1) = -nR\ln 2 = -2.45$ J/K.
La variazione di entropia dell'acqua è uguale e contraria, $\Delta S_{12}^{\text{acqua}} = -\Delta S_{12}^{\text{gas}}$, dato che l'unica differenza nell'espressione $\Delta S_{12} = Q_{12}T_1$ è il segno del calore scambiato, che è ceduto dal gas e assorbito dall'acqua. In questo modo la variazione di entropia dell'universo è nulla, come dev'essere per una trasformazione reversibile.

d)
Durante il riscaldamento dell'acqua, la pressione esercitata sul contenitore rimane costante, perciò la trasformazione $2 \to 3$ risulta essere un'espansione isobara reversibile, con $V/T =$ costante. La temperatura del gas aumenta di pari passo con quella dell'acqua; il pistone si alza aumentando il volume occupato dal gas e, di conseguenza, la spinta di Archimede, fino all'istante critico in cui quest'ultima è uguale al peso del cilindro. Detto V_3 il volume del gas in quell'istante, si ha

$$\rho g(V_C + V_3) = Mg\,, \tag{47}$$

da cui $V_3 = (M/\rho) - V_C = 5.5$ l. Da questo, tramite l'equazione di stato, si ottiene $T_3 = T_2V_3/V_2 = 311$ K. E infine, la variazione di entropia del gas per la trasformazione isobara è data da $\Delta S_{23} = nc_P\ln(T_3/T_2) = 0.84$ J/K, avendo usato $c_P = (5/2)R$.

e)
Alla temperatura T_f il gas occuperà un volume leggermente maggiore che alla temperatura T_3, e la spinta di Archimede risulterà più grande. In questo modo il contenitore tenderà ad allontanarsi sempre più dal fondo della vasca. Salendo la pressione sul pistone diminuisce, perché la pressione idrostatica diminuisce, e il volume occupato dal gas aumenta, facendo aumentare ulteriormente la spinta di Archimede. In questo modo il cilindro continuerà a salire fino ad arrivare in superficie dove troverà la sua nuova condizione di galleggiamento. La trasformazione avviene rapidamente e non è reversibile. Sappiamo però che la pressione finale sarà la pressione atmosferica e che la temperatura di equilibrio sarà uguale alla temperatura dell'acqua, da cui segue che $T_f = 312$ K, $P_f = 10^5$ Pa, e $V_f = nRT_f/P_f = 11$ l.