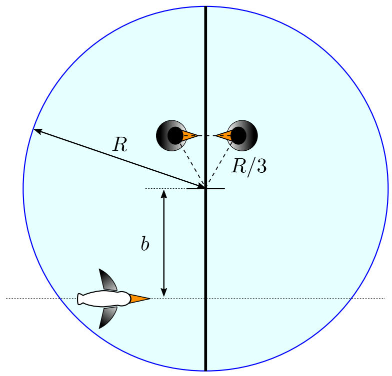
Fisica Generale I
A.A. 2016-2017, 7 febbraio 2017

Esercizio I.1



Una mattina di dicembre, nella baia di Ross, due pinguini si incontrano per giocare a tennis. Il campo è una lastra di ghiaccio circolare omogenea di raggio $R = 3\,\mathrm{m}$ e massa $M = 240\,\mathrm{kg}$, che poggia su un piano innevato orizzontale. La rete è tesa lungo un diametro della lastra. Ad inizio partita i due pinguini si trovano uno di fronte all'altro, distanti 0.5 m dalla rete e 1 m dal centro del disco come in figura. Improvvisamente un grosso albatros in volo radente, non avendo visto la rete, impatta a velocità $v_0 = 10$ m/s perpendicolarmente ad essa e a distanza b dal centro della lastra, e vi resta impigliato. L'albatros ha la stessa massa di ciascuno dei due pinguini, $m = 9\,\mathrm{kg}$, e l'attrito tra la lastra e la superficie sottostante è trascurabile. A seguito dell'urto, si osserva che il centro della lastra si muove di moto rettilineo con velocità $0.\bar{3}$ m/s.

a) Qual è il valore di b?

b) Quant'è la massa della rete?

c) Calcolare il momento d'inerzia del sistema (lastra e fauna annessa) rispetto all'asse verticale passante per il centro di massa, e la velocità angolare $\vec{\omega}$ che la lastra acquisisce con l'urto.

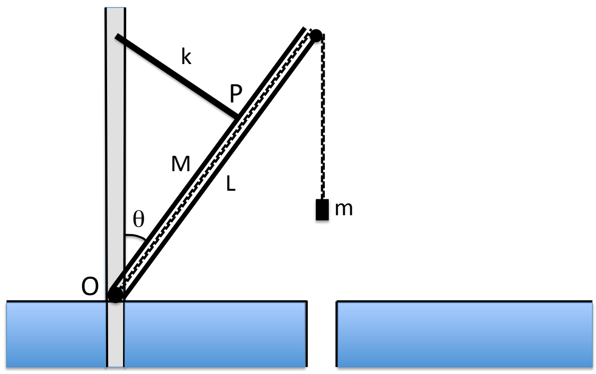
d) Calcolare l'energia dissipata nell'impatto.

e) Qual è la forza (direzione e modulo) che la rete deve esercitare sull'albatros per tenerlo intrappolato durante il moto?

f) I due pinguini ancora in piedi si muovono adesso uno verso l'altro fino ad incontrarsi di fronte alla rete, dove si fermano. A seguito di ciò, com'è cambiato il moto del disco?

Esercizio I.2

Nel 2117 l'impresa mineraria Mayr&Co. inizia una campagna di sondaggi su Europa, una delle lune di Giove, per verificare la presenza di minerali dissolti nell'oceano d'acqua sotto la spessa superficie ghiacciata. A tale scopo viene utilizzata la sonda rappresentata in figura. Il braccio di una gru di lunghezza $L = 8\,\mathrm{m}$ e massa $M = 400\,\mathrm{kg}$, distribuita in modo uniforme, è vincolato in due punti O e P ad un palo rigido, conficcato nello strato di ghiaccio. Il vincolo in O è una cerniera che permetterebbe la rotazione nel piano della figura, senza attriti, mentre quello in P, a distanza $(2/3)L$ da O, è un cavo metallico di massa trascurabile, teso in direzione perpendicolare al braccio della gru in modo da tenere quest'ultimo ad una inclinazione $\theta = 30°$



rispetto alla verticale. La sonda vera e propria, che contiene la strumentazione ed ha una massa complessiva $m = 40\,\text{kg}$, è appesa alla gru tramite una catena inestensibile e di massa trascurabile, avvolta ad un argano in O e passante per una piccola ruota dentata all'estremità superiore del braccio. In questo modo la sonda potrà essere calata nel foro appositamente scavato nel ghiaccio. Si consideri che Europa ha massa $M_E = 4.8 \times 10^{22}\,\text{kg}$ e raggio $R_E = 1.56 \times 10^3\,\text{km}$.

a) Determinare l'accelerazione di gravità g sulla superficie della luna.

b) Determinare le reazioni vincolari esercitate dalla cerniera in O e dal cavo metallico in P per mantenere l'intero sistema in equilibrio statico.

c) Supponiamo che la catena a cui la sonda è appesa sia riavvolta fino a portare la sonda in cima alla gru e supponiamo anche che il cavo metallico non sia perfettamente inestensibile, ma si comporti invece come una corda elastica con costante elastica $k = 10^6$ N/m. Si stimi la frequenza delle piccole variazioni $\delta\theta$ attorno all'angolo di equilibrio. Dimostrare che tale frequenza è molto più grande di quella delle oscillazioni della sonda attorno alla verticale (moto pendolare), se questa si trovasse in prossimità del foro.

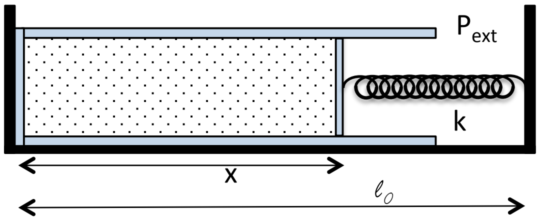
d) In un certo istante, quando la sonda è in cima alla gru, a causa di un incidente il cavo metallico si rompe e la gru, con la sonda attaccata, cade al suolo. Calcolare l'accelerazione angolare iniziale.

e) Calcolare la velocità con cui la sonda si schianta sul ghiaccio.

Esercizio II.1

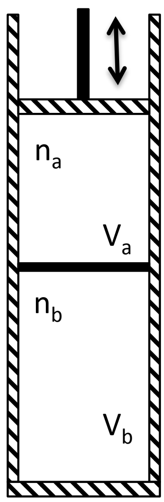
Mezza mole di gas biatomico è contenuta nel recipiente in figura, chiuso a destra da un pistone mobile di sezione $\sigma = 2$ dm^2. Il pistone è trattenuto da una molla che, a causa della pressione esercitata dal gas, è compressa di una lunghezza $x = 50\,\text{cm}$ rispetto alla sua lunghezza a riposo l_0. Esternamente al recipiente è presente aria a pressione $P_{\text{ext}} = 10^5$ Pa e temperatura $t_0 = 30°$ C, entrambe costanti.

a) Sapendo che il gas è inizialmente in uno stato (A) di equilibrio termico con l'aria circostante e la molla è in equilibrio meccanico nella posizione data, determinare la pressione P_0 del gas e la costante elastica k della molla.



b) Supponiamo ora di spostare il pistone lentamente in modo da far espandere il volume del gas del 20%, mantenendo il contatto termico con l'esterno. Calcolare la variazione di energia interna, il lavoro compiuto dal gas e il calore assorbito per raggiungere il nuovo stato di equilibrio (B).
c) Se, a partire dallo stato A, lo stesso spostamento del pistone avvenisse con il recipiente isolato termicamente dall'ambiente esterno, quali sarebbero la temperatura del nuovo stato finale C, la variazione di energia interna e il lavoro eseguito dal gas?
d) Si consideri il ciclo reversibile che si ottiene connettendo gli stati B e C con una isocora reversibile e invertendo il verso della precedente trasformazione AC. Si rappresenti il ciclo nel diagramma P-V e se ne calcoli il rendimento.
e) Di quanto variano l'entropia del gas e quella dell'universo per effettuare la trasformazione BC?

Esercizio II.2



Un gas monoatomico ideale è contenuto nel recipiente cilindrico in figura, che è rivestito di materiale termicamente isolante e dotato di un pistone mobile, anch'esso isolante, libero di muoversi lungo l'asse del cilindro. Una parete interna, fissa, divide il recipiente in due settori di volumi V_a e V_b, con $V_b = 20$ l, contenenti rispettivamente $n_a = 3$ e $n_b = 1$ moli di gas. La parete interna permette lo scambio termico tra i due settori. Inizialmente il pistone è mantenuto fisso da una forza esterna in modo da avere $V_a = V_b$. La temperatura iniziale dei gas è $t_0 = 25°$ C.
a) Determinare la pressione esercitata dai due gas.
b) Supponiamo di spingere il pistone verso il basso molto lentamente. Usare il primo principio per scrivere le espressioni dei calori infinitesimi δQ_a e δQ_b scambiati tra i due settori durante la trasformazione in funzione delle coordinate termodinamiche T e V_a e delle loro variazioni infinitesime, dT e dV_a.
c) Utilizzando le espressioni precedenti, determinare la temperatura T_f raggiunta dal gas nel caso in cui il volume del settore a sia dimezzato.
d) Determinare la quantità di calore scambiata tra i due settori a seguito di questa operazione.
e) Calcolare il lavoro compiuto dal gas durante la compressione.

Soluzione esercizio I.1

a) A seguito dell'urto la lastra trasla e ruota. L'unico punto che si limita a traslare, senza ruotare, è il centro di massa (CM) del sistema formato dalla lastra con pinguini e albatros al seguito. Tale punto infatti, in assenza di attriti, si muove come una particella libera, avendo velocità iniziale diretta lungo la direzione di volo iniziale dell'albatros e verso concorde. Se il centro della lastra (O) si muove di moto rettilineo dopo l'urto, vuol dire che quel punto coincide con il CM del sistema; se così non fosse, infatti, il punto O seguirebbe una traiettoria cicloidale. Dunque, basta imporre che il centro di massa dell'albatros e i due pinguini sia in O. Per quanto riguarda la direzione perpendicolare alla rete, già sappiamo che il CM si trova lungo la rete stessa, essendo i due pinguini equidistanti da essa. Per quanto riguarda la direzione parallela alla rete, abbiamo la condizione

$$mb = 2m\frac{R}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ovvero

$$\boxed{b = \frac{R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ \mathrm{m} = 1.73\ \mathrm{m}\,.}$$

b) Il CM coincide dunque con il punto O. Dato che non vi sono attriti, nell'urto è conservata la quantità di moto totale del sistema. La legge di conservazione è questa:

$$(M + 3m + m_r)v_{CM} = mv_0$$

dove tutto è noto tranne la massa della rete m_r, che risulta essere:

$$\boxed{m_r = \frac{v_0}{v_{CM}}m - 3m - M = 3\ \mathrm{kg}\,.}$$

c) Il momento d'inerzia si calcola come somma del momento d'inerzia della lastra circolare, della rete, che può essere approssimata come un'asta omogenea di massa m_r e lunghezza $2R$, e dei tre uccelli, che possono essere trattati come particelle puntiformi. Dunque

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}m_r(2R)^2 + 2m(R/3)^2 + m(R/\sqrt{3})^2$$

ovvero

$$\boxed{I = \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{3}m_r + \frac{5}{9}m\right)R^2 = 1134\ \mathrm{kg\ m}^2\,.}$$

La velocità angolare di rotazione si ricava dalla legge di conservazione del momento angolare nell'urto con l'albatros:

$$I\omega = mbv_0$$

ovvero

$$\boxed{\omega = \frac{mRv_0}{\sqrt{3}I} = 0.137 \text{ rad s}\,.}$$

d) Se ci mettiamo nel sistema di riferimento della baia di Ross, l'energia cinetica iniziale è solo quella dell'albatros,

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 450 \text{ J}\,,$$

mentre l'energia finale è quella di traslazione e rotazione del sistema

$$E = \frac{1}{2}(M + 3m + m_r)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 25.6 \text{ J}\,.$$

Dunque l'energia dissipata vale

$$\boxed{\Delta E = E_0 - E = 424.4 \text{ J}\,.}$$

e) Se l'albatros è intrappolato alla base della rete a distanza b dal centro della lastra, la forza peso è compensata dalla reazione vincolare della lastra, verticale al piano. Inoltre, dato che l'albatros compie un moto circolare attorno al centro della lastra, che è pure il CM del sistema, allora la rete deve esercitare anche una forza radiale centripeta per tenerlo sulla traiettoria curvilinea. Ponendosi nel sistema di riferimento non inerziale in rotazione, ciò è equivalente a dire che la rete deve esercitare una forza centripeta che compensi la forza centrifuga. Il modulo della forza deve essere dunque

$$\boxed{F = m\omega^2 b = 0.292 \text{ N}\,.}$$

f) Il moto dei pinguini avviene a momento angolare costante e quantità di moto totale costante, dato che non agiscono forze esterne orizzontali. Inoltre il CM del sistema rimane sempre nel centro della lastra O. Dunque v_{CM} rimane costante e il punto O continua nel suo moto rettilineo indisturbato dal movimento dei pinguini. Per quanto riguarda la rotazione attorno ad O, notiamo che il momento d'inerzia del sistema diminuisce, dato che i pinguini passano da una distanza $R/3$ dal centro ad una distanza inferiore $R/(2\sqrt{3})$, e dunque la velocità angolare di rotazione aumenterà secondo la legge

$$I'\omega' = I\omega$$

dove I' è il momento d'inerzia finale. La variazione però è molto piccola, dato che riguarda solo il contributo dei pinguini a I, che passa da $(2/9)mR^2 = 18$ kg m^2 a $(1/6)mR^2 = 13.5$ kg m^2, con una variazione relativa $\Delta I/I$ dell'ordine del 4 per mille. La velocità angolare avrà una variazione relativa dello stesso ordine.

Soluzione esercizio I.2

a) Ogni particella di massa m posta sulla superficie di Europa sente una forza gravitazionale pari a $F = GmM_E/R_E^2$. Si può dunque definire l'accelerazione di gravità locale g tale che $F = mg$. Quindi

$$\boxed{g = \frac{GM_E}{R_E^2} = 1.315 \text{ m/s}^2 \,.}$$

b) Consideriamo le condizioni per la statica del braccio della gru. Lo consideriamo come un'asta rigida omogenea, soggetta a: i) forza peso Mg, verticale e applicata al punto medio dell'asta; ii) forza mg verticale e applicata al suo estremo superiore, pari alla tensione della catena che sostiene la massa m; iii) forza $\vec{F}_P$ esercitata dal cavo metallico in P perpendicolarmente all'asta; iv) reazione vincolare $\vec{F}_O$ esercitata dalla cerniera all'estremità inferiore. Le condizioni per l'assenza di traslazione nelle due direzioni orizzontale (x) e verticale (y), e la condizione per l'assenza di rotazione attorno ad O, danno le equazioni

$$\begin{aligned} F_{Ox} + F_{Px} &= 0 \\ F_{Oy} + F_{Py} - (M+m)g &= 0 \\ \frac{2}{3}LF_P - \frac{1}{4}LMg - \frac{1}{2}Lmg &= 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con F_P il modulo del vettore $\vec{F}_P$. Di quest'ultimo conosciamo la direzione e possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} F_{Px} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}F_P \\ F_{Py} &= \frac{1}{2}F_P \,. \end{aligned}$$

Dalla condizione sulle rotazioni otteniamo

$$\boxed{F_P = \frac{3}{8}(M+2m)g = 236.7 \text{ N}}$$

e dalle altre due

$$\boxed{F_{Ox} = -F_{Px} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_P = 204.7 \text{ N}}$$

$$\boxed{F_{Oy} = (M+m)g - F_{Py} = (M+m)g - \frac{1}{2} F_P = 460.3 \text{ N}}$$

c) Se il cavo metallico si comporta come una molla elastica di costante elastica k applicata al braccio della gru, visto come un'asta omogenea vincolata a ruotare attorno al punto O, allora ad un piccolo aumento $\delta\theta$ dell'inclinazione dell'asta corrisponde un allungamento del cavo pari a $(2/3)L\delta\theta$, in approssimazione di piccoli angoli, e una forza di richiamo pari in modulo a $k(2/3)L\delta\theta$. Il momento di tale forza rispetto al polo O è $-k(4/9)L^2\delta\theta$ e l'equazione del moto per le rotazioni attorno a O diventa

$$I\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = -\frac{4}{9}kL^2\delta\theta\,,$$

dove il momento d'inerzia è quello della gru, vista come un'asta sottile omogenea che ruota rispetto ad un estremo, con la sonda fissata all'estremo opposto:

$$I = (1/3)ML^2 + mL^2 = \frac{1}{3}(M+3m)L^2\,.$$

Nell'equazione del moto abbiamo considerato solo il momento associato alla forza elastica del cavo. La stessa equazione può essere scritta in questo modo:

$$\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + \Omega^2\delta\theta = 0\,,$$

con $\Omega = \sqrt{4k/[3(M+3m)]}$, a cui corrisponde la frequenza di vibrazione

$$\boxed{\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{3\pi^2(M+3m)}} = 8.06 \text{ Hz}\,.}$$

[Notiamo tra parentesi che, se avessimo considerato anche le due forze peso della gru e della sonda, avremmo trovato un nuovo contributo lineare in $\delta\theta$ a destra dell'uguale nell'equazione del moto per le rotazioni attorno al punto O. Tale termine viene dal fatto che i momenti di queste due forze rispetto a O sono entrambi proporzionali a $\sin\theta$, e quando passiamo da θ a $\theta + \delta\theta$ otteniamo una corrispondente variazione dei momenti proporzionale $\delta\theta$ nel limite di piccole oscillazioni. Tuttavia, se si fa il conto, si vede che questo termine è trascurabile rispetto a quello dovuto al cavo, essendo il prodotto kL molto più grande sia di gM che di gm. Le forze peso quindi, potevamo essere effettivamente ignorate.]

Quando la sonda si trova in prossimità del foro, la lunghezza del tratto verticale di catena è circa $l = (\sqrt{3}/2)L$ e il periodo del pendolo è dato $2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{\sqrt{3}L/(2g)}$. L'inverso del periodo è la frequenza

$$\boxed{\nu_{\text{pend}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{\sqrt{3}L}} = 0.069\ \text{Hz}\,.}$$

Tra le due frequenze ci sono circa due ordini di grandezza di differenza. Questo è un bene, se si vuole evitare che le due oscillazioni entrino in risonanza tra loro, compromettendo la stabilità della struttura.

d) Appena il cavo si rompe, il bracco della gru ruota verso il suolo, portandosi dietro la sonda. L'equazione del moto che descrive la rotazione attorno al punto O nell'istante iniziale è

$$I\alpha = \frac{1}{4}LMg + \frac{1}{2}Lmg\,.$$

Dunque l'accelerazione angolare iniziale è

$$\boxed{\alpha = \frac{3g}{4L}\frac{M+2m}{M+3m} = 0.114\ \text{rad/s}^2}\,.$$

e) Per calcolare la velocità al momento dello schianto conviene usare la conservazione dell'energia meccanica, in particolare si ha che l'energia potenziale iniziale (con il riferimento del potenziale al suolo) si converte tutta in energia cinetica di rotazione:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(M+2m)gL = \frac{1}{2}I\omega^2\,,$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2I}(M+2m)gL} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g(M+2m)}{2L(M+3m)}}\,,$$

da cui segue la velocità della sonda

$$\boxed{v = L\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}gL(M+2m)}{2(M+3m)}} = 5.02\ \text{m/s}\,.}$$

Soluzione esercizio II.1

a) Il gas contenuto nel recipiente si trova in equilibrio termico a temperatura $T_0 = 303.15\,\mathrm{K}$ ed occupa un volume $V_0 = \sigma x = 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$. Dall'equazione di stato dei gas ideali ricaviamo la pressione del gas

$$\boxed{P_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = 1.26 \times 10^5\,\mathrm{Pa}\,.}$$

Il pistone è mantenuto in equilibrio grazie al bilanciamento delle forze che agiscono su di esso:

$$P_0\sigma = P_{\mathrm{ext}}\sigma + kx\,.$$

Da questa relazione possiamo ricavare la costante elastica k:

$$\boxed{k = (P_0 - P_{\mathrm{ext}})\frac{\sigma}{x} = 1.04 \times 10^3\,\mathrm{N/m}\,.}$$

b) Il gas viene fatto espandere dal volume $V_A = V_0$ al volume $V_B = 1.2V_0$, a temperatura costante T_0 e spostando lentamente il pistone verso destra. La trasformazione è isoterma reversibile. Essendo il gas ideale si ha

$$\boxed{\Delta U_{AB} = 0\,.}$$

Inoltre il calore assorbito è pari al lavoro eseguito, che si può calcolare in questo modo

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} PdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_0}{V}dV = nRT_0 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

da cui

$$\boxed{Q_{AB} = W_{AB} = nRT_0 \ln 1.2 = 229.8\,\mathrm{J}}$$

c) Se il contatto termico non c'è, la trasformazione diventa adiabatica e la stessa espansione porterà ad una temperatura più bassa a parità di volume finale. Possiamo calcolare la temperatura T_C sapendo che, in una adiabatica quasistatica di un gas ideale, si ha $TV^{\gamma-1} =$ costante, e dunque:

$$\boxed{T_C = \frac{T_0}{1.2^{\gamma-1}} = 281.8\,\mathrm{K}}$$

essendo $\gamma = 7/5$. Dalla temperatura finale si può risalire alla variazione di energia interna:

$$\boxed{\Delta U_{AC} = nc_v(T_C - T_0) = \frac{5}{4}R(T_C - T_0) = -221.9\,\mathrm{J}}$$

ed essendo $Q_{AC} = 0$ vale anche

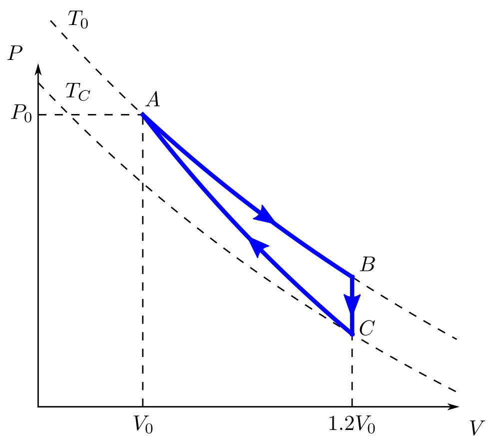
$$\boxed{W_{AC} = -\Delta U_{AC} = 221.9\,\mathrm{J}}$$

Ricordando inoltre che $\Delta U_{AC} = nc_v \Delta T$ ricaviamo la temperatura in C

$$\boxed{T_C = T_0 - \frac{W_{AC}}{nc_v} = 8.7\,^\circ\mathrm{C}.}$$

d) Osservando il ciclo sul diagramma P-V notiamo che il lavoro compiuto complessivamente è la differenza dei lavori calcolati in precedenza, $W = W_{AB} - W_{AC} = 7.9$ J, e che il calore assorbito dal gas sul ciclo corrisponde a quello assorbito durante l'espansione isoterma $Q = Q_{AB}$. Il rendimento è quindi

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q} = \frac{7.9}{229.8} = 3.4\%}$$



e) Nella trasformazione BC il gas viene raffreddato a volume costante da T_0 a T_C. La sua entropia diminuisce nel seguente modo:

$$\boxed{\Delta S^{BC}_{\mathrm{gas}} = nc_v \ln \frac{T_C}{T_0} = -0.76\,\mathrm{J/K}.}$$

L'entropia dell'universo non subirà variazioni essendo la trasformazione BC reversibile: $\boxed{\Delta S^{BC}_{\mathrm{uni}} = 0}$. In questo caso sarà l'ambiente (gli infiniti termostati necessari a raffreddare il gas) a prendersi l'entropia persa dal gas.

Soluzione esercizio II.2

a) La temperatura del gas nei due settori è la stessa, $T_0 = 298.15$ K, e il volume è $V_a = V_b = 2 \times 10^{-2}$ m^3. Per calcolare le due pressioni incognite basta usare l'equazione di stato dei gas ideali:

$$\boxed{P_{0b} = \frac{n_b R T_0}{V_b} = 1.24 \times 10^5 \, \text{Pa}}$$

e

$$\boxed{P_{0a} = \frac{n_a R T_0}{V_a} = \frac{n_a}{n_b} P_b^0 = 3.72 \times 10^5 \, \text{Pa} \, .}$$

b) La compressione del gas a avviene in maniera quasistatica e senza attriti, quindi in ogni istante della trasformazione e per ciascun settore del recipiente è possibile scrivere il primo principio in forma infinitesima: $\delta Q = dU + \delta W$ con $dU = nc_v dT$. Inoltre, la temperatura del gas nei due settori è sempre uguale. Il settore a varia il suo volume V_a, mentre V_b rimane costante. Dunque, il primo principio applicato al settore a fornisce il calore

$$\delta Q_a = n_a c_v dT + P_a dV_a$$

mentre per i settore b vale

$$\boxed{\delta Q_b = n_b c_v dT \, .}$$

Volendo esprimere δQ_a in termini delle variabili T e V_a, possiamo usare l'equazione di stato. Si ottiene

$$\boxed{\delta Q_a = n_a c_v dT + \frac{n_a R T}{V_a} dV_a \, .}$$

Dato che il gas in a si raffredda e diminuisce il suo volume, il calore δQ_a è negativo, cioè il calore fluisce da a a b, mentre il gas in b si riscalda e δQ_b è positivo.

c) Il recipiente che contiene i due gas è isolato termicamente; quindi sappiamo che i gas non scambiano calore con l'ambiente, ma solo tra di loro, e dunque $\delta Q = \delta Q_a + \delta Q_b = 0$, ovvero

$$n_a c_v dT + \frac{n_a R T}{V_a} dV_a + n_b c_v dT = 0 \, ,$$

da cui, per separazione di variabili, si ottiene l'equazione differenziale

$$(n_a + n_b) c_v \frac{dT}{T} = -n_a R \frac{dV_a}{V_a} \quad ,$$

ovvero

$$\frac{dT}{T} = -\beta \frac{dV_a}{V_a} \ ,$$

con $\beta = n_a R/[(n_a + n_b)c_v] = 1/2$. Integrando lungo la trasformazione si ottiene $\ln T = \ln V^{-\beta} =$ costante, che implica $TV^{\beta} =$ costante. Inserendo i valori delle coordinate iniziali e finali della trasformazione si ottiene

$$\boxed{T_f = T_0 \left(\frac{V_b}{(V_b/2)} \right)^{\beta} = \sqrt{2}\ T_0 = 421.6\,\mathrm{K}\,,}$$

che corrispondente ad un innalzamento della temperatura di entrambi i gas pari a $(T_f - T_0) = 123.45\,\mathrm{K}$.

d) Si può calcolare indifferentemente uno dei calori Q_a o Q_b, che sono uguali in modulo e opposti in segno. Ad esempio, considerando che il gas b mantiene il volume costante e quindi non compie lavoro, possiamo scrivere

$$\boxed{Q = Q_b = \Delta U_b = n_b c_v (T_f - T_0) = 1.54\,\mathrm{kJ}\,.}$$

e) Il gas effettua lavoro solo nel settore a. Per calcolarlo possiamo sfruttare il primo principio della termodinamica, $W_a = Q_a - \Delta U_a$, da cui

$$\boxed{W = W_a = Q_a - n_a c_v (T_f - T_0) = -(1.54 + 4.62)\ \mathrm{kJ} = -6.16\,\mathrm{kJ}\,,}$$

avendo usato la relazione $Q_a = -Q_b$.