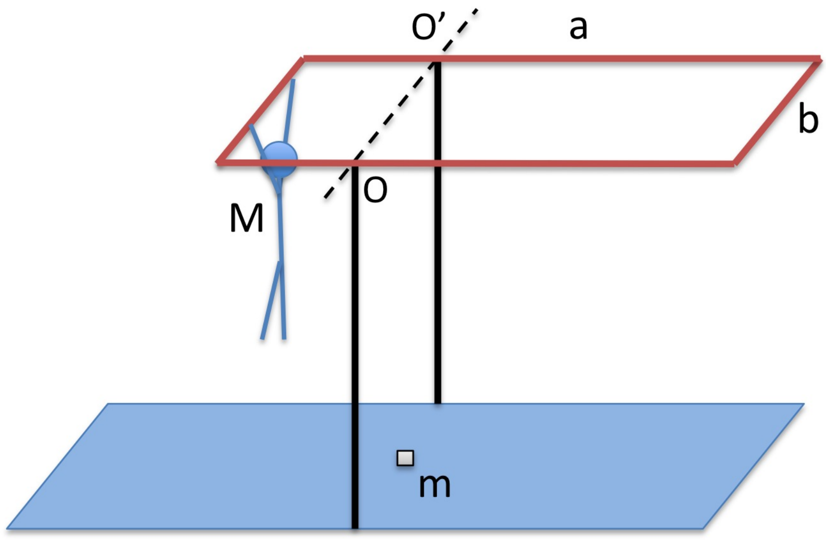
Fisica Generale I
A.A. 2016-2017, 9 giugno 2017

Esercizio I.1

Una struttura metallica rettangolare di lato maggiore $a = 3$ m e lato minore $b = 1$ m, è formata da un sottile tubo cilindrico pieno, di densità uniforme $\rho = 8$ g/cm^3 e sezione $\sigma = 10$ cm^2. La struttura è vincolata a ruotare attorno ad un asse parallelo al lato minore e passante per OO', a distanza $a/4$ dal bordo, come in figura. Inizialmente un atleta di massa M è appeso al lato corto e mantiene in equilibrio la struttura su un piano orizzontale.
a) Determinare M.
b) Determinare il momento d'inerzia I della struttura metallica rispetto all'asse di rotazione.
c) Si imposti l'equazione del moto della struttura dopo che l'atleta la lascia.
d) Qual è la velocità angolare della struttura quando essa raggiunge la posizione verticale?
e) Un cubetto di massa $m = 1.5$ kg viene colpito da fermo dalla struttura proprio quando arriva in posizione verticale. Sapendo che si tratta di un urto perfettamente elastico e che il cubo trasla senza rotolare, determinare la distanza massima percorsa sul piano orizzontale su cui si trova in funzione del coefficiente di attrito dinamico μ_d.



Esercizio I.2

Due masse puntiformi, $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 2$ kg, sono ferme su un piano liscio orizzontale. Tra le due è presente una molla di costante elastica $k = 30$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 20$ cm. Inizialmente la molla è tenuta compressa a causa di una corda che trattiene le masse tra loro ad una distanza $l = 15$ cm.

a) Se la corda si rompe improvvisamente, dopo quanto tempo le masse tornano a distanza l? Qual è la distanza massima che hanno raggiunto?

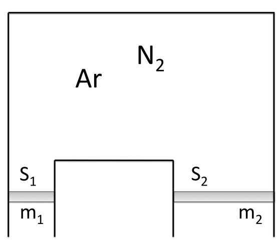
b) Supponiamo che, in un certo istante del moto oscillatorio, quando le masse si trovano a distanza l_0 e si stanno allontanando, si rompa anche la molla. Descrivere il moto successivo rispetto al piano.

c) Si consideri poi il caso in cui le due masse siano tenute a distanza l dalla corda, come prima, ma stavolta senza molla. Inoltre, le masse siano in rotazione sul piano orizzontale con velocità angolare costante $\omega = 3$ s^{-1}, rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa. Si scrivano le leggi orarie delle due masse in coordinate cartesiane; si calcoli la tensione del filo, la quantità di moto e il momento angolare del sistema.

d) In un certo istante, durante la rotazione, la corda si rompe. Come si muoveranno le masse da quel momento? Con quale velocità? Cosa cambia alla quantità di moto e al momento angolare del sistema?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1



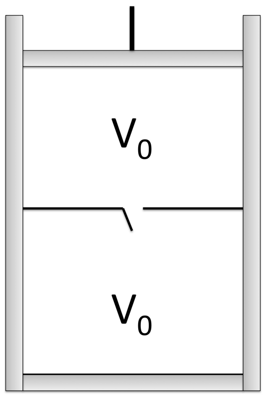
Il recipiente mostrato in figura è dotato, nella parte in basso, di due pistoni mobili di massa m_1 e m_2, rispettivamente di superfici S_1 e S_2, che separano il gas ideale contenuto all'interno dall'ambiente esterno, dove è presente una pressione costante P_{ext}.

a) Trovare la relazione che lega m_1, m_2, S_1 e S_2 quando il sistema si trova all'equilibrio.

b) Il gas contenuto all'interno del recipiente consiste di una miscela di azoto e argon, per un totale di 10 moli, inizialmente in equilibrio a temperatura $t_A = 20°$C. Il recipiente viene messo poi a contatto termico direttamente con un termostato a temperatura $t_B = 40°$ C e la miscela raggiunge un nuovo stato di equilibrio occupando un volume V_B. I due pistoni sono liberi scorrere su e giù. Si determini l'aumento percentuale di volume del gas.

c) Sapendo che il gas ha assorbito un calore pari a 1.272 kcal, determinare il numero di moli di azoto e di argon presenti nella miscela.
d) Qual è il lavoro compiuto dal gas e di quanto è variata la sua energia interna?
e) Calcolare di quanto è variata l'entropia del gas e quella dell'universo.

Esercizio II.2



Tre moli di gas ideale biatomico sono contenute in un recipiente perfettamente adiabatico, dotato di un pistone che può scorrere senza attrito facendo variare il volume occupato dal gas da un minimo di $V_0 = 80$ litri ad un massimo di $2V_0$. All'interno, una parete rigida dotata di una valvola consente o blocca il flusso di gas da un settore all'altro.

Inizialmente la valvola è aperta e il gas, in equilibrio termico a temperatura $t_0 = 10°$C, occupa tutto il volume $2V_0$. A questo punto si eseguono le seguenti operazioni: i) il pistone viene lentamente abbassato fino a comprimere il gas nella sola parte inferiore del recipiente, di volume V_0; ii) la valvola viene chiusa e il pistone riportato in alto nella posizione iniziale; iii) la valvola viene aperta e il gas viene così lasciato espandere liberamente nel volume $2V_0$. Questa procedura viene ripetuta per tre volte consecutive.
a) Determinare la temperatura finale del gas e la sua pressione.
b) Rappresentare l'intero processo su un diagramma PV e su un diagramma TS, distinguendo chiaramente le trasformazioni reversibili da quelle irreversibili.
c) Qual è il calore assorbito dal gas, il lavoro compiuto e la variazione di energia interna?
d) Stimare la variazione di entropia del gas e dell'universo.
e) Si supponga di voler riportare il gas nello stato iniziale mettendolo a contatto con una massa di ghiaccio m, inizialmente a temperatura $t_g = -10°$C. Il pistone viene mantenuto bloccato nella configurazione finale e la valvola viene mantenuta aperta. Determinare m.

$$[\lambda_f = 335 \text{ kJ/kg}, \ c_{\text{acqua}} = 4180 \text{ J/kg K}, \ c_{\text{ghiaccio}} = 2040 \text{ J/kg K}]$$

Soluzione esercizio I.1

a) La condizione di equilibrio è soddisfatta se la somma dei momenti delle forze esterne rispetto all'asse passante per OO' è nulla, quindi deve valere

$$Mg\frac{a}{4} = m_s g\frac{a}{4} \tag{1}$$

dove $m_s = 2(a+b)\sigma\rho$ è la massa dell'intera struttura metallica. Le due masse devono quindi uguagliarsi e si ha

$$\boxed{M = 2(a+b)\sigma\rho = 64\ \text{kg}}\ . \tag{2}$$

Si noti che con tale massa M il sistema si manterrebbe in equilibrio per qualsiasi angolo θ della struttura rispetto alla verticale.

b) Per calcolare il momento d'inerzia I della struttura rispetto all'asse OO' consideriamo singolarmente i contributi dei 4 cilindri sottili.
I cilindri corti sono paralleli all'asse di rotazione quindi il loro momento d'inerzia è equivalente a quello di una massa equivalente puntiforme alla stessa distanza dall'asse.

$$I_b^{(1)} = \sigma\rho b\left(\frac{a}{4}\right)^2 = 4.5\ \text{kg m}^2 \qquad \text{e} \qquad I_b^{(2)} = \sigma\rho b\left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 40.5\ \text{kg m}^2\ . \tag{3}$$

I cilindri lunghi ruotano attorno ad un asse a loro perpendicolare che però non passa per il loro centro di massa quindi utiliziamo il teorema di Steiner per calcolarne il momento d'inerzia rispetto all'asse OO'

$$I_a = \frac{1}{12}\sigma\rho a a^2 + \sigma\rho a\left(\frac{a}{4}\right)^2 = 31.5\ \text{kg m}^2\ . \tag{4}$$

Il momento d'inerzia totale è pari alla somma dei quattro momenti d'inerzia

$$\boxed{I = I_b^{(1)} + I_b^{(2)} + 2I_a = \sigma\rho a^2\left[\frac{5}{8}b + \frac{7}{24}a\right] = 108\ \text{kg m}^2}\ . \tag{5}$$

c) Dopo che l'atleta si stacca dalla struttura, questa inizia a oscillare attorno alla verticale. L'equazione che ne descrive il moto è $I\ddot{\theta} = \tau$, dove τ è il momento della forza peso della struttura metallica rispetto all'asse di rotazione. Quindi

$$\boxed{I\ddot{\theta} = -\frac{a(a+b)}{2}\sigma\rho g\sin\theta} \tag{6}$$

d) La struttura metallica parte da ferma in configurazione orizzontale e oscilla attorno alla posizione verticale, in corrispondenza della quale avrà energia potenziale gravitazionale minima. Per determinare la velocità angolare ω nella configurazione verticale sfruttiamo il fatto che l'energia meccanica si conserva e che il CM della struttura metallica si abbassa di una quota $a/4$:

$$\Delta U + \Delta E_K = -\sigma\rho g \frac{a(a+b)}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2 = 0 \tag{7}$$

da cui

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\sigma\rho g a(a+b)}{I}} = 2.95 \text{ rad/s}} \ . \tag{8}$$

e) L'urto è perfettamente elastico quindi si conserva l'energia cinetica del sistema struttura+massa puntiforme tra prima e dopo l'urto

$$E_K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega'^2 + \frac{1}{2} mv^2 \tag{9}$$

dove ω' e v sono la velocità angolare della struttura dopo l'urto e la velocità acquisita dalla massa puntiforme inizialmente in quiete.

Inoltre, rispetto all'asse OO' che vincola la struttura, si conserva anche il momento angolare, quindi

$$L = I\omega = I\omega' + mv\left(\frac{3}{4}a\right) \ . \tag{10}$$

Risolvendo il sistema di queste due ultime equazioni si possono ricavare le due incognite v e ω'. Nel nostro caso è sufficiente esprimere la velocità della massa puntiforme

$$v = \omega \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{9}{16}\frac{ma^2}{I} + 1} = 12.41 \text{ m/s} \ . \tag{11}$$

Nota la velocità iniziale è adesso possibile calcolare lo spazio percorso dopo l'urto al variare del coefficiente di attrito dinamico μ_d. L'energia cinetica iniziale viene dissipata completamente dalle forze di attrito

$$\frac{1}{2} mv^2 = E_K = W_{\text{attr}} = \int_0^{\Delta x} -\mu_d mg dx = -\mu_d mg \Delta x \tag{12}$$

Quindi

$$\boxed{\Delta x = \frac{v^2}{2\mu_d g} = \ 7.85 \text{ m}/\mu_d} \ . \tag{13}$$

Soluzione esercizio I.2

a) La molla presente tra le due masse è inizialmente compressa a causa della corda. Quando quest'ultima si spezza le particelle iniziano ad oscillare lungo la retta individuata dalle posizioni iniziali. Si tratta di un sistema di due particelle soggette alla sola forza interna. Per descrivere il moto conviene utilizzare la coordinata del centro di massa e quella del moto relativo:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad x_r = x_2 - x_1 \tag{14}$$

e le loro inverse

$$x_1 = x_{\mathrm{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_r, \quad x_2 = x_{\mathrm{cm}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_r \; . \tag{15}$$

Indicando con $M = m_1 + m_2$ la massa totale e con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 1.2$ kg la massa ridotta del sistema, possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$M\ddot{x}_{\mathrm{cm}} = F_{\mathrm{ext}} = 0 \tag{16}$$

$$\mu \ddot{x}_r = F_{\mathrm{int}} = -k(x_r - l_0) \; . \tag{17}$$

Non sono presenti forze esterne orizzontali quindi il centro di massa era fermo e tale rimane. Per la coordinata relativa invece abbiamo

$$\ddot{x}_r = -\frac{k}{\mu}(x_r - l_0) \; , \tag{18}$$

che, considerando anche le condizioni iniziali $x_r(0) = l$, $\dot{x}_r(0) = 0$, ha soluzione

$$x_r(t) = l_0 + (l - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t \; . \tag{19}$$

Il tempo che le particelle impiegano a tornare nella configurazione iniziale coincide con il periodo di oscillazione, che vale

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 1.26 \text{ s}} \tag{20}$$

mentre la distanza massima raggiunta è

$$\boxed{x_{r,\mathrm{max}} = 2l_0 - l = 25 \text{ cm}} \; . \tag{21}$$

b) Se la molla si rompe quando le masse sono a distanza l_0, tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica

$$\frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{22}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità dei dischetti rispetto al centro di massa che, come abbiamo detto prima, è fermo, quindi solidale al piano.

Per sapere come si distribuisce l'energia tra le due particelle occorre imporre anche la conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \; . \tag{23}$$

Risolvendo il sistema otteniamo le velocità dei dischetti

$$v_1 = -\sqrt{\mu k}\frac{(l_0 - l)}{m_1} \quad ; \qquad v_2 = \sqrt{\mu k}\frac{(l_0 - l)}{m_2} \; . \tag{24}$$

Le leggi orarie che descrivono il moto rettilineo uniforme delle masse sono

$$\boxed{x_1(t) = x_1 + v_1 t \quad ; \qquad x_2(t) = x_2 + v_2 t} \; . \tag{25}$$

c) Come nel caso precedente, non ci sono forze esterne nel piano orizzontale quindi il centro di massa rimane in quiete. I dischetti ruotano attorno al centro di massa a velocità angolare ω descrivendo traiettorie circolari concentriche. La forza che li fa muovere su tali traiettorie è la tensione della corda, la cui direzione (comunque centrale, verso il centro di massa) varia nel tempo. Ad ogni istante le velocità sono date da $v_1 = \omega r_1$ e $v_2 = \omega r_2$, con $r_1 = -\frac{\mu}{m_1} l$ e $r_2 = \frac{\mu}{m_2} l$. Le leggi orarie sono date da

$$x_1(t) \quad = r_1 \cos \omega t \;\; ; \qquad y_1(t) \quad = r_1 \sin \omega t \tag{26}$$

$$x_2(t) \quad = -r_2 \cos \omega t \;\; ; \qquad y_2(t) \quad = -r_2 \sin \omega t \tag{27}$$

La tensione è uguale su tutta la corda e, mentre la sua direzione ruota sul piano orizzontale a velocità angolare ω, il suo modulo si mantiene costante nel tempo $T = m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2 = \mu \omega^2 l$:

$$\boxed{T = \mu \omega^2 l = 1.62 \text{ N}} \; . \tag{28}$$

La quantità di moto del sistema è nulla in ogni istante perché era nulla all'inizio e rimane costante nel tempo (il sistema è isolato):

$$\boxed{\vec{P} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = 0} \; , \tag{29}$$

Il momento angolare del sistema risulta uguale alla somma dei momenti angolari delle due masse

$$|\vec{L_1}| = m_1 |\vec{r_1} \times \vec{v_1}| = \frac{\mu^2}{m_1} l^2 \omega \; , \qquad |\vec{L_2}| = m_2 |\vec{r_2} \times \vec{v_2}| = \frac{\mu^2}{m_2} l^2 \omega \tag{30}$$

da cui

$$\boxed{|\vec{L}| = |\vec{L_1} + \vec{L_2}| = \mu l^2 \omega = 0.081 \text{ kg m}^2\text{/s}} \; . \tag{31}$$

d) Se la corda si rompe, le due masse proseguono di moto rettilineo uniforme con la velocità che avevano nel momento della rottura (sia intensità sia direzione). Quindi si osserveranno due traiettorie lineari su rette parallele che distano l, con velocità $v_1 = \omega r_1$ e $v_2 = \omega r_2$. Quantità di moto e momento angolare rimangono invariati.

Soluzione esercizio II.1

a) Ciascuno dei due pistoni è in equilibrio meccanico. La condizione di equilibrio tra le forze peso e le forze dovute alla pressione fornisce le due equazioni

$$P = P_{\rm ext} - \frac{m_1 g}{S_1}\ , \qquad P = P_{\rm ext} - \frac{m_2 g}{S_2}\ , \tag{32}$$

da cui si ottiene la relazione tra masse e superfici

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_1}{S_2}}\ . \tag{33}$$

b) Il gas subisce una trasformazione irreversibile, ma la pressione negli stati iniziale e finale è la stessa, quindi l'equazione di stato impone che

$$\frac{V}{T} = \text{cost}\ . \tag{34}$$

Le temperature iniziali e finali sono note. Per usarle nella relazione precedente è necessario convertirle in gradi Kelvin. La variazione percentuale di volume risulta essere

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V_A} = \frac{V_B}{V_A} - 1 = \frac{T_B}{T_A} - 1 = 6.8\%}\ . \tag{35}$$

c) Il numero di moli totale del gas è noto, $n = 10$ mol, e sappiamo che è composto da $n_{\rm Ar}$ di un gas perfetto monoatomico e da $n_{\rm N_2}$ di un gas perfetto biatomico, tali che

$$n = n_{\rm Ar} + n_{\rm N_2}\ . \tag{36}$$

Durante la trasformazione viene fornito al gas una quantità di calore $Q = 1.272$ kcal $= 5322$ J. Tenendo conto che il calore specifico a pressione costante è diverso per i due gas, possiamo scrivere

$$Q = \left(n_{\rm Ar}\frac{5}{2}R + n_{\rm N_2}\frac{7}{2}R\right)\Delta T\ . \tag{37}$$

Da queste due relazioni possiamo quindi determinare la composizione del gas

$$\boxed{n_{\mathrm{Ar}} = \frac{7}{2}n - \frac{Q}{R\Delta T} = 3 \text{ mol} \quad \text{e} \quad n_{\mathrm{N}_2} = n - n_{\mathrm{Ar}} = 7 \text{ mol}}\,. \tag{38}$$

d) Note le moli dei singoli gas, è semplice determinare la variazione di energia interna della miscela usando i calori specifici a volume costante

$$\Delta U = \Delta U_{\mathrm{Ar}} + \Delta U_{\mathrm{N}_2} = \left(n_{\mathrm{Ar}}\frac{3}{2}R + n_{\mathrm{N}_2}\frac{5}{2}R\right)\Delta T = 3658 \text{ J}\,. \tag{39}$$

Dal primo principio si deduce quindi che il lavoro compiuto dalla miscela è

$$\boxed{W = Q - \Delta U = 1664 \text{ J}}\,. \tag{40}$$

Si noti comunque che, essendo la pressione costante durante il processo di raffreddamento, il lavoro può essere espresso anche direttamente come $W = P\Delta V = nR\Delta T = 1663$ J.

e) La trasformazione avviene a pressione costante quindi possiamo scrivere la variazione di entropia del gas come somma delle variazioni di entropia dei due gas, usando l'espressione $nc_p \ln \frac{T_f}{T_i}$:

$$\boxed{\Delta S_{\mathrm{gas}} = n_{\mathrm{Ar}}\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n_{\mathrm{N}_2}\frac{7}{2}R\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 17.6 \text{ J/K}}\,. \tag{41}$$

L'ambiente è costituito dal serbatoio a temperatura $T_B = 313.15$ K e la sua varizione di entropia

$$\Delta S_{\mathrm{amb}} = -\frac{Q}{T_B} = -17.0 \text{ J/K}\,. \tag{42}$$

Sommando i due termini otteniamo la variazione di entropia dell'universo.

$$\boxed{\Delta S_{\mathrm{uni}} = \Delta S_{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{amb}} = 0.6 \text{ J/K}}\,. \tag{43}$$

Soluzione esercizio II.2

a) La prima trasformazione subita dal gas biatomico (γ =7/5) è una compressione adiabatica reversibile che ne dimezza il volume. Sfruttiamo l'equazione $TV^{\gamma-1}$ =costante, per scrivere

$$T_0(2V_0)^{\gamma-1} = T_1(V_0)^{\gamma-1} \tag{44}$$

da cui si ottiene la temperatura T_1 alla fine di questa prima trasformazione

$$T_1 = T_0 2^{\gamma-1} = 373.76 \text{ K}\,. \tag{45}$$

La seconda trasformazione è un'espansione libera adiabatica che riporta il gas al suo volume iniziale V_0. Sappiamo che in un'espansione libera il gas non compie lavoro e che essendo adiabatica non c'è scambio di calore, quindi non varia l'energia interna, né la temperatura. Ripetendo nuovamente tali operazioni meccaniche il gas arriva ad una temperatura

$$T_2 = T_1 2^{\gamma-1} = T_0 2^{2(\gamma-1)} = 493.36 \text{ K} . \tag{46}$$

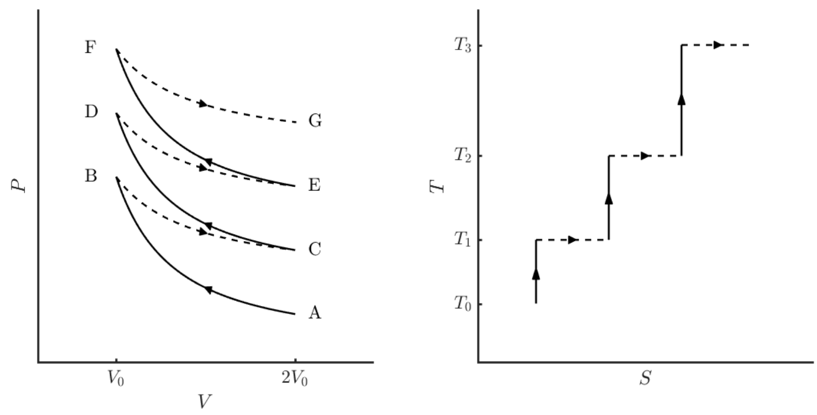
Il terzo processo di compressione reversibile ed espansione libera porta quindi alla temperatura finale

$$\boxed{T_3 = T_2 2^{\gamma-1} = T_0 2^{3(\gamma-1)} = 651.24 \text{ K}} . \tag{47}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti possiamo ricavare la pressione in questo stato finale

$$\boxed{P_G = \frac{nRT_3}{2V_0} = 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}} . \tag{48}$$

b)



c) Il gas non scambia calore con altri sistemi termodinamici quindi

$$\boxed{Q_{\text{ass}} = 0} . \tag{49}$$

Dal primo principio abbiamo che tutto il lavoro compiuto dal gas durante le tre compressioni adiabatiche va a finire in energia interna, essendo $W_{\text{ad}} = -\Delta U$. Quindi

$$\boxed{\Delta U = nc_v(T_3 - T_0) = 22.95 \text{ kJ}} . \tag{50}$$

In alternativa si può anche calcolare il lavoro $W_{\rm ad}$ integrando come al solito le curve di compressione adiabatica $P(V)$ e sommando i tre termini

$$\begin{aligned} W_{01} &= -\int_{T_0}^{T_1} nc_v dT = -nc_v(T_1 - T_0) && (51) \\ W_{12} &= -nc_v(T_2 - T_1) && (52) \\ W_{23} &= -nc_v(T_3 - T_2) && (53) \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{W_{\rm ad} = W_{01} + W_{12} + W_{23} = -nc_v(T_3 - T_0) = -22.95 \text{ kJ}} \tag{54}$$

che è consistente con il risultato di prima.

d) Il gas alla fine si trova ad occupare lo stesso volume che aveva all'inizio, $2V_0$ ma a una temperatura $T_3 = T_0 2^{3(\gamma-1)}$. La sua entropia è quindi aumentata di

$$\boxed{\Delta S_{\rm gas} = nc_v \ln 2^{3(\gamma-1)} = 3nR\ln 2 = 51.9 \text{ J/K}} \tag{55}$$

Il sistema è isolato, quindi

$$\boxed{\Delta S_{\rm uni} = \Delta S_{\rm gas} = 3nR\ln 2 = 51.9 \text{ J/K}} \tag{56}$$

e) I due sistemi non sono in equilibrio termico. Le 3 moli di gas biatomico sono a $T = T_3$ mentre il ghiaccio di massa m è a $T = T_g = 263.15$ K. Lo scambio termico permetterà di raggiungere l'equilibrio a $T = T_0$. Il gas cederà una quantità di calore

$$Q = nc_v|T_0 - T_3|\,, \tag{57}$$

mentre il calore assorbito dal ghiaccio va scomposto in un termine necessario per scaldarlo da T_g alla temperatura di fusione, un termine per farlo fondere completamente e uno per portarlo a T_0

$$Q = mc_g(T_f - T_g) + m\lambda_f + mc_a(T_0 - T_f)\,. \tag{58}$$

La massa di ghiaccio necessaria è quindi

$$\boxed{m = \frac{nc_v(T_3 - T_0)}{c_g(T_f - T_g) + \lambda_f + c_a(T_0 - T_f)} = 58 \text{ g}}\,. \tag{59}$$