Fisica Generale I
A.A. 2015-2016, 4 febbraio 2016

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Una ruota dentata è costituita da due dischi coassiali identici, ciascuno di raggio $R = 30$ cm e spessore $h = 3$ cm, connessi da un cilindretto interno, anch'esso coassiale, di raggio $r = 8$ cm e spessore h. La ruota ha una densità omogenea $\rho = 4$ g/cm^3. Una fune sottile inestensibile, per metà rossa e per metà blu, è parzialmente avvolta sul cilindretto interno tale da risultare inizialmente avvolta solo la parte rossa. La ruota è posizionata su una guida rettilinea dentata orizzontale su cui può rotolare senza slittare. Si trascuri il volume dei denti.

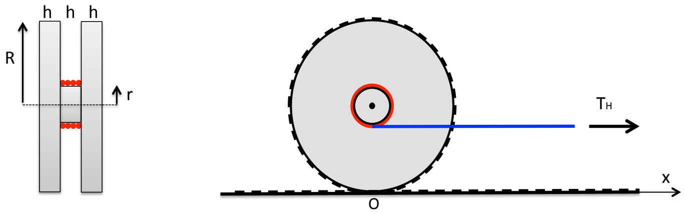
a) Calcolare il momento d'inerzia della ruota dentata I_{CM} per rotazioni intorno all'asse di simmetria e il momento d'inerzia I_O rispetto all'asse parallelo a questo, ma passante per il punto di appoggio sulla guida.

b) Supponiamo adesso di applicare una trazione orizzontale costante $T_H = 50$ N alla fune, come in figura, nel verso positivo dell'asse x per un intervallo di tempo $\Delta t = 4$ s. Si determini lo spostamento della ruota nel tempo Δt. Si determini inoltre la lunghezza della fune rossa che si srotola o quella blu che si avvolge.

c) Si ripeta il calcolo del punto precedente considerando, invece, una trazione verticale $T_V = 100$ N verso l'alto, con il punto di distacco della fune dal cilindretto dalla parte positiva delle x.

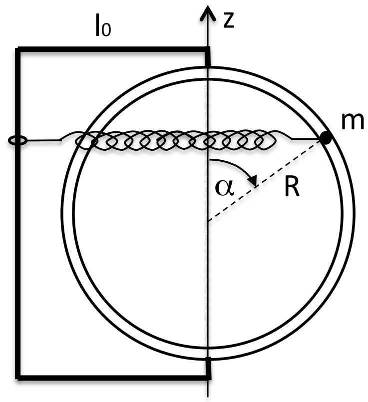
d) Supponiamo ora che la fune venga mantenuta in tensione, con $|T| = 200$ N, lungo una direzione intermedia tra i due casi precedenti, con un angolo α rispetto all'orizzonte. Determinare il valore di α affinché l'ingranaggio non si muova rispetto alla guida. Cosa succede, al variare di $|T|$?

e) La fune viene rimossa e la ruota viene lasciata in quiete sopra la guida orizzontale dentata. Ad un certo istante la ruota viene colpita sul cilindretto interno, all'altezza del centro di massa, da un piccolo proiettile di massa 1 kg che la urta elasticamente con velocità iniziale $v_0 = 20$ m/s, in direzione parallela all'asse x. Calcolare la velocità di traslazione della ruota v_r dopo l'urto.



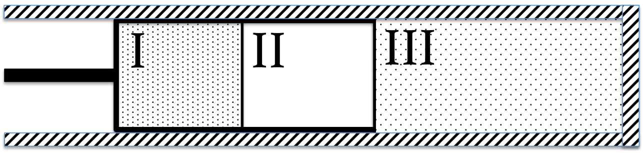
Esercizio I.2

Una particella di massa $m = 2$ kg è vincolata a muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio $R = 40$ cm, contenuta in un piano verticale. La guida è sostenuta da una struttura di aste rigide complanari, come in figura. Una molla di constante elastica $k = 98$ N/m, massa trascurabile e lunghezza a riposo l_0 collega la particella all'asta verticale posta a distanza l_0 dal centro della guida. La molla è agganciata all'asta tramite un anellino, anch'esso di massa trascurabile, che scorre senza attrito e che, tramite un opportuno dispositivo, viene mantenuto in ogni istante alla stessa quota della particella.



a) Scrivere l'equazione del moto della particella lungo la guida, usando la coordinata α, e determinare i punti di equilibrio.
b) Tracciare il grafico dell'energia potenziale in funzione dell'angolo α e discutere la stabilità dei punti di equilibrio (suggerimento: si noti che, con i valori numerici assegnati, si ha $2mg = kR$).
c) Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno a ciascun punto di equilibrio stabile.
d) Assumiamo adesso che l'intera struttura ruoti con una velocità angolare costante Ω attorno all'asse verticale z passante per il centro della guida. Scrivere l'equazione del moto e l'energia potenziale efficace della particella nel sistema di riferimento in rotazione. Discutere qualitativamente i casi $\Omega = \sqrt{k/m}$ e e $\Omega = \sqrt{2k/m}$, confrontandoli con il caso $\Omega = 0$.
e) Sia $\Omega = \sqrt{2k/m}$ e la particella si trovi inizialmente in $\alpha_0 = (2/3)\pi$ con velocità tangenziale v_0. Quanto deve valere v_0 affinché la particella possa raggiungere rispettivamente il punto più basso e quello più alto della guida?

Esercizio II.1
Si consideri un recipiente cilindrico come in figura, di sezione $S = 160$ cm^2 e costituito da tre camere I, II e III. Tutte le pareti sono adiabatiche, tranne quella che separa le camere I e II. Il volume delle camere I e II è lo stesso e vale $V_0 = 5$ dm^3; la prima contiene due moli di gas ideale biatomico in equilibrio alla temperatura T_0, mentre la seconda è completamente vuota. La camera III contiene n moli di gas ideale monoatomico a temperatura iniziale $T_A = 300$ K. Il suo volume può essere variato muovendo rigidamente le camere I e II che, essendo dotate di pareti rigide, si comportano come un unico pistone privo di attrito, manovrabile con una forza esterna. Inizialmente il volume della camera III è $2V_0$ e il gas si trova nello stato di equilibrio A, con il pistone soggetto solo alla pressione atmosferica esterna $P_A = 10^5$ Pa. Da un certo istante si inizia ad applicare al pistone una forza esterna aggiuntiva che, in modo quasistatico, comprime il gas nella camera III fino a dimezzarne il volume. Da quel momento in poi il pistone è tenuto fisso.
a) Calcolare le coordinate termodinamiche del gas in III nel nuovo stato di equilibrio B e la forza F_B aggiuntiva applicata al pistone in tale configurazione.
b) Improvvisamente la parete che separa le camere II e III si frattura e il gas, inizialmente confinato in III si espande rapidamente fino ad occupare entrambe le camere II e III, in modo adiabatico. Calcolare le coordinate termodinamiche del gas nello stato C alla fine dell'espansione.
c) Una volta avvenuta l'espansione iniziano ad avere effetto gli scambi termici attraverso la parete che separa le camere I e II. Quale dev'essere la temperatura iniziale T_0 del gas biatomico affinché alla fine i due gas raggiungano un equilibrio termico a temperatura T_A?
d) Si disegni il diagramma P-V del ciclo per il gas monoatomico, distinguendo chiaramente le trasformazioni reversibili da quelle irreversibili. Si calcoli il lavoro W compiuto dal gas nell'intero ciclo e il calore Q scambiato con il gas biatomico. Si discuta il risultato alla luce del primo e del secondo principio della termodinamica.
e) Si calcoli la variazione di entropia del gas monoatomico durante la trasformazione BC e quella dell'universo sull'intero ciclo.



Esercizio II.2

Un cilindro di altezza $h_c = 40$ cm, area di base $S = 5 \times 10^{-3}$ m^2 e capacità termica trascurabile contiene 0.05 moli di un gas ideale monoatomico. Un pistone mobile, di massa trascurabile e privo di attriti, chiude il gas superiormente ad un'altezza $h_p < h_c$. Il pistone e le pareti del cilindro sono adiabatiche tranne la base inferiore, che poggia su una sbarra orizzontale di metallo di sezione costante e lunga $L = 3$ m. Ai due estremi, $x = 0$ e $x = L$, la sbarra è a contatto con due termostati rispettivamente a temperatura $T_0 = 450$ K e $T_L = 300$ K, in modo che la sua temperatura locale vari linearmente con la posizione x e sia costante nel tempo. Inizialmente il cilindro, con il gas all'equilibrio nello stato A, si trova appoggiato alla sbarra al suo estremo destro, $x_A = L$, e la sua pressione P_A è uguale alla pressione esterna che agisce sul pistone, $P_{\text{ext}} = 10^5$ Pa. La pressione esterna rimane costante durante tutte le trasformazioni.

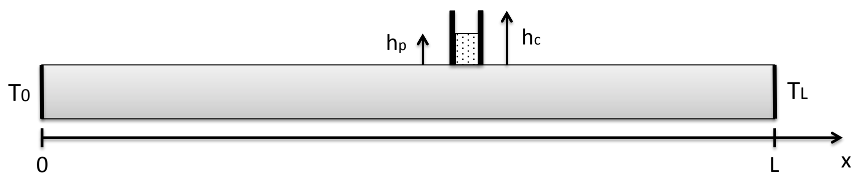
a) Improvvisamente il cilindro viene spostato nella posizione $x_B = 0.2L$. Si calcolino le coordinate termodinamiche del gas una volta raggiunto l'equilibrio B e di quanto è variata la quota del pistone h_p.

b) Si calcoli la variazione di entropia del gas e dell'universo nella trasformazione AB e si discuta il risultato.

c) Tra il pistone e il bordo superiore del cilindro, in direzione verticale, viene fissata una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m. Una volta collegata, la molla ha lunghezza $l_0 = h_c - h_p$ uguale alla sua lunghezza di riposo e il gas si trova nello stato di equilibrio B, come al punto precedente. Poi il cilindro viene portato molto lentamente nella posizione $x_C = 0.8L$, in modo che il gas compia una trasformazione reversibile. Determinare le coordinate termodinamiche del gas all'equilibrio in x_C.

d) Tracciare le trasformazioni AB e BC nel diagramma P-V e calcolare il lavoro compiuto dal gas durante la BC.

e) Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'universo nella trasformazione BC.



Soluzione esercizio I.1

a)
Il momento d'inerzia totale della ruota dentata rispetto al suo centro di massa è dato dalla somma dei momenti d'inerzia dei tre cilindri che compongono la ruota stessa:

$$\boxed{I_{CM} = 2\left(\frac{1}{2}M_1R^2\right) + \frac{1}{2}M_2r^2 = 3.06 \text{ kg m}^2} \tag{1}$$

dove $M_1 = \rho\pi hR^2 = 33.93$ kg e $M_2 = \rho\pi hr^2 = 2.41$ kg sono le masse dei cilindri. La massa totale della ruota è $M = 2M_1 + M_2 = 70.27$ kg.
Calcoliamo adesso il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il punto di contatto con la guida, I_O. Poiché il nuovo asse è parallelo al precedente, possiamo applicare il teorema di Steiner:

$$\boxed{I_O = I_{CM} + MR^2 = 9.38 \text{ kg m}^2} \tag{2}$$

b)
Si tratta di un problema di puro rotolamento. Per scrivere l'equazione del moto per la rotazione, $I\ddot{\theta} = \tau$, dobbiamo scegliere un polo e una convenzione sul segno degli angoli. Possiamo prendere come polo il punto di contatto con la guida, dato che il momento della forza esercitata dai denti e il momento della forza peso rispetto a tale punto sono entrambi nulli. Possiamo considerare angoli positivi per rotazioni orarie della ruota, corrispondenti a spostamenti positivi lungo x. In tal caso il momento delle forze è positivo quando punta verso l'interno del foglio nella figura che accompagna l'esercizio. Con queste convenzioni si ha

$$I_O\ddot{\theta} = (R - r)T_H \ . \tag{3}$$

Possiamo usare la condizione di rotolamento puro $dx = Rd\theta$, che lega lo spostamento orizzontale della ruota all'angolo. Possiamo anche definire la quantità $d\ell = rd\theta$, che corrisponde alla quantità di corda blu avvolta quando l'angolo varia di $d\theta$. Le due quantità dx e $d\ell$ sono direttamente proporzionali, in quanto $d\ell = (r/R)dx$, e si vede anche che se la ruota avanza la fune si arrotola, se indietreggia si srotola. Usando la variabile x, l'equazione di rotolamento diventa

$$I_O\ddot{x} = R(R - r)T_H \tag{4}$$

da cui

$$\ddot{x} = \frac{R(R - r)T_H}{I_O} = \text{costante} > 0\,. \tag{5}$$

Possiamo quindi affermare che la ruota avanza e che la parte blu della fune si avvolge sul cilindretto. Per determinare i valori di tali spostamenti, usiamo le leggi del moto uniformemente accelerato:

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{2}\frac{R(R-r)T_H}{I_O}\Delta t^2 = 2.81\ \mathrm{m}} \tag{6}$$

e di conseguenza

$$\boxed{\Delta \ell = \frac{r}{R}\Delta x = 0.75\ \mathrm{m}} \tag{7}$$

Volendo si può risolvere il problema anche usando come polo il centro di massa della ruota. In questo caso le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} I_{CM}\ddot{\theta} = -rT_H - RF \\ M\ddot{x} = T_H + F \end{cases} \tag{8}$$

dove F è la componente x della forza esercitata dai denti nel punto di appoggio della ruota. Usando la solita condizione di rotolamento puro, $\ddot{x} = R\ddot{\theta}$, ed eliminando F dalle due equazioni si ottiene

$$\ddot{x} = \frac{R(R-r)T_H}{I_{CM} + MR^2} = \frac{R(R-r)T_H}{I_O}\ , \tag{9}$$

che è la stessa accelerazione trovata precedentemente. I due procedimenti sono quindi del tutto equivalenti.

c)

La discussione è del tutto analoga al caso precedente ma, cambiando la direzione della trazione, cambia anche il segno del momento. Sempre lavorando rispetto al punto di contatto con la guida e prendendo come positive le rotazioni orarie, abbiamo che

$$I_O\ddot{\theta} = -rT_V\ . \tag{10}$$

Possiamo ancora scrivere $d\ell = rd\theta$ e $dx = Rd\theta$, con lo stesso significato di prima. L'equazione di rotolamento diventa

$$I_O\ddot{x} = -rRT_V \tag{11}$$

e quindi

$$\ddot{x} = -\frac{rRT_V}{I_O} = \text{costante} < 0\ . \tag{12}$$

In questo caso l'accelerazione è negativa e quindi la ruota indietreggia e la fune rossa si srotola. Per determinare i valori di tali spostamenti, usiamo ancora le leggi del moto uniformemente accelerato:

$$\boxed{\Delta x = -\frac{1}{2}\frac{rRT_V}{I_O}\Delta t^2 = -2.05\ \mathrm{m}} \tag{13}$$

e di conseguenza

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{r}{R}\Delta x = -0.55 \text{ m}} \tag{14}$$

Naturalmente il problema potrebbe essere risolto anche rispetto al centro di massa, seguendo le stesse indicazioni del punto precedente, e il risultato sarebbe lo stesso.

d)
Se usiamo il punto O come polo si vede facilmente che, essendo nulli per costruzione i momenti della forza peso e della forza esercitata dai denti, l'unico modo per evitare rotazioni consiste nell'annullare anche il momento della forza di trazione della corda. Questo si ottiene disponendo la corda ad un angolo tale da rendere la trazione radiale rispetto ad O, ovvero, in altri termini, allineando la corda alla retta che passa per O e per il punto di distacco della corda dal cilindretto su cui è avvolta. La condizione da soddisfare è quindi $R\cos\alpha = r$, da cui

$$\boxed{\alpha = \arccos\frac{r}{R} = 1.3 \text{ rad} = 74.5^\circ} \,. \tag{15}$$

Come si vede, questo risultato non dipende dal valore di $|T|$. Tuttavia, quando la componente verticale della tensione supera il valore della forza peso, la ruota dentata si solleva. Occorre quindi soddisfare la condizione $|T|\sin\alpha < Mg$, quindi

$$\boxed{|T| < \frac{Mg}{\sin\alpha} = 726.5 \text{ N}} \tag{16}$$

Se questa condizione è rispettata, l'ingranaggio non si muove rispetto alla guida; altrimenti viene sollevato dalla trazione della corda.

e)
Si tratta di un problema di urto elastico tra una particella puntiforme e un corpo rigido. Nell'istante dell'urto la ruota è vincolata dai denti, dove si esercita una forza impulsiva che impedisce lo scivolamento. Di conseguenza, la quantità di moto totale del sistema non si conserva. Invece, si conserva l'energia cinetica, per ipotesi, e il momento angolare rispetto al punto di appoggio 0, dov'è applicata l'unica forza esterna impulsiva. Chiamata v la velocità del proiettile dopo l'urto e ω la velocità angolare della ruota (che è la stessa sia rispetto a O che rispetto al CM), le due equazioni di conservazione sono

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{17}$$
$$mv_0R = mvR + I_O\omega \,. \tag{18}$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
v_0^2 - v^2 &= \frac{I_O}{m}\,\omega^2 && (19)\\
v_0 - v &= \frac{I_O}{mR}\,\omega\ . && (20)
\end{aligned}
$$

Scrivendo il membro di sinistra della prima equazione come $(v_0+v)(v_0-v)$ e prendendo il rapporto delle due, si trova $v_0+v = R\omega$, che sostituito nella seconda, porta al risultato

$$\omega = \frac{2v_0/R}{1+\frac{I_O}{mR^2}}\ . \tag{21}$$

Ora basta applicare la condizione di rotolamento puro $v_r = R\omega$ per trovare la velocità di traslazione della ruota dopo l'urto:

$$\boxed{v_r = \frac{2v_0}{1+\frac{I_O}{mR^2}} = 0.38\ \text{m/s}}\ . \tag{22}$$

Soluzione esercizio I.2

a)

La particella di massa m è vincolata a muoversi sulla guida circolare di raggio R. Quindi per descriverne il moto è sufficiente considerare una sola coordinata, che può essere l'angolo α oppure il corrispondente arco $s = R\alpha$. L'equazione del moto nella direzione tangenziale conterrà le componenti tangenziali della forza peso e della forza elastica. La prima è verticale e la sua componente tangenziale è $mg\sin\alpha$; la seconda ha modulo $k\Delta\ell = kR\sin\alpha$, è orizzontale, e la sua componente tangenziale è $-kR\sin\alpha\cos\alpha$. Dunque l'equazione del moto è

$$\boxed{mR\ddot{\alpha} = -kR\sin\alpha\cos\alpha + mg\sin\alpha}\ . \tag{23}$$

L'equilibrio si ha quando l'accelerazione angolare è nulla, e dunque

$$\sin\alpha(kR\cos\alpha - mg) = 0\ . \tag{24}$$

Nell'intervallo $[0,2\pi)$ due soluzioni si ottengono annullando il seno:

$$\sin\alpha = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi}\,; \tag{25}$$

altre due annullando la differenza in parentesi

$$\cos\alpha = \frac{mg}{kR} = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\alpha_3 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{5\pi}{3}}\,, \tag{26}$$

dove il valore 1/2 si ottiene utilizzando i valori numerici assegnati per m, k e R, e il valore $g = 9.8$ m/s^2.

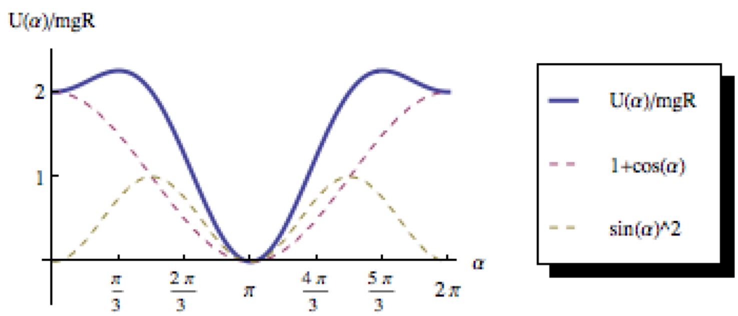
b)
L'energia potenziale della particella è la somma dell'energia potenziale associata alla forza peso e quella associata alla forza elastica, entrambe conservative. Al variare di α l'energia potenziale ha il seguente andamento

$$U(\alpha) = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}kR^2 \sin^2\alpha \; . \tag{27}$$

E' facile disegnare il grafico se si nota che, come detto sopra, con i valori assegnati si ha $kR = 2mg$, che implica $mgR = (1/2)kR^2$, e quindi la funzione $U(\alpha)$ può essere riscritta come

$$\boxed{U(\alpha) = mgR\ (1 + \cos\alpha + \sin^2\alpha)} \; . \tag{28}$$

Dunque, a meno di un fattore moltiplicativo costante, si tratta di una funzione coseno traslata in alto di uno e sommata alla funzione seno al quadrato. E' una funzione con un minimo principale in $\alpha_2 = \pi$, due minimi laterali in $\alpha_1 = 0$ e in $\alpha = 2\pi$, e due massimi in $\alpha_3 = \pi/3$ e $\alpha_4 = 5\pi/3$.



Per determinare analiticamente la stabilità delle posizioni di equilibrio possiamo studiare il segno della sua derivata seconda:

$$U' = -mgR\sin\alpha + kR^2\cos\alpha\sin\alpha \tag{29}$$

$$U'' = -mgR\cos\alpha + kR^2(2\cos^2\alpha - 1) \tag{30}$$

e sostituendo i valori α_i dei punti di equilibrio trovati in precedenza, otteniamo

$$U''(\alpha_1) > 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha_1 \ \text{stabile} \tag{31}$$

$$U''(\alpha_2) > 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha_2 \ \text{stabile} \tag{32}$$

$$U''(\alpha_3) < 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha_3 \ \text{instabile} \tag{33}$$

$$U''(\alpha_4) < 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha_4 \ \text{instabile} \tag{34}$$

c)
Nel punto precedente abbiamo visto che i punti di equilibrio stabile sono quelli in corrispondenza degli angoli $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \pi$; quindi determiniamo i periodi per piccole oscillazioni attorno ad essi. Per α_1 è sufficiente sviluppare al primo ordine $\sin\alpha \sim \alpha$ e $\cos\alpha \sim 1$ nell'equazione del moto (23)

$$mR\ddot{\alpha} = -(kR - mg)\alpha \quad \longrightarrow \quad \ddot{\alpha} = -\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right)\alpha \tag{35}$$

da cui è semplice ricavare la pulsazione e il periodo per piccole oscillazioni

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{R}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{kR - mg}} = 1.27 \text{ s}}\,. \tag{36}$$

Per piccole oscillazioni attorno a $\alpha_2 = \pi$, invece, conviene considerare $\beta = \alpha + \pi$ e sviluppare seno e coseno attorno a $\beta = 0$

$$mR\ddot{\beta} = -mg\sin\beta - kR\sin\beta\cos\beta, \tag{37}$$

da cui

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{R}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{kR + mg}} = 0.73 \text{ s}}\,. \tag{38}$$

Notiamo che, essendo $kR = 2mg$, il rapporto dei due periodi è $\sqrt{3}$.

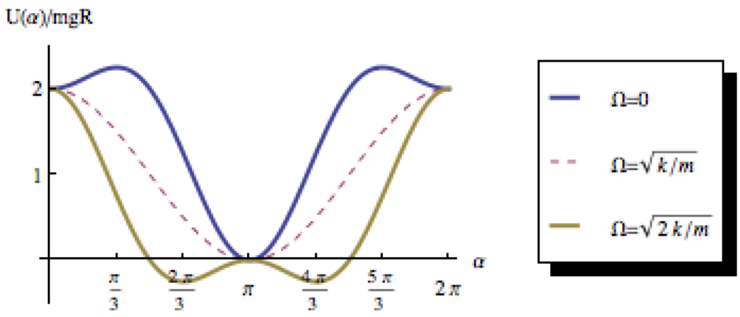
d)
Se mettiamo l'intero sistema in rotazione attorno all'asse z possiamo usare il sistema di riferimento rotante e aggiungere nell'equazione del moto il termine di forza centrifuga, proporzionale a Ω^2 e alla distanza dall'asse di rotazione $R\sin\alpha$. Tale forza apparente agisce in maniera opposta alla molla e la nuova equazione del moto lungo la guida risulta essere

$$mR\ddot{\alpha} = -kR\sin\alpha\cos\alpha + m\Omega^2 R\sin\alpha\cos\alpha + mg\sin\alpha \tag{39}$$

ovvero

$$\boxed{mR\ddot{\alpha} = -(k - m\Omega^2)R\sin\alpha\cos\alpha + mg\sin\alpha}\,. \tag{40}$$

La situazione è formalmente identica a quella nel caso senza rotazioni, tranne per il fatto che il termine elastico ora contiene una costante elastica efficace, $k - m\Omega^2$, che dipende da Ω e può anche cambiare di segno. Il sistema è equivalente ad una guida ferma, non in rotazione, ma con la particella soggetta ad una molla in più, che tira (o spinge) nel verso opposto a quella esistente, con costante elastica $m\Omega^2$. L'energia potenziale efficace che, oltre all'energia potenziale associata al peso e alla forza elastica, comprende anche



il termine $-(1/2)m\Omega^2R^2\sin^2\alpha$ associato alla forza centrifuga, può essere scritta nella forma

$$U(\alpha) = mgR(1+\cos\alpha) + \frac{1}{2}(k - m\Omega^2)R^2\sin^2\alpha\ , \tag{41}$$

e ricordando ancora che $mgR = (1/2)kR^2$, possiamo scrivere

$$\boxed{U(\alpha) = mgR\left[1+\cos\alpha + \left(1 - \frac{m\Omega^2}{k}\right)\sin^2\alpha\right]}\ . \tag{42}$$

Il caso $\Omega = 0$ è già stato trattato nei punti precedenti. Nel caso $\Omega = \sqrt{k/m}$, la costante elastica efficace si annulla e il sistema diventa equivalente ad un pendolo semplice, dove nell'equazione del moto e nell'energia entra solo la forza peso, e l'energia potenziale efficace ha la forma della funzione $1+\cos\alpha$, con il minimo nel punto più basso della guida. Infine nel caso $\Omega = \sqrt{2k/m}$, la costante elastica efficace diventa $-k$ e tutto va come se ci fosse una molla fittizia, di costante elastica k, che però imprime una forza uguale in modulo ma di verso opposto a quella reale, spingendo la particella verso l'esterno della guida circolare invece che verso l'interno. In tal caso l'equazione del moto diventa

$$mR\ddot{\alpha} = (kR\cos\alpha + mg)\sin\alpha \tag{43}$$

e l'energia potenziale efficace è

$$U(\alpha) = mgR(1+\cos\alpha - \sin^2\alpha)\ . \tag{44}$$

Quest'ultima differisce da quella discussa al punto b) solo per il segno davanti al $\sin^2\alpha$. Le due curve hanno lo stesso valore in $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$, dove $\sin^2\alpha$ è nullo, ma stavolta, invece di avere due massimi in $\alpha = \pi/3$ e $(5/3)\pi$, la curva ha due minimi in $\alpha = (2/3)\pi$ e $(4/3)\pi$. Infatti, imponendo $\ddot{\alpha} = 0$ nell'equazione del moto, si ottiene la condizione

$$\cos\alpha = -\frac{mg}{kR} = -\frac{1}{2} \tag{45}$$

che ha soluzioni appunto in $\alpha = (2/3)\pi$ e $\alpha = (4/3)\pi$. L'andamento di U nei tre casi è mostrato in figura.

e)
Per rispondere alla domanda conviene usare la conservazione dell'energia meccanica che, nel sistema di riferimento in rotazione, è la somma dell'energia cinetica tangenziale e l'energia potenziale efficace:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{tan}}^2 + U(\alpha)\ . \tag{46}$$

L'espressione di $U(\alpha)$ è quella calcolata al punto precedente, nell'equazione (44). All'istante iniziale abbiamo $v_{\text{tan}} = v_0$ e $\alpha = (2/3)\pi$. All'istante finale vogliamo avere $v_{\text{tan}} = 0$ e $\alpha = \pi$ oppure $\alpha = 0$ rispettivamente per il punto più in basso della guida e quello più in alto. Nel primo caso, la conservazione dell'energia ci dà

$$v_0 = \sqrt{(2/m)[U(\pi) - U((2/3)\pi)]}\ . \tag{47}$$

Inoltre si ha $U(\pi) = 0$ e $U((2/3)\pi) = -(1/4)mgR$ e dunque

$$\boxed{v_0 = \sqrt{gR/2} = 1.4 \text{ m/s}}\ . \tag{48}$$

Nel secondo caso, basta ripetere il calcolo sostituendo l'angolo π con 0, sapendo che $U(0) = 2mgR$, e si ottiene

$$\boxed{v_0 = \sqrt{9gR/2} = 4.2 \text{ m/s}}\ . \tag{49}$$

Soluzione esercizio II.1

a)
Il volume iniziale del gas nello stato iniziale A è $V_A = 2V_0 = 10^{-2}$ m^3, mentre la sua temperatura è $T_A = 300$ K e la pressione è $P_A = 10^5$ Pa. Da questi valori, tramite l'equazione dei gas perfetti, ricaviamo il numero di moli: $n = P_A V_A / RT_A = 0.4$ mol.
Veniamo adesso allo stato B. Poiché le pareti sono isolanti, la trasformazione è adiabatica e quindi il prodotto PV^γ rimane costante (dove $\gamma = 5/3$, poiché il gas è monotomico); inoltre il numero di moli non cambia e il volume, per ipotesi, si dimezza. Abbiamo quindi che

$$\boxed{V_B = \frac{V_A}{2} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \tag{50}$$

$$\boxed{P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = P_A 2^\gamma = 3.175 \times 10^5 \ \text{ Pa}} \tag{51}$$

$$\boxed{T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 2^{\gamma-1} T_A = 477.3 \text{ K}}\,. \tag{52}$$

Per conoscere la forza aggiuntiva F_B che bisogna applicare al pistone per mantenere il gas nello stato B, basta sottrarre alla pressione P_B la pressione atmosferica e moltiplicare il risultato per la sezione del recipiente:

$$\boxed{F_B = S(P_B - P_A) = 3480 \text{ N}}\,. \tag{53}$$

b)

Poiché l'espansione BC è libera, il calore scambiato e il lavoro fatto dal gas sono nulli, così come la variazione di energia interna (quest'ultima per il primo principio, $\Delta U = Q - W$). Trattandosi di un gas ideale, in cui U dipende solo da T, se ne deduce che la temperatura resta invariata, $T_C = T_B$. Invece il volume occupato dal gas raddoppia, e ritorna al valore iniziale V_A. Abbiamo quindi

$$\boxed{V_C = V_B + V_{II} = V_A = 10^{-2} \text{ m}^3} \tag{54}$$

$$\boxed{T_C = T_B = 477.3 \text{ K}} \tag{55}$$

$$\boxed{P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{V_B}{V_C} P_B = \frac{1}{2} P_B = 1.587 \times 10^5 \text{ Pa}} \tag{56}$$

c)

Nello scambio termico tra i due gas, il gas monoatomico è inizialmente più caldo e cede un calore Q al gas biatomico che sta nella camera I, il tutto a volumi costanti. Non essendoci altri scambi di calore in gioco, possiamo scrivere

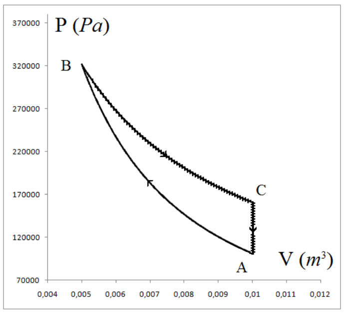
$$n c_v^{(1)} (T_A - T_C) = -n_2 c_v^{(2)} (T_A - T_0) \tag{57}$$

Dove $c_v^{(1)} = (3/2)R$ e $c_v^{(2)} = (5/2)R$ sono i calori specifici a volume costante per un gas monoatomico e biatomico rispettivamente e $n_2 = 2$ sono le moli del gas in I. Risolvendo l'equazione algebrica, abbiamo che

$$\boxed{T_0 = T_A - \frac{n c_v^{(1)}}{n_2 c_v^{(2)}} (T_C - T_A) = T_A - \frac{3}{5} \frac{n}{n_2} (T_C - T_A) = 278.7 \text{ K}} \tag{58}$$

d)

Il diagramma P-V del ciclo è riportato in figura. Le trasformazioni BC e CA sono irreversibili, la prima essendo un'espansione libera, la seconda a causa dell'irreversibilità termica dovuta alla differenza finita di temperatura tra i gas a contatto termico. Calcoliamo ora calore scambiato e lavoro effettuato nei tre rami del ciclo.



Trasformazione A⟶B
Il calore scambiato Q_{AB} è nullo, poiché la trasformazione è adiabatica. Il lavoro effettuato dal gas nella compressione (negativo) potrebbe essere calcolato integrando PdV, ma è più semplice partire dal primo principio che, in questo caso, ci dà $W_{AB} = -\Delta U_{AB}$ e quindi

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v^{(1)}(T_B - T_A) = -883 \text{ J}} \, . \tag{59}$$

Trasformazione B⟶C
Poiché si tratta di un'espansione libera, sia il calore cambiato Q_{BC} che il lavoro fatto W_{BC} sono nulli.
Trasformazione C⟶A
Poiché la trasformazione è isocora, il lavoro fatto W_{CA} è nullo. Il calore scambiato ceduto dal gas monoatomico invece è

$$\boxed{Q_{CA} = nc_v^{(1)}(T_A - T_C) = nc_v^{(1)}(T_A - T_B) = -883 \text{ J}} \, . \tag{60}$$

In conclusione, il gas monoatomico compie un ciclo in cui tutto il lavoro eseguito dall'ambiente sul gas stesso viene convertito in calore, che viene ceduto ad un unico serbatoio costituito dal gas biatomico. Il risultato è compatibile con il primo principio (lavoro e calore sono uguali) e anche con il secondo principio (nessuno dei due enunciati è violato). Visto che il lavoro viene interamente dissipato, il ciclo non rappresenta una macchina termica e non ha senso definirne il rendimento.

e)
La trasformazione BC è una adiabatica libera. Dall'espressione dell'entropia di un gas ideale, $S = nc_v \ln T + nR \ln V +$ costante, e tenuto conto che T è lo stesso all'inizio e alla fine dell'espansione, si ottiene

$$\boxed{\Delta S_{BC}^{(1)} = nR \ln \frac{V_C}{V_B} = nR \ln 2 = 2.305 \text{ J/K}} \, . \tag{61}$$

Analogamente possiamo calcolare le variazioni di entropia di entrambi i gas, monoatomico e biatomico, durante il reciproco scambio di calore nella trasformazione CA a volumi costanti:

$$\Delta S_{CA}^{(1)} = nc_v^{(1)} \ln \frac{T_A}{T_C} = -2.316 \text{ J/K} \tag{62}$$

e

$$\Delta S_{CA}^{(2)} = n_2 c_v^{(2)} \ln \frac{T_A}{T_0} = 3.061 \text{ J/K} . \tag{63}$$

Discutiamo adesso la variazione di entropia dell'universo lungo i tre rami. Nella trasformazione AB abbiamo $\Delta S_{AB}^{uni} = 0$, poiché la trasformazione è reversibile. Nell'espansione libera adiabatica BC abbiamo $\Delta S_{BC}^{uni} = \Delta S_{BC}^{(1)}$, poiché il recipiente è isolato. Infine, nella trasformazione CA abbiamo $\Delta S_{CA}^{uni} = \Delta S_{CA}^{(1)} + \Delta S_{CA}^{(2)}$. Mettendo assieme il tutto si ottiene

$$\boxed{\Delta S^{uni} = \Delta S_{AB}^{uni} + \Delta S_{BC}^{uni} + \Delta S_{CA}^{uni} = 3.05 \text{ J/K}} . \tag{64}$$

Soluzione esercizio II.2

a)

La temperatura della sbarra, come riportato dal testo, varia linearmente con la posizione ed è indipendente dal tempo. Possiamo quindi scrivere la funzione che esprime la temperatura della sbarra in funzione della coordinata x nella forma

$$T(x) = T_0 - (T_0 - T_L)\frac{x}{L} . \tag{65}$$

In base al testo del problema possiamo sempre considerare che, se il cilindro si trova a contatto con la sbarra nella posizione x, la temperatura del gas nel cilindro sarà $T(x)$. Nello stato iniziale A, in cui $x_A = L$, la temperatura è $T = T_L = 300$ K. Dato che $P_A = 10^5$ Pa, possiamo calcolare il volume dall'equazione di stato

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 1.247 \times 10^{-3} \text{ m}^3 . \tag{66}$$

Dello stato B conosciamo già la pressione $P_B = P_A = 10^5$ Pa e possiamo calcolare la temperatura, che viene determinata dalla sbarra,

$$\boxed{T_B = T(x_B) = 420 \text{ K}} . \tag{67}$$

Per ricavare il volume nello stato B è basta usare nuovamente l'equazione di stato del gas ideale:

$$\boxed{V_B = \frac{nRT_B}{P_B} = 1.746 \times 10^{-3} \text{ m}^3} . \tag{68}$$

La variazione di quota è data da

$$\boxed{\Delta h_p^{AB} = \frac{V_B - V_A}{S} = \frac{nR}{SP_A}(T_B - T_A) = 10 \text{ cm}}\ , \tag{69}$$

e la quota a cui si trova il pistone nello stato B è $h_p = V_B/S = 35$ cm.

b)

Il gas compie una trasformazione irreversibile con pressione iniziale e finale invariata. Possiamo usare l'espressione per l'entropia di un gas ideale nella forma $S = nc_p \ln T - nR \ln P +$ costante, per ricavare il risultato

$$\boxed{\Delta S_{AB}^{\text{gas}} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} = 0.350 \text{ J/K}}\ . \tag{70}$$

Dato che il cilindro viene spostato rapidamente da x_A a x_B, possiamo considerare che lo scambio di calore tra la sbarra e il gas nel cilindro avvenga dopo lo spostamento, quindi nel punto in cui la sbarra si trova a $T(x_B) = 420$ K. Il calore ceduto dalla sbarra al gas è uguale al calore assorbito dal gas, quindi

$$\Delta S_{AB}^{\text{sbarra}} = \frac{Q_{AB}^{\text{sbarra}}}{T_B} = -\frac{Q_{AB}^{\text{gas}}}{T_B} = -\frac{nc_p(T_B - T_A)}{T_B} = -0.297 \text{ J/K}\ . \tag{71}$$

La variazione di entropia dell'universo è la somma del contributo del gas e della sbarra

$$\boxed{\Delta S_{AB}^{\text{uni}} = \Delta S_{AB}^{\text{gas}} + \Delta S_{AB}^{\text{sbarra}} = 0.053 \text{ J/K}}\ . \tag{72}$$

Il risultato è positivo, come ci aspettavamo, visto che la trasformazione è irreversibile.

c)

La presenza della molla fa sì che la trasformazione BC non sia isobara perché la forza elastica applicata alla superficie del pistone dà un contributo aggiuntivo alla pressione, che si somma alla pressione esterna costante. Possiamo subito calcolare la temperatura finale che è $T_C = T(x_C) = 330$ K. Dunque il gas si raffredda e il volume di conseguenza diminuisce. Notiamo che la variazione di quota del pistone Δh_p^{BC} è uguale ed opposta all'elongazione della molla (indichiamo questa come $\Delta l = -\Delta h_p^{BC}$, positiva se il pistone scende). Lo spostamento del pistone quindi ha un effetto sia sul volume,

$$V_C = V_B - S\Delta l\ , \tag{73}$$

che sulla pressione:

$$P_C = P_{\text{ext}} - \frac{k\Delta l}{S}\ . \tag{74}$$

L'equazione di stato ci dice che il prodotto di queste due espressioni deve dare nRT_C. Ne risulta un'equazione di secondo grado per l'incognita Δl

$$k\Delta l^2 - \left(P_{\text{ext}}S + \frac{kV_B}{S}\right)\Delta l + P_{\text{ext}}V_B = nRT_C \ , \tag{75}$$

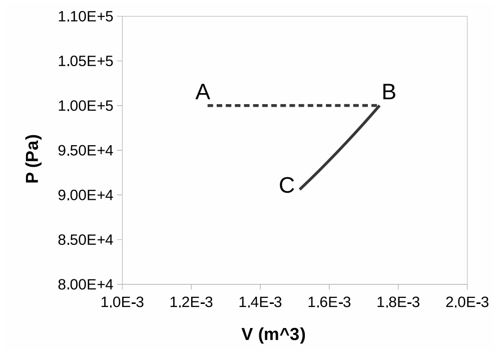
che risolta fornisce il valore $\Delta l = 4.66$ cm. Da questo, usando le espressioni (73) e (74), segue che

$$\boxed{V_C = 1.51 \times 10^{-3}\ \text{m}^3, \quad P_C = 0.907 \times 10^5\ \text{Pa}}\ . \tag{76}$$

d)

Possiamo tracciare il diagramma P-V utilizzando le coordinate termodinamiche degli stati A, B, C. La trasformazione AB è irreversibile, con gli stati iniziali e finali alla stessa pressione. La trasformazione BC è reversibile. Usando le equazioni (73) e (74) possiamo notare che

$$\frac{dP}{dV} = \frac{\partial P}{\partial \Delta l}\frac{d\Delta l}{dV} = \frac{k}{S^2} = \text{cost} \tag{77}$$



e dunque la trasformazione BC sarà rappresentata da un segmento rettilineo. Possiamo calcolare il lavoro W_{BC} compiuto dal gas nella trasformazione BC come l'area del parallelogramma sottostante al segmento, presa con segno negativo, essendo una compressione:

$$\boxed{W_{BC} = \int_B^C PdV = -\frac{1}{2}(V_B - V_C)(P_B + P_C) = -21.6\ \text{J}.} \tag{78}$$

e)

Dato che l'entropia è una funzione di stato, possiamo calcolare la variazione di entropia del gas conoscendo lo stato iniziale (B) e finale (C):

$$\boxed{\Delta S_{BC}^{\text{gas}} = nc_v \ln\frac{T_C}{T_B} + nR\ln\frac{V_C}{V_B} = -0.211\ \text{J/K}}\ . \tag{79}$$

Inoltre sappiamo dal testo del problema che la trasformazione BC è reversibile, per cui

$$\boxed{\Delta S_{BC}^{\text{uni}} = 0\ \text{J/K}}\ . \tag{80}$$