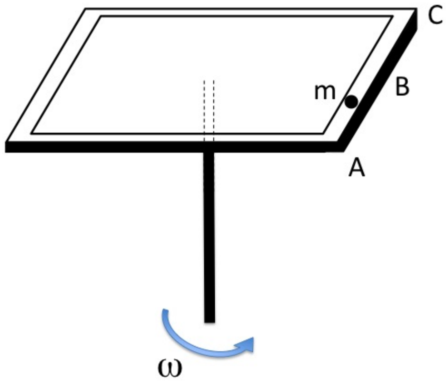
**Fisica Generale I**
**A.A. 2016-2017, 21 luglio 2017**

*Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso*

**Esercizio I.1**
Una trave sottile omogenea di massa $M$ e lunghezza $L$ è appesa al soffitto mediante due molle verticali di massa trascurabile. Le molle sono agganciate alla trave a una distanza pari a $L/3$ dal suo centro, una a sinistra e una a destra; hanno entrambe la stessa lunghezza a riposo $l_0$, ma costanti elastiche diverse, $k_1$ quella di sinistra e $k_2$ quella di destra. Un particella di massa $m$ è fissata rigidamente alla trave ad una distanza $x$ dal centro, in modo tale che il sistema rimanga in equilibrio con la trave in posizione orizzontale. Per convenzione $x$ sia presa positiva verso destra e, per comodità, introduciamo le quantità adimensionali $\eta = k_2/k_1$ e $\mu = M/m$ e chiamiamo $y = l - l_0$ l'allungamento delle molle.
**a)** Dopo aver fatto il disegno del sistema (leggendo bene il testo!), determinare il valore di $x$, in funzione di $\eta$ e $\mu$.
**b)** Disegnare l'andamento della funzione $x(\eta)$ nei casi particolari in cui $\mu = 1/2$ e $\mu = 5$, e dire quali sono i valori di $\eta$ ammessi dal problema nei due casi.
**c)** Mentre il sistema si trova in equilibrio, una pallina di massa $m_0$ colpisce la trave perpendicolarmente da sotto, con velocità $v_0$, nel punto corrispondente al centro di massa del sistema trave+massa. L'urto è elastico. Ricavare l'espressione della velocità con cui la trave inizia a muoversi verso l'alto.
**d)** Determinare il periodo di oscillazione del sistema nella direzione verticale in seguito all'urto.
**e)** Si cambi la configurazione del sistema in questo modo: la molla a sinistra sia sostituita da un'asta verticale rigida di lunghezza $l_0$ appesa al soffitto nello stesso punto in cui prima era appesa la molla, e agganciata alla trave all'estremo inferiore O tramite una cerniera che permette alla trave di ruotare senza attriti. La molla a destra rimanga dov'è, ma la sua costante elastica $k_2$ sia molto grande, in modo che la posizione di equilibrio della trave sia ancora quasi orizzontale. Si scriva, in funzione della posizione $x$, l'espressione del momento d'inerzia del sistema per rotazioni attorno ad O, e della frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.

**Esercizio I.2**

Un tavolino è composto da un piano orizzontale quadrato di 40 cm di lato, sostenuto da un perno centrale e verticale, attorno a cui il piano può ruotare senza attrito, come in figura. Lungo il bordo del piano c'è una scanalatura dentro la quale si muove una pallina di massa 300 g. La scanalatura ha un profilo a forma di ⊔ ed è appena più larga della pallina, in modo da poter essere considerata come una guida unidimensionale liscia. Supponiamo che il piano del tavolino sia tenuto in rotazione a velocità angolare $\omega_0 = 3$ rad/s fissata.




**a)** Determinare le reazioni vincolari esercitate sulla pallina quando questa si trova in quiete rispetto al tavolino rispettivamente nello spigolo A e nel punto medio B del lato AC. Indicare chiaramente il sistema di riferimento usato e le componenti dei vettori.

**b)** Scrivere l'energia potenziale associata alla forza apparente centrifuga nel sistema di riferimento in rotazione e rappresentarla graficamente in funzione della posizione lungo il lato AC.

**c)** Supponiamo che alla pallina, inizialmente in A, venga impressa una velocità $v_0$, misurata rispetto ad A. Quanto deve valere $v_0$ per consentirle di raggiungere lo spigolo in $C$?

**d)** Se la velocità iniziale è appena sufficiente a superare B, si scriva l'espressione della reazione vincolare sulla pallina in funzione della sua posizione durante il moto da $A$ a $C$.

**e)** Supponiamo invece che la pallina si trovi inizialmente nel punto B, ferma rispetto al tavolino e quest'ultimo stia ancora ruotando con $\omega_0 = 3$ rad/s. Supponiamo inoltre che, a differenza di prima, non agisca alcun momento di forze esterne sul perno centrale. Per effetto di una piccola perturbazione, la pallina inizia a muoversi verso lo spigolo C, dove si arresta a causa di un urto anelastico. Se il momento d'inerzia del tavolino è $I = 0.096$ kg m$^2$, qual è la sua velocità angolare finale?

*Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso*

**Esercizio II.1**

Si consideri una macchina termica reversibile che utilizza un gas ideale monoatomico e tre termostati a temperature $T_1 = 300$ K, $T_2 = 400$ K e $T_3 = 500$ K. Il ciclo inizia con una compressione isoterma a $T_1$ che riduce il volume di un fattore 2; poi il gas subisce una compressione adiabatica che lo porta a $T_3$; poi viene eseguita una sequenza di espansioni, isoterma a $T_3$, adiabatica fino a $T_2$, e isoterma a $T_2$, e di nuovo adiabatica fino allo stato iniziale del ciclo. La macchina assorbe un calore $Q_3 = 17$ kJ dal termostato a temperatura più alta. Il rendimento della macchina è $\eta = 0.35$.

**a)** Rappresentare graficamente il ciclo su un diagramma $PV$ e su un diagramma $TS$.

**b)** Determinare i calori $Q_1$ e $Q_2$ scambiati con gli altri due serbatoi.

**c)** Confrontare il rendimento della macchina con quello di una macchina di Carnot che utilizza termostati a $T_1$ e $T_3$ e con quello di una macchina di Carnot che opera tra $T_1$ e $T_2$.

**d)** Calcolare il numero di moli del gas.

**e)** Calcolare la variazione dell'energia interna e dell'entropia del gas sia durante la fase di compressione, sia durante l'espansione.

**Esercizio II.2**

Un escursionista s'incammina dal porto di Torre Annunziata verso la cima del Vesuvio. Nello zaino ha frutta, panini, bevande, un termometro e un recipiente cilindrico contenente elio. Il recipiente ha pareti diatermiche ed è chiuso da un pistone mobile di sezione $S = 100$ cm$^2$, che è trattenuto dall'interno tramite una molla fissata al fondo del recipiente; la molla ha costante elastica $k = 4000$ N/m e lunghezza a riposo trascurabile. Al porto la temperatura era di 25°C, la pressione atmosferica era $P_{\text{ext}}(0) = 1$ atm, e il gas occupava un volume di 1 litro.

**a)** Determinare la pressione iniziale del gas e il numero di moli.

**b)** Dopo tre ore e mezza, l'escursionista fa una sosta poco sotto il cono sommitale, ad un'altitudine $h = 1000$ m, la temperatura è scesa di 5 gradi e il volume occupato dal gas è 1.1 litri. Determinare la forza esercitata dalla molla, la pressione del gas e quella atmosferica.

**c)** Si calcoli la variazione di energia interna e di entropia del gas. Che valori avremmo trovato se il pistone fosse rimasto bloccato nella posizione iniziale?

**d)** In serata l'escursionista torna a Torre Annunziata per la stessa via. Osserva che la temperatura rimane costante lungo tutta la discesa. Supponendo che la pressione atmosferica (con profilo di temperatura costante) vari con la quota $h$ secondo la legge $P(h) = P_{\text{ext}}(0)e^{-\alpha h}$ con $\alpha = 2.1 \times 10^{-4}$ m$^{-1}$, determinare a quale quota il volume occupato dal gas è tornato ad essere 1 litro.

**Soluzione esercizio I.1**

**a)** Nella configurazione assegnata, in cui sia il soffitto che la trave sono orizzontali e le molle hanno la stessa lunghezza a riposo, la geometria impone che anche l'allungamento $y$ delle due molle sia lo stesso. Le forze elastiche agenti sulla trave sono date, in modulo, da $k_1 y$ e $k_2 y$ e sono dunque diverse se $k_1 \neq k_2$. Le condizioni per l'equilibrio si trovano imponendo che le componenti verticali delle forze elastiche e delle forze peso diano una somma algebrica nulla e che i momenti delle stesse forze, calcolati ad esempio rispetto al centro della trave, diano pure somma nulla. Dunque

$$k_1 y + k_2 y - (M+m)g = 0 \tag{1}$$

e

$$\frac{L}{3}(k_2 - k_1)y - mgx = 0 \; . \tag{2}$$

Dalla prima si ottiene

$$y = \frac{(M+m)}{(k_1+k_2)} g \tag{3}$$

che inserito nella seconda dà

$$x = \frac{L}{3}\frac{M+m}{m}\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1} \tag{4}$$

ovvero

$$\boxed{x(\eta,\mu) = \frac{L}{3}(\mu+1)\frac{\eta-1}{\eta+1}} \; . \tag{5}$$

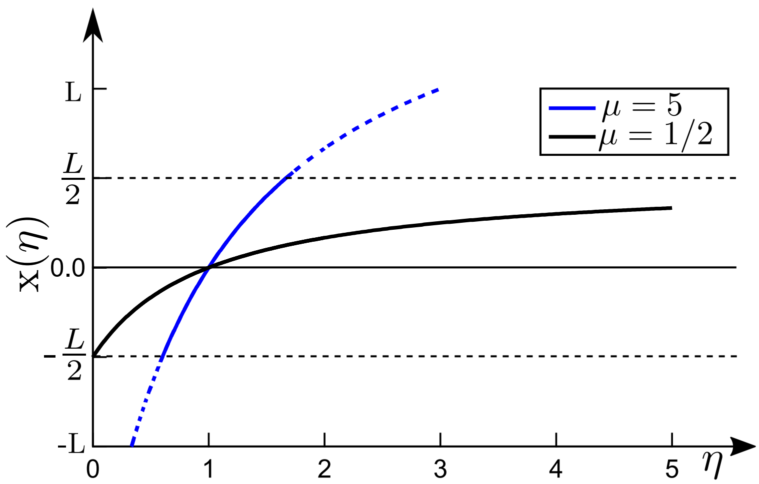
**b)** Le due curve cercate sono

$$\frac{x}{L}(\eta, 1/2) = \frac{1}{2}\frac{\eta-1}{\eta+1} \tag{6}$$

e

$$\frac{x}{L}(\eta, 5) = 2\frac{\eta-1}{\eta+1} \tag{7}$$

e sono mostrate in figura. Notiamo che nel primo caso $x$ rimane confinato tra $-L/2$, che è il limite per $\eta \to 0$, e $L/2$ che è il limite per $\eta \to \infty$. Dunque tutti i valori di $\eta$ sono ammessi. Nel secondo caso invece esistono valori di $\eta$ per i quali l'equilibrio richiederebbe $|x| > L/2$, che corrisponde a distanze dal centro maggiori dell'estensione della trave. In questi casi la condizione di equilibrio non è realizzabile. Facendo il calcolo esplicito si trova la condizione $3/5 < \eta < 5/3$. Il fatto che i due estremi siano l'uno l'inverso dell'altro segue dalla simmetria del sistema: il problema rimane identico se si invertono le molle e si cambia il segno di $x$. Inoltre, nel caso di molle identiche ($k_2 = k_1$, cioè $\eta = 1$) la massa $m$ dev'essere al centro della trave indipendentemente




dal suo valore.

**c)** Il sistema può essere considerato isolato durante l'urto (la forza di gravità è piccola rispetto alle forze impulsive) e quindi la quantità di moto totale si conserva. Inoltre tutte le velocità, prima e dopo l'urto sono verticali e l'urto non produce alcuna rotazione, in quanto avviene nel CM del sistema. Dunque:

$$m_0 v_0 = (M+m)V + m_0 v_0' \; . \tag{8}$$

L'urto è elastico e si conserva anche l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2} m_0 v_0'^2 \; . \tag{9}$$

Risolvendo il sistema si trova la velocità con cui la trave parte verso l'alto dopo l'urto:

$$\boxed{V = \frac{2 m_0 v_0}{m_0 + M + m}} \, . \tag{10}$$

**d)** Visto che la pallina colpisce il sistema trave+massa nel centro di massa complessivo, dopo l'urto si ha un moto traslatorio oscillante dell'intero sistema, senza rotazioni. La trave rimane orizzontale e la sua altezza obbedisce all'equazione del moto

$$(M+m)\ddot{y} = -(k_1 + k_2)y + (M+m)g. \tag{11}$$

La quota di equilibrio, che si trova annullando il membro di destra, è quella già calcolata al punto a). La pulsazione associata all'oscillazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M+m}} \tag{12}$$

da cui otteniamo il periodo

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k_1+k_2}}}\,. \tag{13}$$

**e)** Il punto O si trova a $L/3$ dal centro della trave, verso sinistra. Il momento d'inerzia si calcola some somma dei contributi della trave e della particella di massa $m$. Per la trave possiamo usare il teorema di Steiner. Tutte le distanze sono note, tranne $x$. Quindi abbiamo

$$\boxed{I(x) = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{9} + m\left(\frac{L}{3}+x\right)^2}\,. \tag{14}$$

Indichiamo con $\theta$ l'angolo, misurato in senso orario, che la trave forma rispetto alla direzione orizzontale. All'equilibrio, essendo per ipotesi $k_2$ molto grande, possiamo assumere che l'angolo sia $\theta \simeq 0$. In questa configurazione, l'equazione del moto per rotazioni attorno al punto O è

$$I(x)\ddot{\theta} = Mg\frac{L}{3} + mg\left(\frac{L}{3}+x\right) - \frac{4}{9}k_2L^2\theta \tag{15}$$

dove nell'ultimo termine abbiamo usato l'approssimazione di piccoli angoli nell'allungamento della molla, che in questo modo vale $(2/3)L\theta$. La pulsazione del moto oscillatorio è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{(4/9)k_2L^2}{I(x)}} \tag{16}$$

e la frequenza $\nu = \omega/2\pi$ diventa

$$\boxed{\nu = \frac{L}{3\pi}\sqrt{\frac{k_2}{I(x)}}}\,, \tag{17}$$

con $I(x)$ calcolato appena sopra.

### Soluzione esercizio I.2

**a)** Conviene decisamente mettersi nel sistema di riferimento in rotazione, solidale con il tavolino. Prendiamo il sistema di riferimento destrorso che ha l'origine O al centro del tavolino, l'asse $x$ perpendicolare al lato $AC$ (positivo verso $B$), l'asse $y$ parallelo ad $AC$ e l'asse $z$ verticale, positivo verso l'alto. I tre versori siano indicati con $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$.
La guida è liscia e dunque può esercitare solo reazioni vincolari perpendicolari

ad essa. Inoltre, quando la pallina è in quiete rispetto al tavolino, l'unica forza apparente che agisce è la forza centrifuga. L'unica forza reale, oltre alle reazioni vincolari, è la forza peso, ma questa è sempre bilanciata dalla da una reazione verticale

$$\boxed{\mathbf{N}_{\text{vert}} = mg\ \hat{\mathbf{z}} = (2.96\ \text{N})\ \hat{\mathbf{z}}} \tag{18}$$

dove $m = 0.3$ kg è la massa della pallina, e questa forza è la stessa in qualsiasi punto della guida e indipendente dallo stato di moto della pallina.
La forza centrifuga invece è sempre nel piano $x$-$y$ ed è radiale rispetto ad O. Quando la pallina si trova nello spigolo A, la distanza da O è $l/\sqrt{2}$, dove $l = 0.4$ m è il lato del quadrato, e la forza centrifuga, diretta lungo la diagonale del quadrato, vale in modulo $m\omega_0^2 l/\sqrt{2}$. Questa forza viene compensata da due forze vincolari esercitate dai due lati della guida, perpendicolari tra loro, a cui la pallina si appoggia, che possiamo scrivere nella forma

$$\boxed{\mathbf{N}_{\text{A}} = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 l\ (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})} \tag{19}$$

in modo che $|\mathbf{N}_{\text{A}}|$ vale proprio $m\omega_0^2 l/\sqrt{2} = 0.76$ N.
Quando la pallina si trova in B, invece, la distanza da O è $l/2$ e la forza centrifuga è perpendicolare al lato AC, così che possiamo scrivere la reazione vincolare nella forma

$$\boxed{\mathbf{N}_{\text{B}} = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 l\ \hat{\mathbf{x}} = -(0.54\ \text{N})\ \hat{\mathbf{x}}} \tag{20}$$

**b)** Se chiamiamo $\mathbf{r}$ il vettore che dà la posizione della pallina rispetto a O nel sistema di riferimento in rotazione, possiamo sempre esprimere la forza centrifuga nella forma

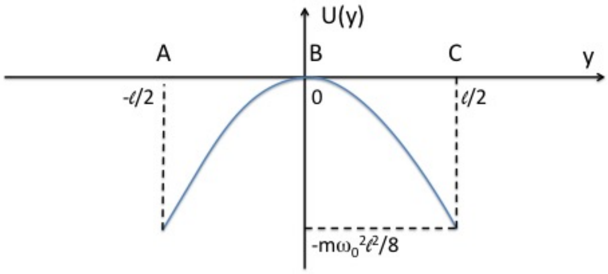
$$\mathbf{F} = m\omega_0^2 r\ \hat{\mathbf{r}} = m\omega_0^2 \mathbf{r} \tag{21}$$

indipendentemente da dove si trova a pallina nella guida. Se scomponiamo il vettore $\mathbf{r}$ nelle direzioni $x$ e $y$, abbiamo

$$\mathbf{F} = m\omega_0^2 \mathbf{r} = m\omega_0^2 \left( \frac{l}{2}\ \hat{\mathbf{x}} + y\ \hat{\mathbf{y}} \right) . \tag{22}$$

Dato che si tratta di una forza centrale, è anche conservativa. Possiamo calcolare l'energia potenziale per un valore generico della coordinata $y$ che dà la posizione della pallina lungo il lato $AC$. Prendiamo come riferimento il punto medio $B$ e calcoliamo

$$U(y) = -\int_0^y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y}' = -\int_0^y m\omega_0^2 y' dy' = \boxed{-\frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2} . \tag{23}$$




Con questa convenzione per la scelta della costante additiva arbitraria, l'energia potenziale vale 0 in B e vale $-(1/8)m\omega_0^2 l^2$ in $A$ e in $C$. La forma di $U(y)$ è quella di una parabola rivolta verso il basso, con il massimo in $B$ e i minimi negli spigoli.

**c)** Mettendoci nel sistema di riferimento rotante a $\omega_0$ possiamo scrivere l'energia meccanica della pallina come somma della sua energia cinetica e dell'energia potenziale associata alla forza centrifuga, trovata nel punto precedente. Le reazioni vincolari non eseguono lavoro, la forza peso e la forza di Coriolis sono entrambe perpendicolari allo spostamento; dunque l'energia meccanica si conserva. Per poter raggiungere e superare $B$, dove l'energia potenziale è nulla, la pallina in A deve avere energia meccanica positiva o al più nulla:

$$E(A) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{8}m\omega_0^2 l^2 \geq 0 \,, \tag{24}$$

da cui

$$\boxed{v_0 \geq v_{\min} = \frac{\omega_0 l}{2} = 0.6 \text{ m/s}} \tag{25}$$

**d)** Per calcolare la reazione vincolare occorre conoscere la forza di Coriolis, che è perpendicolare alla guida, essendo perpendicolare alla velocità. La velocità in funzione della posizione si calcola dalla conservazione dell'energia meccanica. Se la particella parte con la velocità $v_{\min}$ calcolata al punto precedente (con un $\epsilon$ di velocità in più se vogliamo che arrivi in $C$), l'energia meccanica è nulla e la sua conservazione dà

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2 = 0 \tag{26}$$

da cui si ricava la velocità della pallina in funzione di $y$:

$$v(y) = \omega_0 y \,. \tag{27}$$

Mentre la pallina va da $A$ a $C$, la forza di Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega_0}\times\mathbf{v}$ è perpendicolare alla guida con verso uscente dal tavolino. La sua componente $x$ è $2m\omega_0^2 y$. Anche la forza centrifuga ha una componente nella stessa direzione e con lo stesso verso, che vale $(1/2)m\omega_0^2 l$. Dunque la reazione vincolare complessiva sarà

$$\boxed{\mathbf{N}(y) = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 l \left(1 + 4\frac{y}{l}\right) \hat{\mathbf{x}}}\ . \tag{28}$$

**e)** Se non ci sono momenti di forze esterne sul perno del tavolino, ciò che rimane costante non è la velocità angolare, bensì il momento angolare del sistema, misurato nel sistema di riferimento inerziale. Il momento angolare iniziale, con la pallina che sta in $B$ e ruota assieme al tavolino con velocità angolare $\omega_0 = 3$ rad/s, vale

$$L_\mathrm{B} = \frac{1}{4} m\omega_0 l^2 + I\omega_0\ . \tag{29}$$

Quando la pallina è in $C$, il momento angolare è

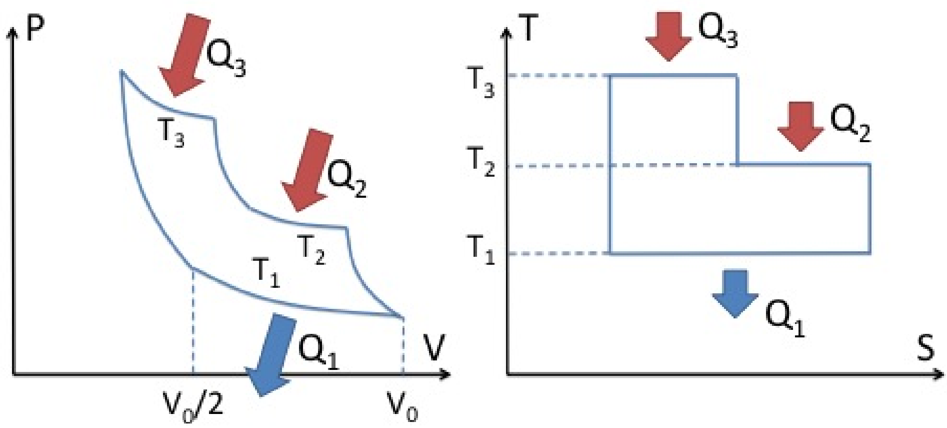
$$L_\mathrm{C} = \frac{1}{2} m\omega l^2 + I\omega \tag{30}$$

con $\omega$ da determinare. La conservazione del momento angolare impone che $L_\mathrm{C} = L_\mathrm{B}$, da cui

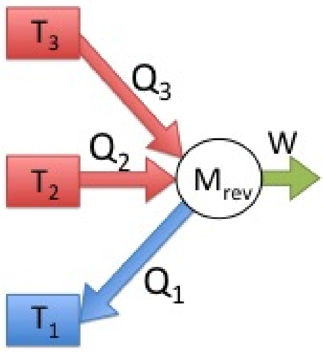
$$\boxed{\omega = \frac{1 + \frac{ml^2}{4I}}{1 + \frac{ml^2}{2I}}\, \omega_0 = 2.7 \text{ rad/s}}\ . \tag{31}$$

**Soluzione esercizio II.1**

**a)**




**b)** Le macchine termiche sono cicliche, quindi la sostanza usata viene ripor-




tata alle condizioni iniziali e

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = 0 \ . \tag{32}$$

Dal primo principio si può quindi dedurre che il lavoro compiuto dalla macchina (positivo e uguale all'area racchiusa nel diagramma $P$-$V$) equivale al calore totale scambiato con i termostati

$$W = Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \ , \tag{33}$$

dove $Q_1$ è negativo (calore ceduto dal gas), mentre $Q_2$ e $Q_3$ sono positivi (calori assorbiti dal gas).
Per determinare i calori scambiati con i serbatoi 1 e 2 sfruttiamo la conoscenza del rendimento della macchina

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_2 + Q_3} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2 + Q_3} \tag{34}$$

e, grazie alla reversibilità del ciclo, anche l'uguaglianza di Clausius $\sum_i (Q_i/T_i) = 0$, che dà

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0 \ . \tag{35}$$

In queste due equazioni, le quantità $Q_3$ e $\eta$ sono note, come pure le temperature. Possiamo quindi risolvere il sistema per le incognite $Q_1$ e $Q_2$. Dalla prima si ha

$$Q_1 = (\eta - 1)(Q_2 + Q_3) \tag{36}$$

che inserito nella seconda dà

$$\boxed{Q_2 = -Q_3 \, \frac{\eta - 1 + (T_1/T_3)}{\eta - 1 + (T_1/T_2)} = \frac{1}{2} Q_3 = 8.5 \ \ \text{kJ}} \ . \tag{37}$$

Sostituendolo nella precedente si ha

$$\boxed{Q_1 = -T_1 \left( \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \right) = -16.6 \text{ kJ}} \,. \tag{38}$$

**c)** I rendimenti della macchina di Carnot $M_{12}$ che utilizza i serbatoi $T_1$ e $T_2$ e dalle macchina di Carnot $M_{13}$ che usa $T_1$ e $T_3$ sono

$$\eta_{12} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.25 \qquad \eta_{13} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0.4 \,. \tag{39}$$

La nostra macchina $M$ con tre serbatoi ha un rendimento intermedio

$$\eta_{12} < \eta < \eta_{13}. \tag{40}$$

**d)** Per ottenere il numero di moli possiamo sfruttare il fatto che conosciamo il valore di $Q_1$, calcolato al punto b), e sappiamo anche il lo stesso calore può essere calcolato usando le proprietà della compressione isoterma:

$$|Q_1| = nRT_1 \ln 2 \qquad \longrightarrow \quad \boxed{n = \frac{|Q_1|}{RT_1 \ln 2} = 9.6 \text{ mol}} \,. \tag{41}$$

**e)** La variazione di energia interna è data da

$$\boxed{\Delta U_{\text{compr}} = nc_v(T_3 - T_1) = 23.9 \text{ kJ}} \tag{42}$$

e

$$\boxed{\Delta U_{\text{esp}} = -\Delta U_{\text{compr}} = -23.9 \text{ kJ}} \,. \tag{43}$$

La variazione di entropia del gas nella fase di compressione è data solamente dalla trasformazione isoterma

$$\boxed{\Delta S_{\text{compr}} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -nR \ln 2 = -55.3 \text{ J/K}} \,. \tag{44}$$

Come per l'energia interna, visto che l'entropia è una funzione di stato e che la macchina è ciclica non occorre calcolare la variazione di entropia sulle singole trasformazioni per conoscere quella totale nella fase di espansione. Abbiamo semplicemente

$$\boxed{\Delta S_{\text{esp}} = -\Delta S_{\text{compr}} = 55.3 \text{ J/K}} \,. \tag{45}$$

**Soluzione esercizio II.2**

**a)** Chiamiamo A lo stato di equilibrio iniziale del gas. La condizione di equilibrio meccanico del pistone è soddisfatta se la forza elastica compensa le forze di pressione interna (esercitata dal gas) e esterna (esercitata dall'aria). La forza elastica è data da $k$ volte l'allungamento, che coincide con l'altezza del pistone rispetto al fondo del recipiente; noto il volume e nota la sezione, l'altezza è $V/S$. Dunque

$$(P_A - P_{\text{ext}}(0))S = kV_A/S \tag{46}$$

ovvero

$$\boxed{P_A = P_{\text{ext}}(0) + \frac{k}{S^2}V_A = 141300 \text{ Pa} = 1.39 \text{ atm}} \tag{47}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$V_A P_A = nRT_A \tag{48}$$

con $T_A = 298.15$ K, ricaviamo il numero di moli

$$\boxed{n = \frac{V_A P_A}{RT_A} = 0.057 \text{ mol}}\,. \tag{49}$$

**b)** Quando il recipiente si trova a quota 1000 m (stato $B$) la temperatura è $T_B = T_A - 5\ K = 293.15$ K e il volume occupato $V_B = 1.1$ litri. Innanzitutto possiamo determinare la forza impressa dalla molla in questa configurazione

$$\boxed{F = k\frac{V_B}{S} = 440 \text{ N}} \tag{50}$$

Dall'equazione di stato possiamo dedurre la pressione del gas in $B$

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 126300 \text{ Pa} = 1.25 \text{ atm}} \tag{51}$$

Infine la pressione esterna può essere ricavata impostando l'equilibrio meccanico del pistone nella nuova configurazione

$$\boxed{P_{\text{ext}}(1000) = P_B - \frac{k}{S^2}V_B = 82300 \text{ Pa} = 0.81 \text{ atm}} \tag{52}$$

**c)** Il gas contenuto nel recipiente è ideale, quindi la sua energia interna varia solamente a causa della variazione della temperatura

$$\boxed{\Delta U = nc_v(T_B - T_A) = -3.55 \text{ J}} \tag{53}$$

Durante la trasformazione $AB$ il gas varia la temperatura, il volume e la pressione. Possiamo determinare la variazione di entropia nel seguente modo

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}} = nR\ln\frac{V_B}{V_A} + nc_v\ln\frac{T_B}{T_A} = 0.033\ \text{J/K}} \tag{54}$$

Se il pistone fosse stato mantenuto bloccato nella posizione iniziale la variazione di entropia sarebbe stata

$$\boxed{\Delta S' = nc_v\ln\frac{T_B}{T_A} = -0.012\ \text{J/K}} \tag{55}$$

**d)** Come abbiamo visto al punto b) Eq. (52), le pressioni esterna ed interna sono legate alla forza elastica in qualsiasi punto del percorso a quota $h$ dalla relazione

$$P_{\text{ext}}(h) = P(h) - \frac{kV(h)}{S^2}\ . \tag{56}$$

D'altra parte, la pressione del gas $P(h)$ può essere scritta in termini di $V(h)$ con l'equazione di stato. Tenendo conto che $T(h) = T_B$ =costante, si ha

$$P_{\text{ext}}(h) = \frac{nRT_B}{V(h)} - \frac{kV(h)}{S^2}\ . \tag{57}$$

Ora usiamo l'ipotesi che $P_{\text{ext}}(h) = P_{\text{ext}}e^{-\alpha h}$, e imponiamo che $V(h) = V_A$ in modo che

$$P_{\text{ext}}(0) = \frac{nRT_B}{V_A} - \frac{kV_A}{S^2} \tag{58}$$

da cui

$$\boxed{h = -\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{1}{P_{\text{ext}}(0)}\left(\frac{nRT_B}{V_A} - \frac{kV_A}{S^2}\right)\right] = 113\ \text{m}}\ . \tag{59}$$

Si noti che un valore più realistico per il coefficiente $\alpha$ sarebbe circa $1.2 \times 10^{-4}\ \text{m}^{-1}$. Nell'esercizio abbiamo usato un valore più grande per accentuare l'effetto nei valori numerici.