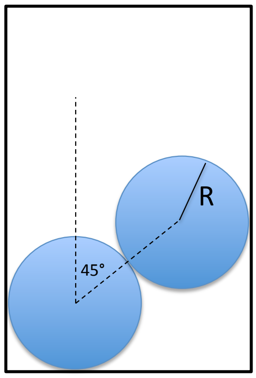
Fisica Generale I
A.A. 2015-2016, 30 agosto 2016

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

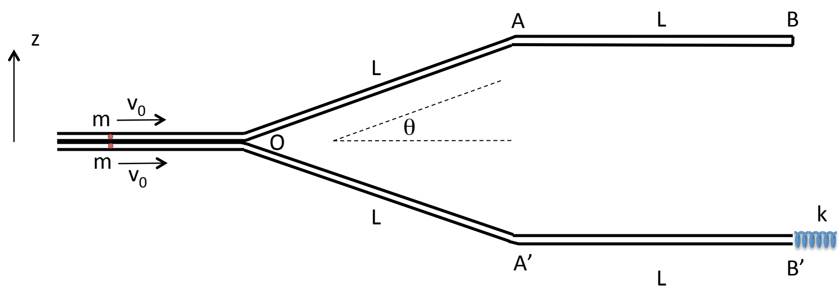
Esercizio I.1



Un bicchiere di vetro sottile, di forma cilindrica e massa trascurabile, è posto su un piano orizzontale. Dentro al bicchiere sono presenti due sfere omogenee di alluminio ($\rho = 2700$ kg/m^3) di raggio $R = 4$ cm. Una delle due sfere poggia sul fondo del bicchiere mentre l'altra è appoggiata sulla prima sfera e sulla parete laterale del bicchiere in modo tale che la congiungente dei centri di massa delle due sfere formi un angolo di 45° con la verticale.
a) Determinare modulo e verso delle reazioni vincolari che il bicchiere esercita sulle sfere per mantenere l'equilibrio statico.
b) Supponiamo adesso che una forza F costante agisca sul bicchiere in direzione orizzontale, da sinistra verso destra in figura. Qual è l'accelerazione del bicchiere? Esprimere le reazioni vincolari in questa situazione al variare di F.
c) Si supponga adesso che F sia nulla, ma che l'intero sistema venga sospeso in aria e messo in rotazione attorno all'asse verticale del cilindro a 4 giri al secondo. Calcolare il momento d'inerzia I_z rispetto a tale asse e la componente verticale del momento angolare L_z rispetto al centro di massa totale.
d) Mentre è in rotazione, il bicchiere improvvisamente si rompe e le due sfere sono libere di muoversi. Quali grandezze si conservano nonostante la rottura del bicchiere? Si descriva qualitativamente il moto delle due sfere.

Esercizio I.2
Due guide lineari descrivono 2 traiettorie contenute nello stesso piano verticale. Come si vede in figura, da un lato sono affiancate e orientate orizzontalmente, poi nel punto O si separano ed iniziano due tratti lunghi $L = 50$ cm e inclinati di un angolo $\theta = 10°$ rispetto all'orizzontale, ma in versi opposti. Nei punti A e A' entrambe le guide tornano ad essere orizzontali per un ulteriore tratto di lunghezza L. Due palline identiche di massa $m = 60$ g e dimensioni trascurabili vengono lanciate simultaneamente nelle guide con velocità $v_0 = 1.6$ m/s. Le guide sono prive di attrito e nei punti O, A e A' esse sono tali da variare la direzione del moto ma non il modulo della velocità delle palline.
a) Determinare il tempo che ciascuna pallina impiega a percorrere il tratto inclinato (O–A o O–A') e quale sarebbe stata la velocità iniziale minima $v_{0,c}$ per permettere ad entrambe le palline di raggiungere il secondo tratto

orizzontale.
b) Considerando la velocità iniziale v_0, determinare il tempo che passa tra il passaggio in O e l'arrivo in B e B' e tracciare i grafici della velocità delle due palline in funzione del tempo.
c) Calcolare l'energia cinetica totale del sistema formato dalle due palline nell'intervallo di tempo in cui entrambe le palline si trovano in un tratto orizzontale, sia rispetto ad un sistema di riferimento fisso alla parete, sia rispetto al loro centro di massa.
d) Si supponga adesso che alla fine della guida superiore sia presente una parete che fa rimbalzare elasticamente la pallina, mentre alla fine di quella inferiore sia presente una molla a riposo, di costante elastica k. Quanto deve valere k affinché le due palline tornino simultaneamente in O? [Il grafico richiesto al punto b) può essere di grande aiuto...]
e) Cosa succederebbe se le due guide fossero vincolate solo tra loro come in figura ma non su una parete verticale, bensì fossero disposte su un piano liscio orizzontale? Inoltre le guide siano aperte anche in B e B'. Supponendo di lanciare nuovamente le palline con velocità v_0, si descriva qualitativamente il moto dell'intero sistema.



Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Si consideri $n = 2$ moli di un gas ideale monoatomico contenute in un recipiente adiabatico, inizialmente nello stato termodinamico A, a temperatura $T_A = 293$ K e pressione $P_A = 2 \times 10^5$ Pa. A un certo punto, viene fatta compiere al gas un'espansione libera adiabatica che gli permette di raddoppiare il suo volume e raggiungere un nuovo equilibrio nello stato B. Qui subisce una trasformazione isobara reversibile che lo porta allo stato C con volume $V_C = 3V_A$, quindi una trasformazione isocora (sempre reversibile) che lo por-

ta allo stato D. Il gas viene quindi riportato alle condizioni iniziali con una trasformazione adiabatica reversibile.
a) Calcolare le coordinate termodinamiche (pressione, volume, temperatura) negli stati A, B, C, D. Disegnare inoltre il ciclo nel diagramma PV.
b) Calcolare il calore scambiato e il lavoro svolto dal gas nel ciclo.
c) Calcolare la variazione di entropia del gas ΔS_{gas} e dell'universo ΔS_{uni} sull'intero ciclo.
d) Assumiamo ora che, raggiunto lo stato C, il sistema sia riportato alle condizioni iniziali con una trasformazione reversibile obbediente alla legge lineare $P = aV + b$. Determinare valori di a e b. Calcolare il calore scambiato e il lavoro svolto nel nuovo ciclo.

Esercizio II.2
Una mole di un gas perfetto monoatomico è mischiata a n moli di un gas perfetto biatomico in un recipiente cilindrico a base quadrata di lato $L = 28$ cm dotato di un pistone superiore di massa $M = 5.6$ kg che può muoversi liberamente, senza attrito. Il recipiente è dotato di pareti adiabatiche e la miscela si trova inizialmente in equilibrio termico a $t_0 = 15°C$.
a) Considerando una pressione esterna $P_{\text{ext}} = 1.013 \times 10^5$ Pa, e osservando che il pistone si trova all'equilibrio meccanico ad una quota $h = 40$ cm, si determini n.
b) Quali sono le pressioni parziali dei due gas? [Si ricordi che in una miscela di gas ideali, ognuno dei gas occupa l'intero volume e obbedisce alla propria equazione di stato con una pressione parziale $P^{(i)}$, e che la pressione totale esercitata dalla miscela è la somma delle pressioni parziali]
c) Si supponga adesso di alzare lentamente il pistone. Si usi il primo principio per esprimere in forma differenziale i calori scambiati tra i due gas in termini di dT e dV. Si dimostri che $TV^\alpha =$ costante durante la trasformazioni e si calcoli il valore di α.
d) La trasformazione termina quando il pistone si è alzato di 10 cm. Calcolare la variazione di entropia di ciascuno dei due gas.

Soluzione esercizio I.1

a) Calcoliamo innanzitutto la massa m di ciascuna sfera.

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = 0.724 \text{ kg}. \tag{1}$$

Per mantenere la configurazione di equilibrio descritta, poniamo uguale a zero la somma delle forze lungo l'orizzontale e lungo la verticale di entrambe le sfere. Indicando con N_1 la reazione vincolare del fondo del bicchiere, con N_2 e N_3 quelle della parete laterale e con N_0 la forza reciproca tra le due sfere,

$$\begin{cases} N_2 - \frac{N_0}{\sqrt{2}} = 0 \\ N_1 - mg - \frac{N_0}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{N_0}{\sqrt{2}} - N_3 = 0 \\ \frac{N_0}{\sqrt{2}} - mg = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \boxed{\begin{cases} N_0 = \sqrt{2}mg = 10 \text{ N} \\ N_1 = 2mg = 14.2 \text{ N} \\ N_2 = mg = 7.1 \text{ N} \\ N_3 = mg = 7.1 \text{ N} \end{cases}} \tag{2}$$

Come ci si doveva attendere, le reazioni vincolari orizzontali, N_2 e N_3 sono uguali ed opposte, infatti il bicchiere è fermo. Verticalmente N_1 compensa esattamente la forza peso totale $2mg$.

b)
Se il bicchiere è sottoposto ad una forza F orizzontale, l'intero sistema (di massa $2m$) avrà un'equazione del moto data da $2ma = F$, quindi si muoverà con un'accelerazione

$$\boxed{a = F/2m}\,. \tag{3}$$

Poniamoci adesso nel sistema di riferimento solidale col bicchiere per calcolare le nuove reazioni vincolari. Nel sistema di riferimento non inerziale possiamo introdurre una forza apparente su ciascuna sfera pari a $F_{\text{app}} = -ma = -F/2$, orizzontale. Il bilancio delle forze risulterà quindi

$$\begin{cases} N_2 - \frac{N_0}{\sqrt{2}} - \frac{F}{2} = 0 \\ N_1 - mg - \frac{N_0}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{N_0}{\sqrt{2}} - N_3 - \frac{F}{2} = 0 \\ \frac{N_0}{\sqrt{2}} - mg = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \boxed{\begin{cases} N_0 = \sqrt{2}mg \\ N_1 = 2mg \\ N_2 = mg + \frac{F}{2} \\ N_3 = mg - \frac{F}{2} \end{cases}} \tag{4}$$

Si vede che se $F < 2mg$ le sfere rimangono nella posizione iniziale, mentre per $F > 2mg$ la sfera in alto si stacca dalla parete del bicchiere andrà a finire sopra all'altra.

c)
Il bicchiere viene posto in rotazione a 4 giri al secondo. Possiamo indicare con $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(0.25\ \mathrm{s}) = 25.1\ \mathrm{s}^{-1}$ la velocità angolare.
Il momento d'inerzia dell'intero sistema rispetto all'asse di rotazione si calcola sfruttando il teorema di Steiner e sommando quello di ciascuna sfera rispetto ad un asse passante per il centro. Considerando che la distanza del centro di massa di ciascuna sfera dall'asse di rotazione è pari a $R/\sqrt{2}$, otteniamo

$$\boxed{I_z = 2\left(\frac{2}{5}mR^2 + m\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \frac{9}{5}mR^2 = 2.1\ 10^{-3}\ \mathrm{kg\ m^2}} \tag{5}$$

Poiché la rotazione del bicchiere avviene lungo l'asse z, la componente lungo z del momento angolare del sistema è data semplicemente da $L_z = I_z\omega_z$, dove I_z è il momento d'inerzia che abbiamo appena trovato e ω_z è la componente lungo z della velocità angolare; in questo caso $\omega_z = \omega$. Quindi

$$\boxed{L_z = I_z\omega = 5.3 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}} \tag{6}$$

d)
Con la rottura del bicchiere, le due sfere cessano il moto rotatorio e ciascuna di esse segue, lungo l'orizzontale, una traiettoria tangenziale al punto della traiettoria circolare in cui si trovavano al momento della rottura del bicchiere (poiché le velocità hanno uguale modulo, ma direzioni opposte, le due sfere si allontanano in direzioni opposte). Poiché però sono sottoposte anche alla forza gravitazionale, oltre al moto uniforme orizzontale ne hanno anche uno uniformemente accelerato in verticale (verso il basso), così che le due sfere hanno un moto complessivo balistico.

Studiamo ora le quantità che si conservano. Per prima abbiamo l'energia meccanica: inizialmente è tutta cinetica di rotazione, quindi diventa potenziale e cinetica di traslazione.

Poiché le sfere sono sottoposte alla forza peso, la quantità di moto complessiva non si conserva, ma si conservano le sue componenti x e y lungo il piano.

Infine, poiché il sistema è sottoposto alla forza peso e le due sfere non si trovano nel centro di massa del sistema, le componenti L_x e L_y del momento angolare non si conservano. Al contrario, la componente L_z del momento angolare si conserva, poiché la sola forza esterna (la forza peso) è proprio diretta lungo z.

Soluzione esercizio I.2

a)
Introduciamo le coordinate s e s' per descrivere i tratti percorsi lungo le due guide rispetto a O. Le palline hanno una velocità iniziale di modulo v_0 nel tratto inclinato. Le loro equazioni del moto saranno però diverse visto che la proiezione della forza di gravità lungo la guida darà termini di segno opposto. La posizione in funzione del tempo risulterà quindi

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin\theta t^2 \tag{7}$$

$$s'(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g \sin\theta t^2. \tag{8}$$

Alla fine dei tratti inclinati, $s = s' = L$, quindi possiamo ricavare gli intervalli di tempo per ciascuna pallina

$$\boxed{t_1 = \frac{v_0}{g\sin\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2gL\sin\theta}{v_0^2}}\right) = 396 \text{ ms}} \tag{9}$$

$$\boxed{t_1' = \frac{v_0}{g\sin\theta}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gL\sin\theta}{v_0^2}}\right) = 273 \text{ ms}} \tag{10}$$

Per t_1 va scelto il segno meno in quanto l'altro corrisponderebbe al tempo del secondo passaggio da A nel caso di una guida inclinata molto lunga. Per t_1' si sceglie invece il segno più in quanto l'altra soluzione fornisce un tempo negativo. Quando l'argomento della radice nella prima delle due equazioni si annulla le due soluzioni coincidono. Questo si interpreta fisicamente con l'arrivo della pallina all'estremità della guida inclinata con velocità nulla. Con velocità inferiori la pallina non riesce a raggiungere il tratto orizzontale. Quindi la velocità iniziale critica è

$$\boxed{v_{0,c} = \sqrt{2gL\sin\theta} = 1.3 \text{ m/s}}\,. \tag{11}$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto considerando la trasformazione dell'energia cinetica iniziale interamente in energia potenziale mgh, essendo $h = L\sin\theta$.

b)
Nei tratti orizzontali AB e $A'B'$ le due palline si muovono con velocità costanti $v_1 = v_0 - g\sin\theta t_1 = 0.926$ m/s e $v_1' = v_0 + g\sin\theta t_1' = 2.06$ m/s. Di conseguenza per percorrere i tratti orizzontali impiegheranno rispettivamente

$$t_2 = L/v_1 = 540 \text{ ms} \tag{12}$$

$$t_2' = L/v_1' = 243 \text{ ms} \tag{13}$$

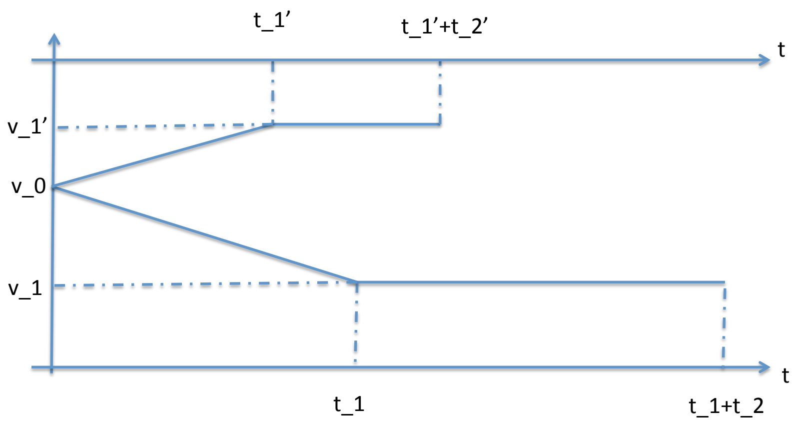
La pallina nella guida superiore impiega un tempo totale

$$\boxed{\delta t = t_1 + t_2 = 936 \text{ ms}} \tag{14}$$

mentre quella nella guida inferiore

$$\boxed{\delta t' = t'_1 + t'_2 = 516 \text{ ms}}\,. \tag{15}$$

In figura è mostrato l'andamento della velocità in funzione del tempo.



c)

Quando le palline sono entrambe nel tratto orizzontale, ovvero da t_1 a $(t'_1 + t'_2)$, l'energia cinetica totale del sistema rispetto alla parete fissa, non è altro che

$$\boxed{E_K^{(0)} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1'^2 = 153 \text{ mJ}} \tag{16}$$

Il centro di massa delle due palline si muove orizzontalmente a una velocità media tra le due, pari a $v_{\rm cm} = (v_1 + v'_1)/2 = 1.493$ m/s. Quindi le velocità delle due palline espresse nel sistema di riferimento del centro di massa saranno

$$v_1^{(\rm cm)} = v_1 - v_{\rm cm} = -0.567 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_1'^{(\rm cm)} = v'_1 - v_{\rm cm} = +0.567 \text{ m/s}. \tag{17}$$

Quindi l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa risulta

$$\boxed{E_K^{(\mathrm{cm})} = \frac{1}{2}mv_1^{(\mathrm{cm})2} + \frac{1}{2}mv_1'^{(\mathrm{cm})2} = 19.3\ \mathrm{mJ}} \tag{18}$$

d)

Studiamo per primo il moto della pallina nella guida superiore. Essa impiega lo stesso tempo δt (essendo l'urto elastico) per tornare al punto O. Quindi impiegherà un tempo totale $\Delta t_{OO} = 2\delta t = 1872$ ms da quando passa da O a quando ci torna.

La pallina nella guida inferiore, una volta raggiunta la molla, trasferisce la propria energia cinetica per comprimerla, finché la sua velocità non si annulla. A quel punto la molla rilascia la propria energia elastica sulla pallina, cosicché la molla torna in posizione di riposo e la pallina recupera la propria velocità v_1'. A questo punto impiega nuovamente il tempo $\delta t'$ per tornare al punto O.

Osservando il grafico al punto b), possiamo notare che, al fine di tornare in O insieme all'altra pallina, la pallina nella guida inferiore dovrà trascorrere un tempo $\tau = 2(\delta t' - \delta t) = 840$ ms a contatto con la molla. D'altro canto il tempo τ di interazione con la molla sarà esattamente pari a metà del periodo di oscillazione della molla: $\tau = T/2$. Quindi, sapendo che il periodo di oscillazione della molla è $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, abbiamo

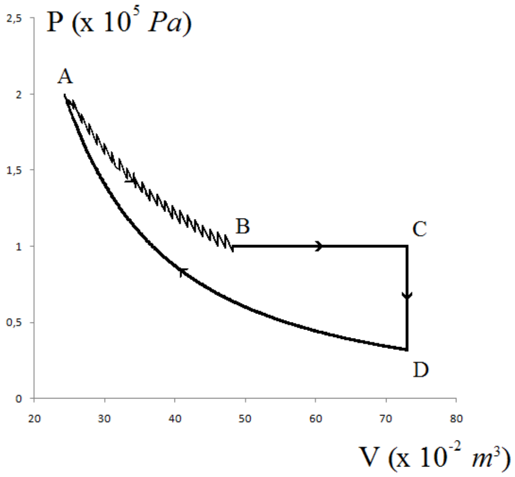
$$\boxed{k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{\pi^2 m}{\tau^2} = 0.84\ \mathrm{Nm}^{-1}} \tag{19}$$

e)

Se le guide fossero disposte orizzontalmente e fossero solamente vincolate tra di loro ma non con il piano su cui sono appoggiate, l'urto delle palline con la guida in corrispondenza delle curve in O farebbe muovere inizialmente la guida nella direzione di v_0 per la conservazione della quantità di moto del sistema palline+guida. Per lo stesso motivo si avrebbe un trasferimento opposto di impulso dalla guida alle palline in corrispondenza dell'urto in A e A'. In questo caso le due palline si muovono in maniera completamente simmetrica non essendo presente la gravità a rompere la simmetria, quindi arrivano simultaneamente alle curve. Alla fine avremmo la guida ferma e le palline che si muovono a velocità v_0 nell'ultimo tratto della guida.

Soluzione esercizio II.1

a)
Il ciclo nel diagramma PV è rappresentato in figura:



Usando l'equazione di stato dei gas ideali, otteniamo il volume in A:

$$\boxed{V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 2.43 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3}\,. \tag{20}$$

Poiché la trasformazione AB è un'espansione libera (lavoro nullo) e adiabatica (calore scambiato nullo) di un gas è ideale, il primo principio ci dice che non c'è variazione di energia interna e quindi la temperatura rimane invariata: $T_B = T_A = 293$ K. Sappiamo già che il volume è raddoppiato, $V_B = 2V_A = 4.86 \times 10^{-2}$ m^3, quindi usiamo ancora l'equazione dei gas perfetti per calcolare la pressione:

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{V_A}{V_B}P_A = \frac{1}{2}P_A = 1 \times 10^5\ \mathrm{Pa}}\,. \tag{21}$$

Notiamo che la relazione $PV^\gamma =$ costante **non** può essere utilizzata in questo caso, dato che la trasformazione AB **non** è quasistatica.
La trasformazione BC è isobara, quindi $P_C = P_B = 1 \times 10^5$ Pa. Poiché anche il volume V_C è noto ($V_C = 3V_A = 7.29 \times 10^{-2}$ m^3), ancora l'equazione dei gas ideali ci dà

$$\boxed{T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{3}{2}\frac{P_A V_A}{nR} = \frac{3}{2}T_A = 439.5\ \mathrm{K}}\,. \tag{22}$$

Resta l'ultima trasformazione: poiché è isocora, $V_D = V_C = 7.29 \times 10^{-2}$ m^3; dal testo sappiamo che la trasformazione DA è adiabatica quasistatica, quindi $P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma$, dove $\gamma = 5/3$ per un gas monoatomico; di conseguenza,

$$\boxed{P_D = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^\gamma P_A = \left(\frac{1}{3}\right)^\gamma P_A = 0.32 \times 10^5 \text{ Pa}} \,. \tag{23}$$

E con l'equazione di stato si ottiene anche la temperatura T_D:

$$\boxed{T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 140.3 \text{ K}} \tag{24}$$

b)

Nella trasformazione AB, essendo un'espansione adiabatica, il gas non scambia calore: $Q_{AB} = 0$. La trasformazione BC è isobara, quindi il calore scambiato è

$$\boxed{Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) = 6080 \text{ J}} \,. \tag{25}$$

La trasformazione CD è isocora, quindi il calore scambiato è

$$\boxed{Q_{CD} = nc_V(T_D - T_C) = -7462 \text{ J}} \,. \tag{26}$$

La trasformazione DA, infine, è nuovamente adiabatica, quindi non è scambiato calore. Di conseguenza

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} \\ &= \boxed{nc_P(T_C - T_B) + nc_V(T_D - T_C) = -1382 \text{ J}} \end{aligned} \tag{27}$$

Il calore ceduto dal gas è maggiore di quello assorbito.
Per calcolare il lavoro totale eseguito basta applicare il primo principio alla trasformazione ciclica, per la quale vale sempre $\Delta U = 0$ (essendo U una funzione di stato) e dunque

$$\boxed{W_{\text{tot}} = Q_{\text{tot}} = -1382 \text{ J}} \,. \tag{28}$$

Il lavoro complessivamente viene svolto dall'ambiente sul sistema, a fronte di una cessione di calore da parte del gas, come in una macchina frigorifera. Il fatto che nel diagramma P-V il ciclo abbia l'aspetto di un percorso in senso orario, come per una macchina termica, non deve trarre in inganno. In realtà, il tratto AB è irreversibile e non quasistatico e, dunque, non può essere inteso come una curva integrabile. La curva ondulata che lo rappresenta in figura è puramente illustrativa; in quel tratto i valori di pressione e volume non sono noti, ma sicuramente il lavoro svolto è nullo, per definizione di espansione libera.

c)

Calcoliamo la variazione di entropia del gas e dell'universo. La variazione dell'entropia del gas è banalmente 0, poiché l'entropia è una funzione di stato (quindi, su un percorso chiuso, $\Delta S = 0$). Per calcolare la variazione di entropia dell'universo, possiamo limitarci a discutere la trasformazione AB: le trasformazioni BC e CD e DA, infatti, sono reversibili, quindi la variazione di entropia dell'universo lungo i tre rami è nulla: $\Delta S^{(BC)}_{\text{uni}} = \Delta S^{(CD)}_{\text{uni}} = \Delta S^{(DA)}_{\text{uni}} = 0$. Rimane la variazione di entropia lungo il ramo AB. Poiché la trasformazione lungo AB è un'espansione libera (e quindi adiabatica), la variazione di entropia dell'ambiente è nulla. Rimane dunque la sola variazione di entropia del gas:

$$\boxed{\Delta S_{\text{uni}} = \Delta S^{(AB)}_{gas} = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nR \ln 2 = 11.5 \text{ J/K}} \tag{29}$$

d)

Conosciamo sia le coordinate termodinamiche di A, sia quelle di C. Possiamo calcolare i due coefficienti della retta:

$$\boxed{a = \frac{P_A - P_C}{V_A - V_C} = -2.06 \times 10^6 \text{ Pa/m}^3} \tag{30}$$

$$\boxed{b = P_A - \frac{P_A - P_C}{V_A - V_C} V_A = 2.5 \times 10^5 \text{ Pa}}\,. \tag{31}$$

Passiamo adesso a calcolare lavoro e calore scambiato. Le trasformazioni AB e BC non sono variate, quindi otteniamo gli stessi risultati del punto b). Discutiamo solo la (nuova) trasformazione CA. Per prima cosa, otteniamo il lavoro: poiché conosciamo P(V), abbiamo che

$$\begin{aligned} W'_{CA} &= \int_C^A P dV = \int_C^A (aV + b) dV \\ &= \boxed{b(V_A - V_C) + \frac{1}{2} a (V_A^2 - V_C^2)} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}(P_A + P_C)(V_A - V_C) = -72.9 \times 10^5 \text{ J}}\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Poiché il lavoro ottenuto con la trasformazione BC è $W'_{BC} = P_C(V_C - V_B) = 24.3$ J, il lavoro totale è $W'_{tot} = W'_{BC} + W'_{CA} = -48.6$ J. Per calcolare il calore scambiato, invece, facciamo ancora uso del primo principio: $Q'_{tot} = W'_{tot} = -48.6$ J.

Soluzione esercizio II.2

a)
La miscela è in equilibrio termico a $t_0 = 15°$ C che corrisponde a $T_0 = 388.15$ K. Il volume che occupa inizialmente è semplicemente $V_0 = L^2 h = 0.03136$ m^3. La condizione di equilibrio meccanico del pistone è la seguente

$$P_{\text{ext}} L^2 + Mg = P_0 L^2 \tag{33}$$

e ci permette di dedurre la pressione iniziale P_0 a cui si trova la miscela:

$$P_0 = P_{\text{ext}} + \frac{Mg}{L^2} = 102 \text{ kPa}. \tag{34}$$

La miscela è formata da due gas perfetti e quindi anch'essa è descritta dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$P_0 V_0 = (n+1) R T_0 \tag{35}$$

da cui possiamo ricavare il numero di moli del gas biatomico

$$\boxed{n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} - 1 = 0.335 \text{ mol}} \tag{36}$$

b)
I due gas singolarmente seguono l'equazione di stato dei gas perfetti quindi, essendo in equilibrio termico tra loro e contenuti nello stesso volume, si ha

$$P_0^{(m)} = \frac{P_0^{(b)}}{n} \quad \text{con} \quad P_0 = P_0^{(m)} + P_0^{(b)}. \tag{37}$$

Le pressioni parziali dei due gas, monoatomico (m) e biatomico (b) rispettivamente risultano quindi

$$\boxed{P_0^{(m)} = \frac{1}{n+1} P_0 = 76.4 \text{ kPa}} \quad \text{e} \quad \boxed{P_0^{(b)} = \frac{n}{n+1} P_0 = 25.6 \text{ kPa}} \tag{38}$$

c)
La miscela è isolata termicamente quindi scambi di calore possono avvenire solamente tra i due gas. Il volume totale viene aumentato in maniera quasistatica e senza attriti quindi possiamo scrivere il primo principio in forma differenziale

$$\delta Q^{(m)} = \delta W^{(m)} + dU^{(m)} = P^{(m)} dV + c_v^{(m)} dT = \frac{RT}{V} dV + c_v^{(m)} dT \tag{39}$$

$$\delta Q^{(b)} = \delta W^{(b)} + dU^{(b)} = P^{(b)} dV + n c_v^{(b)} dT = \frac{nRT}{V} dV + n c_v^{(b)} dT. \tag{40}$$

Inoltre si avrà

$$\delta Q^{(m)} + \delta Q^{(b)} = 0 \tag{41}$$

da cui

$$\frac{RT}{V}dV + c_v^{(m)}dT + \frac{nRT}{V}dV + nc_v^{(b)}dT = 0 \tag{42}$$

ovvero

$$(n+1)R\frac{dV}{V} + (c_v^{(m)} + nc_v^{(b)})\frac{dT}{T} = 0 \tag{43}$$

oppure

$$\alpha\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0 \tag{44}$$

con

$$\alpha = \frac{(n+1)R}{c_v^{(m)} + nc_v^{(b)}} = \frac{(n+1)}{(3/2) + n(5/2)} = 0.571 \tag{45}$$

Integrando l'equazione (44) si ottiene TV^α costante, come si voleva.

d)
Nel caso di un innalzamento del pistone di $\Delta h = 10$ cm, il volume finale è

$$\boxed{V_f = L^2(h + \Delta h) = 1.25\ V_0 = 0.0392\ \mathrm{m}^3} \tag{46}$$

Dal rapporto $V_f/V_i = 1.25$, usando la relazione precedente, si trova $T_f/T_0 = 0.88$. Risulta quindi comodo scrivere la variazione di entropia di ciascun gas come

$$\Delta S^{(m)} = c_v^{(m)} \ln\frac{T_f}{T_0} + R\ln\frac{V_f}{V_0} \quad \text{e} \quad \Delta S^{(b)} = nc_v^{(b)} \ln\frac{T_f}{T_0} + nR\ln\frac{V_f}{V_0} \tag{47}$$

da cui

$$\boxed{\Delta S^{(m)} = \frac{3}{2}R\ln 0.88 + R\ln 1.25 = 0.27\ \mathrm{J/K}} \tag{48}$$

e

$$\boxed{\Delta S^{(b)} = 0.335\frac{5}{2}R\ln 0.88 + 0.335R\ln 1.25 = -0.27\ \mathrm{J/K}}\,. \tag{49}$$