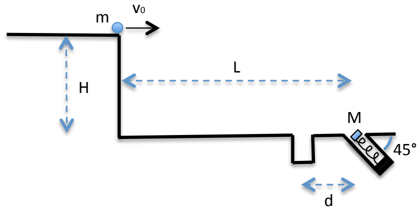
Fisica Generale I
A.A. 2015-2016, 22 giugno 2016

Esercizio I.1

Un pompiere di massa m =80 kg viene calato su un bosco da un elicottero per mezzo di una fune di massa trascurabile e lunghezza $l_1 = 60$ m. L'elicottero si ferma a mezz'aria e, a seguito di tale manovra, il pompiere inizia a ruotare su un'orbita circolare attorno alla verticale, mantenendo un angolo costante tra la fune tesa e la verticale pari a $\alpha_1 = 15°$.
a) Determinare la velocità angolare ω_1 di rotazione e la forza $\mathbf{F}(t)$ che l'argano dell'elicottero deve applicare per tenere in tensione la fune (esplicitare le componenti del vettore in funzione del tempo rispetto ad un sistema di riferimento solidale col bosco).
b) L'elicottero rimane fermo, ma la fune viene lentamente tirata su dall'argano (privo di attrito) fino ad arrestarsi ad una lunghezza l_2. Al termine della manovra il pompiere si trova in rotazione su una nuova orbita circolare e l'angolo formato dalla fune rispetto alla verticale è $\alpha_2 = 30°$. Determinare l_2 e la nuova velocità angolare ω_2 trascurando l'attrito della fune e del pompiere con l'aria.
c) Si determini la variazione di energia potenziale e di energia cinetica del pompiere, dovuta al passaggio tra la prima e la seconda configurazione, espressa in un sistema di riferimento inerziale. Qual è il lavoro W_a fatto dall'argano?
d) Supponiamo adesso che l'elicottero si muova con un'accelerazione orizzontale $a = g/2$. A causa dell'accelerazione orizzontale, la normale al piano contenente l'orbita circolare forma un angolo β con la verticale. Come nel punto a) la lunghezza della fune è l_1 e l'angolo tra la fune e l'asse normale alla traiettoria circolare è α_1. Determinare il valore di β e la velocità angolare ω_3 che permette l'equilibrio in tale configurazione.
e) Calcolare ω_1 come al punto a) ma approssimando la fune con un'asta rigida omogenea di massa $m_f = 20$ kg.

Esercizio I.2



In figura è mostrata una buca del minigolf. La pallina di massa $m = 200$ g viene lanciata orizzontalmente dal bordo di un muretto a quota $H = 1$ m e deve rimbalzare su un dischetto che si trova a distanza $L = 2H$ dal muro. Il dischetto ha massa $M = 400$ g e può muoversi lungo una guida inclinata di 45° rispetto alla verticale, sorretto da una molla di costante elastica $k = 10^2$ N/m. La pallina cade sul dischetto e, rimbalzando, va a finire esattamente in buca. L'urto avviene in un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo caratteristico di oscillazione della molla. A seguito dell'urto anelastico tra la pallina ed il dischetto, l'energia cinetica dei due corpi rispetto ad un sistema di riferimento solidale col pavimento dopo l'urto risulta attenuata di un fattore f =30% rispetto a quella posseduta prima dell'urto. Si trascurino le dimensioni fisiche della pallina, del dischetto e della buca.

a) Calcolare il modulo della velocità v_0 impressa dal giocatore per colpire direttamente il dischetto e la velocità $\mathbf{v_1}$ posseduta dalla pallina al momento dell'urto col dischetto.

b) Si determini la velocità del dischetto $\mathbf{V}$ e quella della pallina $\mathbf{v_2}$, subito dopo l'urto.

c) Si determini la distanza d dal dischetto a cui deve trovarsi la buca e la quota massima raggiunta dopo il rimbalzo h.

d) Si scriva l'equazione del moto del dischetto lungo la guida determinando il valore del periodo T e dell'ampiezza Δl di oscillazione.

e) Come cambierebbero la velocità del dischetto $\mathbf{V}$ e il periodo di oscillazione T se la pallina, invece di rimbalzare, rimanesse attaccata al dischetto?

Esercizio II.1

Una mole di gas ideale monoatomico è contenuta in un cilindro con pareti conduttrici di calore, chiuso da un pistone mobile di massa trascurabile e privo di attriti. Il gas si trova nello stato di equilibrio A alla temperatura $T_1 = 300$ K e con pressione pari quella esterna, $P_{\text{ext}} = 10^5$ Pa. Poi, vengono eseguite le seguenti trasformazioni: i) il gas viene riscaldato reversibilmente e a pressione costante fino a raggiungere lo stato di equilibrio B a temperatura $T_2 = 400$ K; ii) agendo sul pistone con una forza esterna aggiuntiva, il gas viene espanso reversibilmente fino allo stato C di volume $V_C = 0.05$ m^3, rimanendo a contatto con un termostato a temperatura T_2; iii) improvvisamente il termostato a temperatura T_2 viene sostituito da quello con temperatura T_1 e si lascia che il gas si raffreddi con il pistone bloccato, fino a raggiungere lo stato di equilibrio D; iv) infine, mantenendo il gas a contatto con il termostato T_1, il pistone viene lentamente rilasciato fino a che il gas torna in modo reversibile allo stato iniziale A.

a) Calcolare le coordinate termodinamiche dei punti A, B, C, D e tracciare il diagramma P-V del ciclo.

b) Calcolare il lavoro compiuto dal gas nelle varie trasformazioni.

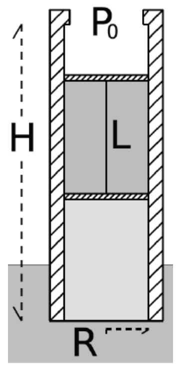
c) Calcolare il calore scambiato dal gas nelle varie trasformazioni.

d) Calcolare il rendimento η del ciclo e confrontarlo con quello di una macchina di Carnot ideale che lavori soltanto con i due termostati alle temperature T_1 e T_2.

e) Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'ambiente nelle trasformazioni B–C e C–D e discutere il risultato.

Esercizio II.2

Un cilindro con le pareti laterali termicamente isolanti, aperto superiormente e con la base inferiore chiusa da una parete sottile conduttrice di calore, è parzialmente immerso in un bagno di mercurio che agisce come serbatoio di calore, come in figura. La base del cilindro ha un raggio interno pari a $R = 15$ cm. Il cilindro contiene due pistoni sottili, termicamente isolanti, di massa trascurabile e privi di attrito, collegati tra loro da una fune inestensibile di lunghezza $L = 40$ cm e massa trascurabile. Lo spazio tra i due pistoni è riempito da una mole di gas ideale biatomico. Lo spazio inferiore invece è riempito da due moli di gas ideale monoatomico. Il cilindro è dotato di un blocco di fine corsa posto ad un'altezza $H = 1.2$ m dalla base.



a) All'inizio tutto si trova all'equilibrio, la pressione esterna è $P_0 = 10^5$ Pa, la pressione del gas tra i due pistoni è $P_{1A} = 1.1P_0$, e il gas nella parte inferiore si trova all'equilibrio termico con il mercurio a temperatura $T_0 = 290$ K. Si calcoli la temperatura T_{1A} del gas tra i pistoni. Si scrivano le condizioni per l'equilibrio meccanico dei pistoni e si calcoli la pressione P_{2A} e il volume V_{2A} del gas nella parte inferiore.

b) Da un certo istante in poi il mercurio viene riscaldato molto lentamente. In tal modo anche il gas inferiore si riscalda eseguendo una trasformazione quasistatica e i due pistoni si alzano fino a che il pistone superiore raggiunge il blocco di fine corsa (stato B). Calcolare le variazioni di entropia ΔS_1 e ΔS_2 dei due gas nella trasformazione A–B ed il calore Q_2 assorbito dal gas inferiore nella stessa trasformazione.

c) Il riscaldamento del bagno di mercurio prosegue lentamente finché la pressione del gas tra i due pistoni raggiunge il valore finale $P_{1C} = 1.3P_0$ (stato C). Determinare le coordinate termodinamiche (P, V, T) dei due gas in questo stato.

d) Determinare il lavoro W_1 compiuto dal gas tra i due pistoni nella trasformazione B–C.

Soluzione esercizio I.1

a) La rotazione del pompiere attorno all'asse verticale è trattabile come un pendolo conico con massa puntiforme. Conviene mettersi nel sistema di riferimento in rotazione con il pompiere, in modo da ridurre il problema al calcolo delle condizioni di equilibrio statico per una particella soggetta alla forza peso, la tensione della fune e la forza centrifuga: la risultante delle forze deve essere nulla. Scomponendo nelle direzioni orizzontale e verticale, si ottiene

$$\begin{cases} T \sin \alpha_1 = m\omega_1^2 l_1 \sin \alpha_1 \\ T \cos \alpha_1 = mg \end{cases}$$

dove la prima equazione eguaglia la componente orizzontale della tensione T con la forza centrifuga e la seconda eguaglia la componente verticale della tensione con la forza peso del pompiere. Prendendo il rapporto tra la prima e la seconda, otteniamo

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1 \cos \alpha_1} \tag{1}$$

e quindi

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1 \cos \alpha_1}} = 0.41 \ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} \ .$$

La forza $\mathbf{F}(t)$ che l'argano dell'elicottero deve applicare è in modulo uguale alla tensione della fune

$$|\mathbf{F}(t)| = |\mathbf{T}(t)| = m\omega_1^2 l_1 = 812 \ N.$$

Dato che il pompiere compie un moto circolare uniforme nel sistema di riferimento inerziale, la componente del vettore $\mathbf{F}(t)$ nel piano orizzontale ruoterà con velocità angolare ω_1, mentre la componente lungo l'asse verticale rimarrà costante, quindi

$$\boxed{\begin{cases} F_x(t) = m\omega_1^2 l_1 \sin \alpha_1 \cos \omega_1 t = mg \tan \alpha_1 \cos \omega_1 t \\ F_y(t) = m\omega_1^2 l_1 \sin \alpha_1 \sin \omega_1 t = mg \tan \alpha_1 \sin \omega_1 t \\ F_z(t) = mg \end{cases}}$$

b) Nella nuova orbita circolare le condizioni per l'equilibrio sono le stesse di prima, tranne per il cambiamento della lunghezza della corda e dell'angolo. Dunque abbiamo

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l_2 \cos \alpha_2} \ . \tag{2}$$

Le incognite sono due e ci serve un'altra equazione. A tale scopo si può considerare il comportamento del momento angolare. In particolare, preso l'argano come polo, la componente z del momento angolare del pompiere nel sistema di riferimento inerziale è costante durante la manovra. Infatti $dL_z/dt = \tau_z$, ma la forza peso, essendo verticale, produce un momento in direzione orizzontale, mentre la tensione della fune ha momento nullo. Dunque L_z è lo stesso per l'orbita iniziale e quella finale:

$$m\omega_1 l_1^2 \sin^2 \alpha_1 = m\omega_2 l_2^2 \sin^2 \alpha_2 \ .$$

Usando le (1) e (2) otteniamo

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{l_2 \cos \alpha_2}{l_1 \cos \alpha_1} = \frac{l_2^4 \sin^4 \alpha_2}{l_1^4 \sin^4 \alpha_1} \ ,$$

da cui

$$l_2^3 = l_1^3 \left(\frac{\cos \alpha_2 \sin^4 \alpha_1}{\cos \alpha_1 \sin^4 \alpha_2} \right)$$

ovvero

$$\boxed{l_2 = l_1 \sqrt{\frac{\cos \alpha_2 \sin^4 \alpha_1}{\cos \alpha_1 \sin^4 \alpha_2}} = 24 \text{ m}} \ .$$

Tramite la (2) si ottiene poi immediatamente

$$\boxed{\omega_2 = 0.67 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \ .$$

c) La variazione di energia potenziale è fissata dalla variazione di quota verticale del pompiere in questo modo:

$$\boxed{\Delta U = mg(l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2) = 29.14 \ kJ}$$

mentre la variazione di energia cinetica è

$$\boxed{\Delta E_K = \frac{1}{2} m(\omega_2 l_2 \sin \alpha_2)^2 - \frac{1}{2} m(\omega_1 l_1 \sin \alpha_1)^2 = 0.96 \ kJ}$$

Il lavoro fatto dall'argano per passare da una configurazione all'altra è pari alla variazione di energia meccanica del pompiere:

$$\boxed{W = \Delta U + \Delta E_K = 30.1 \ kJ}$$

d) A causa dell'accelerazione orizzontale dell'elicottero il pompiere, nel sistema di riferimento accelerato in cui l'elicottero è in quiete, sente un'accelerazione di gravità efficace di modulo

$$a' = \sqrt{g^2 + \frac{g^2}{4}} = 1.12\ g = 10.96\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

orientata ad un angolo β rispetto alla verticale, con

$$\boxed{\beta} = \arctan\frac{a}{g} = \boxed{26.6^\circ}\ .$$

Per calcolare la velocità angolare ω_3 procediamo analogamente al punto (a) ottenenendo:

$$\omega_3^2 = \frac{a'}{l_1\cos\alpha_1} = \frac{1.12\ g}{l_1\cos\alpha_1} = 1.12\ \omega_1^2$$

e quindi

$$\boxed{\omega_3 = 0.43\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}\ .$$

e) Torniamo alla situazione in cui la lunghezza della fune è l_1 e l'angolo è α_1. Come al punto a) ci mettiamo nel sistema di riferimento in rotazione e imponiamo le condizioni per l'equilibrio statico. A differenza del punto a), dove bastava annullare la risultante delle forze, ora dobbiamo considerare la risultante dei momenti delle forze rispetto al polo, che coincide con l'argano, includendo anche la forza peso e la forza centrifuga associate alla fune. Notiamo anche che, dato che la forza centrifuga non è un campo uniforme (dipende dalla distanza dall'asse e dunque non è costante lungo la fune), non possiamo applicarla al centro di massa della fune per il calcolo dei momenti, ma dobbiamo considerare il contributo di ciascun elemento infinitesimo della fune di massa dm, posto a distanza variabile dall'asse. Essendo la massa della fune distribuita in modo omogeneo, la massa in un tratto dl sarà data da $dm = (m_f/l_1)dl$ e la forza centrifuga corrispondente, radiale, avrà modulo $(m_f/l_1)dl\ \omega_1^2 l\sin\alpha_1$, se l è la distanza del tratto di fune dall'argano. Dunque, la somma dei momenti della forza centrifuga applicata alla fune è

$$\frac{m_f}{l_1}\int_0^{l_1} dl\ \omega_1^2 l^2 \sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}m_f\omega_1^2 l_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\ .$$

A questo termine va aggiunto il momento della forza centrifuga del pompiere, e quello della forza peso del pompiere e della fune, quest'ultima applicabile al suo centro di massa. La condizione per l'equilibrio diventa

$$\frac{1}{3}m_f\omega_1^2 l_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + m\omega_1^2 l_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - m_f g\frac{l_1}{2}\sin\alpha_1 - mgl_1\sin\alpha_1 = 0$$

e otteniamo la nuova velocità angolare

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha_1}\frac{(m+\frac{m_f}{2})}{(m+\frac{m_f}{3})}} = 0.18\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Le equazioni del moto delle due coordinate della pallina sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \ . \end{cases}$$

Ricavando t dalla prima e inserendo l'espressione trovata nella seconda, si trova l'equazione della traiettoria della pallina (parabola):

$$y = H - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0}x^2.$$

La pallina colpisce direttamente il dischetto se la sua traiettoria passa per il punto $(L, 0)$. Otteniamo quindi

$$0 = H - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0}L^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{gL^2}{2H}} = 4.43\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\ .$$

Durante il moto, solo la componente della volocità lungo l'asse verticale cambia, perchè l'unica accelerazione presente è quella di gravità. Abbiamo

$$\begin{cases} v_{1x}(t) = v_0 \\ v_{1y}(t) = -gt \end{cases}$$

L'urto avviene all'istante $t_* = L/v_0 = 0.45\ \ \mathrm{s}$. Le componenti della velocità $\mathbf{v}_1$ della pallina al momento dell'urto sono quindi

$$\boxed{\begin{cases} v_{1x} = 4.43\ \mathrm{m/s} \\ v_{1y} = -4.43\ \mathrm{m/s} \end{cases}}$$

il suo modulo è $v_1 = 6.26$ m/s e il vettore forma un angolo di

$$\boxed{\alpha_1 = \arctan\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = -45^\circ}$$

rispetto all'asse orizzontale del sistema di riferimento.

b) L'urto è parzialmente anelastico, quindi una frazione di energia (il 30%) va persa. Se E_f è l'energia finale e E_i quella iniziale, allora

$$E_f = (1 - f)E_i$$

con $f = 0.3$ e

$$E_i = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad E_f = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

dove v_2 è il modulo del vettore velocità della pallina dopo l'urto. Inoltre, dato che l'urto avviene quando la molla è in posizione di equilibrio e la forza elastica non ha tempo di agire, possiamo usare anche la conservazione della quantità di moto. Se consideriamo un asse di riferimento diretto a 45° (asse della molla) l'urto di fatto è unidimensionale. Abbiamo quindi

$$mv_1 = MV - mv_2$$

dove V è la velocità del dischetto immediatamente dopo l'urto, quando la molla inizia a contrarsi. Abbiamo quindi il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(1-f)mv_1^2 \\ mv_1 = MV - mv_2 \end{cases}$$

con incognite v_2, V. Dalla seconda si ha

$$V = \frac{m}{M}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

avendo usato i valori numerici per le masse della pallina e del dischetto. Inserendo questo risultato nella prima equazione, si ha

$$\frac{3}{2}v_2^2 + v_1 v_2 - \left(\frac{1}{2} - f\right) v_1^2 = 0$$

da cui

$$v_2 = \frac{v_1}{3}\left[\sqrt{1 + 6\left(\frac{1}{2} - f\right)} - 1\right]$$

e inserendo i valori numerici si ottiene

$$\boxed{v_2 = 0.161 v_1 = 1.01\ \frac{m}{s}}\,.$$

Il vettore $\mathbf{v}_2$ forma sempre un angolo di $-45°$ rispetto all'orizzontale, come $\mathbf{v}_1$. Inserendo questo risultato nell'equazione per V, otteniamo

$$\boxed{V = 3.64\ \frac{m}{s}}\,.$$

c) Dopo aver rimbalzato sulla molla, la pallina compie un altro moto parabolico. Le equazioni di questo moto sono

$$\begin{cases} x(t) = 2 - v_{2x} t \\ y(t) = v_{2y} t - \frac{1}{2} g t^2 \ . \end{cases} \quad , \quad v_{2x} = v_{2y} = v_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La pallina atterra nell'istante

$$t_* = \frac{2 v_{2y}}{g} = 0.15 \ s$$

e dopo questo tempo la pallina è arrivata nel punto a distanza

$$\boxed{d = \frac{2 v_{2y} v_{2x}}{g} = 0.1 \text{ m}}$$

dal punto di rimbalzo sul dischetto.

L'altezza è massima quando l'energia cinetica dovuta al moto verticale è diventata tutta energia potenziale gravitazionale. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2} m v_{2y}^2 = mgh$$

e quindi

$$\boxed{h = \frac{v_{2y}^2}{2g} = 0.026 \text{ m}}$$

d) L'oscillazione raggiunge l'ampiezza massima quando l'energia cinetica è nulla ed è massima quella potenziale elastica. abbiamo quindi

$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} k (\Delta y)^2$$

da cui abbiamo

$$\boxed{|\Delta y| = \sqrt{\frac{M V^2}{k}} = 0.23 \text{ m}}.$$

L'equazione del sistema massa molla (oscillatore armonico) è

$$z(t) = \Delta y \cos \left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \phi \right)$$

dove z è la coordinata diretta lungo l'asse a 45°. Sappiamo che al tempo $t = 0$ la coordinata $z(0) = 0$, e quindi otteniamo

$$0 = \Delta y \cos \phi, \quad \Longrightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Il periodo dell'oscillatore è dato da

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0.4\ s}$$

e) Se la pallina rimane attaccata alla molla, l'urto è completamente anelastico. Si conserva quindi solo la quantità di moto

$$mv_1 = (M + m)V'$$

dove V' è la velocità del dischetto con attaccata la pallina, dopo l'urto. Abbiamo quindi

$$\boxed{V' = \frac{m}{M+m} v_1 = 2.09\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\ .$$

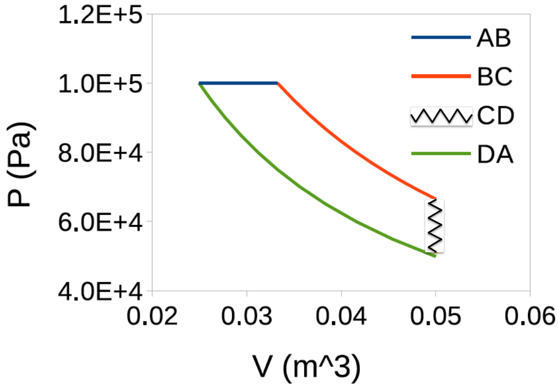
Il periodo cambia a causa della variazione della massa attaccata alla molla:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0.49\ \mathrm{s}}\ .$$

Soluzione esercizio II.1

a) Inizialmente il gas si trova alla temperatura $T_A = 300$ K e in equilibrio con la pressione esterna, $P_A = P_{\mathrm{ext}} = 10^5$ Pa. Sfruttiamo l'equazione di stato del gas ideale per calcolare il volume iniziale $V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 2.46 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$.
Allo stato B la temperatura è $T_B = 400$ K, il gas è ancora all'equilibrio con la pressione esterna e possiamo calcolare il volume come sopra: $V_B = \frac{nRT_B}{P_B} = 3.28 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$.
Compiendo la trasformazione B–C il gas raggiunge il volume massimo $V_C = 5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$, la temperatura è $T_C = T_2 = 400$ K e quindi la pressione si riduce a $P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 6.65 \times 10^4$ Pa.
Nella trasformazione C–D il volume rimane costante e la temperatura finale è stabilita dal termostato T_1, quindi $V_D = 5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$ e $T_D = 300$ K. Calcoliamo la pressione nello stato D tramite l'equazione di stato: $P_D = \frac{nRT_D}{V_D} = 4.99 \times 10^4$ Pa.
Il diagramma P-V del ciclo è mostrato in figura. Si noti che la trasformazione CD è stata tracciata con una linea tratteggiata, essendo una trasformazione irreversibile.

b) La trasformazione A–B è isobara, quindi possiamo calcolare il lavoro compiuto come $W_{\mathrm{AB}} = P\Delta V = nR(T_2 - T_1) = 831$ J.



Per calcolare il lavoro compiuto dal gas in B–C possiamo integrare lungo la curva isoterma:

$$W_{\mathrm{BC}} = \int_B^C P dV = nRT_2 \int_B^C \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_B} = 1.40 \times 10^3 \text{ J.} \quad (3)$$

La trasformazione C–D è isocora, quindi $W_{\mathrm{CD}} = 0$ J.
Infine calcoliamo il lavoro compiuto dal gas nell'isoterma D–A analogamente alla trasformazione B–C:

$$W_{\mathrm{DA}} = nRT_1 \ln \frac{V_A}{V_D} = -1.77 \times 10^3 \text{ J.} \quad (4)$$

Il lavoro netto compiuto in un ciclo risulta $W_{\mathrm{tot}} = 463$ J.

c) Nella trasformazione A–B, isobara, possiamo calcolare il calore scambiato dal gas come: $Q_{\mathrm{AB}} = nc_p \Delta T = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) = 2.08 \times 10^3$ J.
La trasformazione B–C è isoterma, quindi l'energia interna rimane costante. Allora dal primo principio segue che $Q_{\mathrm{BC}} = W_{\mathrm{BC}} = 1.40 \times 10^3$ J.
La trasformazione C–D avviene a volume costante, quindi $Q_{\mathrm{CD}} = nc_v \Delta T = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) = -1.25 \times 10^3$ J.
Infine per la trasformazione D–A (isoterma) applichiamo lo stesso metodo usato per B–C, quindi $Q_{\mathrm{DA}} = W_{\mathrm{DA}} = -1.77 \times 10^3$ J.

d) A questo punto risulta semplice calcolare il rendimento del ciclo:

$$\eta = \frac{W_{\mathrm{tot}}}{Q_{\mathrm{ass}}} = \frac{W_{\mathrm{tot}}}{Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{BC}}} = 13\%. \quad (5)$$

Una macchina di Carnot ideale che opera tra le due temperature T_1 e T_2 ha un rendimento pari a:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 25\%. \quad (6)$$

Il rendimento del ciclo assegnato è inferiore a quello del ciclo di Carnot, ma notiamo che in questo caso il teorema di Carnot non può essere applicato. Infatti il teorema richiede come ipotesi che le macchine termiche di cui si confrontano i rendimenti operino esattamente tra gli stessi due serbatoi; qui invece, il ciclo che abbiamo considerato, utilizza infiniti serbatoi nella trasformazione A–B.

e) La trasformazione B–C è isoterma, per cui possiamo ottenere:

$$\Delta S_{\mathrm{BC}}^{\mathrm{gas}} = nR\ln\frac{V_C}{V_B} = 3.50 \text{ J/K}. \tag{7}$$

La variazione di entropia dell'ambiente nella stessa trasformazione è quella dovuta allo scambio di calore da parte del termostato alla temperatura T_2:

$$\Delta S_{\mathrm{BC}}^{\mathrm{amb}} = \frac{Q_{\mathrm{BC}}^{\mathrm{amb}}}{T_2} = -\frac{Q_{\mathrm{BC}}^{\mathrm{gas}}}{T_2} = -3.50 \text{ J/K}. \tag{8}$$

Il risultato è consistente con il fatto che nella trasformazione reversibile B–C l'entropia dell'universo deve restare costante.
La variazione di entropia del gas nella trasformazione isocora C–D può essere calcolata come:

$$\Delta S_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{gas}} = nc_v\ln\frac{T_D}{T_C} = \frac{3}{2}nR\ln\frac{T_1}{T_2} = -3.59 \text{ J/K}. \tag{9}$$

Nella stessa trasformazione il termostato alla temperatura T_1 subisce la seguente variazione di entropia:

$$\Delta S_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{amb}} = \frac{Q_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{amb}}}{T_1} = -\frac{Q_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{gas}}}{T_1} = 4.16 \text{ J/K}. \tag{10}$$

Dal momento che la trasformazione C–D è irreversibile, è corretto che $\Delta S_{\mathrm{CD}}^{U} = \Delta S_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{amb}} > 0$.

Soluzione esercizio II.2

a) Conosciamo la pressione e il volume del gas contenuto tra i due pistoni, rispettivamente $P_{1A} = 1.1P_0 = 1.1 \times 10^5$ Pa e $V_{1A} = \pi R^2 L = 2.82 \times 10^{-2}$ m^3. Quindi dall'equazione di stato del gas ideale possiamo ricavare la temperatura

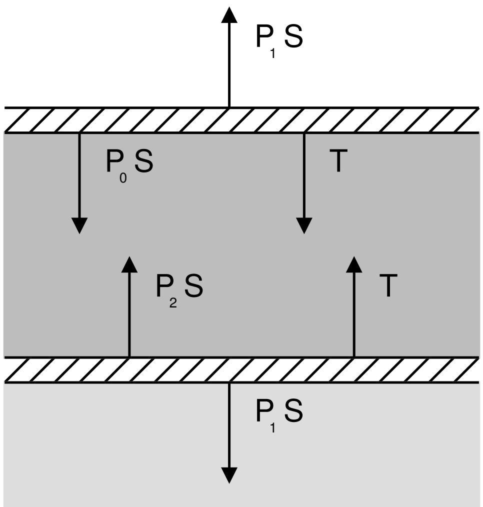
$$T_{1A} = \frac{P_{1A}V_{1A}}{n_1 R} = 374 \text{ K} . \tag{11}$$

Le equazioni per l'equilibrio dei due pistoni, descritte graficamente in figura, sono:

$$\begin{cases} P_{1A}S &= P_0S + T \\ P_{1A}S &= P_{2A}S + T, \end{cases} \tag{12}$$

dove $S = \pi R^2$ è l'area di base del cilindro e T è la tensione della fune.

Dal sistema risulta quindi che il gas nel comparto inferiore è all'equilibrio



con la pressione esterna, $P_{2A} = P_0 = 10^5$ Pa. A questo punto, sapendo che il gas monoatomico è all'equilibrio termico con il mercurio, possiamo calcolare il volume V_{2A} dall'equazione di stato del gas ideale:

$$V_{2A} = \frac{nRT_{2A}}{P_{2A}} = \frac{nRT_0}{P_{2A}} = 4.82 \times 10^{-2} \text{ m}^3. \tag{13}$$

b) Nella trasformazione A–B il gas 2, a contatto termico con il mercurio si riscalda. Dato che i pistoni sono mobili e senza attrito, il gas si espande in modo quasistatico reversibile. Notiamo anche che i due pistoni, incluso lo spazio tra di loro, si comportano come fossero un'unico pistone soggetto alla sola pressione esterna P_0. La pressione del gas tra i due pistoni infatti, rimane maggiore di P_0 in ogni istante, in modo che la fune resta tesa e il volume tra di essi resta costante. Dunque il gas 1 non compie né subisce lavoro ed esegue una trasformazione adiabatica reversibile. Pertanto la variazione della sua entropia è nulla: $\Delta S_1 = 0$ J/K. Invece, il gas 2 nel comparto inferiore esegue una trasformazione isobara a pressione P_0. Sappiamo che il volume finale è dato da $V_{2B} = \pi R^2(H - L) = 5.65 \times 10^{-2}$ m^3, e quindi possiamo calcolare la variazione di entropia come:

$$\Delta S_2 = n_2 c_p \ln\frac{T_{2B}}{T_{2A}} = \frac{5}{2} n_2 R \ln\frac{V_{2B}}{V_{2A}} = 6.61 \text{ J/K}. \tag{14}$$

Il calore scambiato dal gas nel comparto inferiore nella trasformazione isobara A–B risulta:

$$Q_2 = n_2 c_p \Delta T_2 = \frac{5}{2} P_2 \Delta V_2 = 2.08 \text{ kJ}. \tag{15}$$

c) Riscaldando ancora il gas 2, il pistone inferiore si alza mentre quello superiore rimane bloccato. Questo significa che la corda non è più in tensione e le nuove equazioni per l'equilibrio meccanico dei due pistoni nello stato C sono:

$$\begin{cases} P_{1C} S &= F_R + P_0 S \\ P_{2C} S &= P_{1C} S. \end{cases} \tag{16}$$

dove F_R è la reazione vincolare agente sul pistone superiore. Inoltre i gas nei due comparti sono alla stessa pressione $P_{1C} = P_{2C} = 1.3 \times 10^5$ Pa.
Sappiamo che il gas 1 ha compiuto una trasformazione adiabatica reversibile e che la somma dei due volumi di gas corrisponde al volume massimo del cilindro. Quindi possiamo calcolare il volume finale del comparto superiore come:

$$V_{1C} = V_{1B} \left(\frac{P_{1B}}{P_{1C}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2.51 \times 10^{-2} \text{m}^3, \tag{17}$$

dove si è usato il valore $\gamma = 7/5$ per il gas biatomico. Ne segue che il gas nel comparto 2 occupa il volume rimanente del cilindro, pari a:

$$V_{2C} = \pi R^2 H - V_{1C} = 5.97 \times 10^{-2} \text{m}^3. \tag{18}$$

Infine possiamo calcolare le temperature finali attraverso l'equazione di stato del gas ideale:

$$T_{1C} = \frac{P_{1C} V_{1C}}{n_1 R} = 392 \text{ K}. \tag{19}$$

$$T_{2C} = \frac{P_{2C} V_{2C}}{n_2 R} = 467 \text{ K}. \tag{20}$$

d) Il gas contenuto tra i due pistoni subisce una compressione adiabatica nella trasformazione B–C. Pertanto non scambia calore con l'esterno e per il primo principio:

$$W_1 = -\Delta U_1 = n_1 c_v (T_{1B} - T_{1C}) = \frac{5}{2} n_1 R (T_{1A} - T_{1C}) = -374 \text{ J}, \tag{21}$$

che è consistente con il fatto che il gas si comprime.