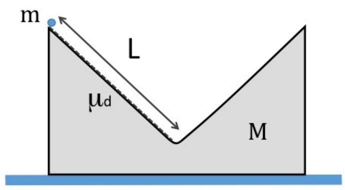
Fisica Generale I
A.A. 2016-2017, 30 agosto 2017

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Una particella di massa $m = 200$ g può muoversi lungo un profilo a V i cui lati obliqui hanno lunghezza $L = 50$ cm, sono inclinati a 45° e raccordati tra loro da un breve tratto curvilineo liscio. Il lato di sinistra è scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.5$, mentre quella di destra è liscio.

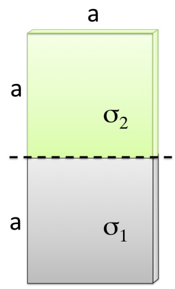


a) Il profilo è fisso e la particella si trova inizialmente in quiete all'estremo superiore sinistro da dove, in un dato istante, inizia a scivolare. Si calcoli l'accelerazione di caduta lungo il piano.
b) Si calcoli l'energia meccanica iniziale, il lavoro compiuto dall'attrito nella discesa e la distanza percorsa dalla particella nella prima salita sul lato destro.
c) La particella torna indietro e risale sul lato sinistro; fino a quale distanza dal vertice della V? Quante volte va avanti e indietro prima di fermarsi? Quanto spazio percorre complessivamente lungo il piano scabro?
d) Ora, invece, supponiamo che lo stesso profilo su cui si muove la particella corrisponda alla superficie superiore di un blocco rigido di massa $M = 2m$, libero di scivolare orizzontalmente sul pavimento liscio su cui poggia. Le condizioni iniziali siano le stesse di prima, con il blocco fermo. Quando la particella scende lungo il piano scabro con accelerazione a, il blocco accelera verso sinistra con accelerazione a_t. Si scriva la relazione che lega a_t alla reazione vincolare N esercitata dal piano sulla particella nel sistema di riferimento inerziale. Si scrivano le equazioni del moto della particella nel sistema di riferimento non-inerziale solidale con il blocco. Si ricavino i valori delle incognite a_t e N.
e) Con quale accelerazione la particella scivola e quanto tempo impiega ad arrivare in fondo?

Esercizio I.2

Un pannello rigido sottile è composto da due parti quadrate di lato $a = 30$ cm, affiancate come in figura e vincolate rigidamente tra di loro. Una delle due parti è di metallo ed ha una densità superficiale di massa $\sigma_1 = 16$ kg/m^2, mentre l'altra è di plastica, con una densità $\sigma_2 = 8$ kg/m^2. L'intera struttura è vincolata a ruotare liberamente attorno all'asse di congiunzione, disposto orizzontalmente.

a) Determinare la posizione del centro di massa e il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.
b) Il pannello, inizialmente fermo nella posizione di equilibrio, viene colpito elasticamente al centro della parte metallica da una particella di massa m con velocità orizzontale v_0, in direzione ortogonale alla superficie. Esprimere la velocità v_0' con cui la particella torna indietro e la velocità angolare ω del pannello subito dopo l'urto, in funzione di v_0 e dei parametri noti. Per quale valore di m la velocità della particella dopo l'urto risulta nulla indipendentemente da v_0?



c) Tracciare il grafico dell'energia potenziale del pannello in funzione dell'angolo rispetto alla verticale.
d) Scrivere l'approssimazione armonica dell'energia potenziale e determinare il periodo delle piccole oscillazioni.
e) Con $v_0 = 3.03$ m/s, quant'è il valore minimo di m affinché il pannello, dopo l'urto, compia un giro completo?

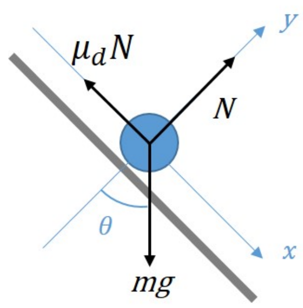
Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1
Una cabina a forma di parallelepipedo con altezza 2 m e lati di base 2 e 3 m viene utilizzata come cella frigorifera. La cabina si trova all'aperto, con temperatura esterna $t_{\text{ext}} = 0°\text{C}$ e pressione $P_{\text{ext}} = 9.5 \times 10^4$ Pa.
a) Inizialmente la porta è aperta e la cella frigorifera è spenta. Considerando l'aria come un gas ideale prevalentemente formato da azoto e ossigeno, quante moli sono presenti nella cabina?
b) Dopo aver ben chiuso la porta, in modo che la cabina sia a tenuta stagna, la cella frigorifera entra in azione e fa abbassare la temperatura interna fino a $-20°$C. Qual è la depressione che si crea seguito di questa operazione?
c) Determinare di quanto variano l'energia interna e l'entropia del gas nella cabina a seguito della trasformazione.
d) Se la portanza massima del tetto è di 1000 kg/m^2 e la nevicata più intensa registrata in zona ha portato 80 cm di neve di densità 250 kg/m^3, qual è la temperatura minima a cui si può raffreddare la cella per non rischiare il crollo del tetto, con le stesse P_{ext} e t_{ext}?
e) Nella condizione di funzionamento standard, in cui il frigorifero mantiene la temperatura interna a $-20°$C, si crea una piccola fessura nella guarnizione della porta; dalla fessura entra aria, molto lentamente, fino a che la pressione interna torna al livello di quella esterna. Di quanto è aumentato il numero di moli di gas presenti all'interno della cella?

Esercizio II.2
Un recipiente, di capacità termica trascurabile è chiuso in alto da un pistone mobile di massa trascurabile e area $S = 200\ \text{cm}^2$, libero di scorrere senza attriti. Le pareti del recipiente sono adiabatiche, eccetto il fondo, che poggia tramite una parete diatermica su un blocco di ghiaccio di massa $m = 3$ kg a temperatura 0°C. La pressione esterna è $P_{\text{ext}} = 10^5$ Pa costante. All'interno del recipiente sono contenute n moli di Argon. Esternamente, sopra al pistone e in direzione verticale, è presente una molla di costante elastica $k = 4000$ N/m, compressa a causa della presenza del gas all'interno del recipiente; la lunghezza a riposo della molla coincide con la configurazione in cui il recipiente è vuoto e il pistone è appoggiato sul fondo.
a) Inizialmente il sistema è in equilibrio e il gas occupa un volume di 8 litri. Determinare il numero di moli n.
b) Tramite una fonte esterna che fornisce reversibilmente del calore, il ghiaccio viene lentamente sciolto e l'acqua prodotta dalla fusione viene lentamente riscaldata fino a 12°C. Determinare il calore fornito al ghiaccio e all'acqua di fusione (al netto di quello che viene trasmesso al gas) e la loro corrispondente variazione entropia.
c) Il gas, rimasto a contatto termico con il ghiaccio e l'acqua durante tutto il tempo, si trova ora in un nuovo stato di equilibrio. Si scriva la funzione $P(V)$ durante il processo e si calcolino i valori delle coordinate termodinamiche finali.
d) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione, la sua variazione di energia interna e il calore assorbito.
e) In seguito, il pistone viene bloccato e l'acqua viene raffreddata lentamente fino a riportare il gas alla pressione iniziale. Infine, il volume del gas viene ridotto mediante una trasformazione isobara quasistatica fino a riportarlo allo stato iniziale. Rappresentare il ciclo del gas su un diagramma P-V e determinarne il rendimento.
[Nota: si usino i calori specifici dell'acqua e del ghiaccio, $c_a = 4.18$ kJ/kgK e $c_g = 2.04$ kJ/kgK, e il calore latente $\lambda_f = 333.5$ kJ/kg]

Soluzione esercizio I.1

a) Il primo quesito si riduce al problema dello scivolamento di una particella puntiforme lungo un piano inclinato scabro. Al solito conviene scegliere un sistema di riferimento inerziale con l'asse x parallelo al piano inclinato in modo da poter scrivere le equazioni del moto nella forma



$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\theta - \mu_d N \\ m\ddot{y} = N - mg\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{1}$$

con $\sin\theta = \cos\theta = \sqrt{2}/2$. Dalla seconda equazione si ricava la reazione vincolare $N = mg\cos\theta$, che inserita nella prima permette di calcolare l'accelerazione:

$$\boxed{a = \ddot{x} = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = \frac{g}{2\sqrt{2}} = 3.47\ \mathrm{m/s^2}}\,. \tag{2}$$

b) L'energia meccanica iniziale è solo potenziale. Ponendo il riferimento nel vertice della V e chiamata h la quota iniziale, vale

$$\boxed{E_0 = mgh = \frac{\sqrt{2}}{2}mgL = 0.693\ \mathrm{J}}\,. \tag{3}$$

La forza d'attrito è costante lungo tutta la discesa e il lavoro che esegue è

$$\boxed{W_{\mathrm{attr}} = \int_0^L -\mu_d mg\cos\theta\ dx = -\mu_d\frac{\sqrt{2}}{2}mgL = -\frac{1}{2}E_0 = -0.347\ \mathrm{J}}\,, \tag{4}$$

essendo $\mu_d = 0.5 = 1/2$. Dunque l'energia dissipata dall'attrito è la metà di quella che la particella aveva nel punto di partenza. Dato che nella risalita verso destra l'energia meccanica si conserva, e quella posseduta all'inizio della salita è metà di E_0, la particella risale solo fino a metà della quota iniziale:

$$\boxed{l_{\mathrm{destra}} = \frac{L}{2} = 25\ \mathrm{cm}} \tag{5}$$

c) Dopo essere salita a destra la particella ritorna nel vertice della V in verso opposto, avendo conservato un'energia $E_0/2$. Nel risalire la rampa di sinistra per un tratto l, questa energia viene in parte dissipata dall'attrito e in parte trasformata in energia potenziale. Il bilancio dell'energia è questo:

$$\frac{E_0}{2} = W_{\mathrm{attr}} + U(l) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mu_d mgl + \frac{\sqrt{2}}{2}mgl \tag{6}$$

ovvero

$$\frac{E_0}{2} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} mgl = \frac{3}{2}\frac{l}{L} E_0 \tag{7}$$

da cui

$$\boxed{l = \frac{L}{3}}\,. \tag{8}$$

Notiamo che il fatto che la particella risalga ad un terzo della quota iniziale non dipende dalla quota di partenza, ma è il risultato della scelta particolare dell'inclinazione del piano e del valore di μ_d. Quindi, ogni volta che la particella scende da sinistra, sale a destra e torna indietro, la quota a cui risale si riduce di un terzo. La distanza totale percorsa sul piano scabro sarà dunque data dalla serie geometrica

$$\boxed{l_{\text{tot}} = 2L \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - L = \frac{2L}{1-(1/3)} - L = 2L}\,. \tag{9}$$

Se moltiplichiamo questa distanza per il modulo della forza d'attrito, che è costante e vale $\mu_d(\sqrt{2}/2)mg = (\sqrt{2}/4)mg$, otteniamo il lavoro $W = (\sqrt{2}/2)mgL$. Ma questo è proprio uguale alla variazione di energia potenziale della particella dall'istante iniziale, in cui si trova nel vertice in alto, all'istante finale, dove si trova ferma in V. Dunque lo spazio percorso è proprio quello che permette di dissipare tutta l'energia iniziale tramite l'attrito e ciò avviene in infiniti movimenti avanti e indietro. Ovviamente, nel caso fisico reale, non tutte le assunzioni fatte per descrivere il moto in forma matematica rimarranno valide per sempre: quando l'ampiezza del movimento si riduce sotto una certa soglia, la trattazione del moto nei termini macroscopici di questo modello non sarà più applicabile.

d) La reazione vincolare, di modulo N, e la forza di attrito, di modulo $\mu_d N$, sono forze interne al sistema a due corpi costituito dal blocco e dalla particella. Non vi sono forze esterne con componenti orizzontali, per cui la componente orizzontale della quantità di moto si conserva, ed è nulla all'inizio. Le componenti orizzontali delle velocità della particella verso destra e del blocco verso sinistra devono quindi essere inversamente proporzionali alle rispettive masse (che è come dire che vale il principio di azione e reazione), e lo devono essere, di conseguenza, anche le due accelerazioni. L'accelerazione del blocco a_t è puramente orizzontale ed è prodotta dalle componenti orizzontali delle forze che la particella imprime sul blocco. Queste sono uguali e contrarie alla reazione vincolare esercitata dal piano (perpendicolarmente ad esso) e alla forza di attrito (parallelamente). Dunque possiamo scrivere l'equazione del moto in questo modo

$$Ma_t = -N\sin\theta + \mu_d N\cos\theta\,, \tag{10}$$

ovvero

$$\boxed{Ma_t = -\frac{\sqrt{2}}{4}N}, \tag{11}$$

dove sia N sia a_t sono incognite. Qui N indica il modulo (positivo) della reazione vincolare e le forze hanno segno positivo se agiscono verso destra. I segni sono consistenti con il fatto che la particella, gravando sul piano, spinge il blocco verso sinistra, mentre la forza di attrito tende a trascinarlo verso destra. L'effetto complessivo è quello di produrre un'accelerazione netta verso sinistra (negativa).
Se osserviamo il moto della particella nel sistema di riferimento non-inerziale solidale con il blocco, con l'asse x' orientato parallelamente al piano e l'asse y' perpendicolarmente, possiamo riscrivere le equazioni come al punto a), ma stavolta dobbiamo aggiungere la forza apparente $-ma_t$, orizzontale, associata all'accelerazione a_t:

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}' = mg\sin\theta - \mu_d N - ma_t\cos\theta \\ m\ddot{y}' = N - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta = 0 \end{cases}}. \tag{12}$$

Notiamo che, essendo a_t negativa nella nostra convenzione dei segni, allora la forza apparente sentita dalla particella è positiva, cioè verso destra, come deve essere. Anche in questo sistema di riferimento la componente dell'accelerazione perpendicolare al piano deve essere nulla. La seconda equazione ci dà quindi:

$$ma_t = \sqrt{2}N - mg \tag{13}$$

che è un'altra relazione tra le incognite N a a_t, in aggiunta all'equazione (11). Combinandole si possono ricavare i risultati

$$\boxed{a_t = -\frac{mg}{4M+m} = -\frac{g}{9} = -1.09 \text{ m/s}^2} \tag{14}$$

e

$$\boxed{N = \frac{4Mg}{9\sqrt{2}} = \frac{8mg}{9\sqrt{2}} = 1.23 \text{ N}}. \tag{15}$$

e) Conoscendo N e a_t possiamo inserirli nella prima equazione del moto in (12) per ricavare l'accelerazione con cui la particella scende lungo il piano:

$$\begin{aligned} ma' = m\ddot{x}' &= \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{1}{2}N + \frac{\sqrt{2}}{2}ma_t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{4}{9\sqrt{2}}mg + \frac{\sqrt{2}}{18}mg \end{aligned} \tag{16}$$

ovvero

$$\boxed{a' = \frac{\sqrt{2}}{3}g = 4.62 \text{ m/s}^2}. \tag{17}$$

Il tempo impiegato a scendere è quindi

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{a'}} = 0.46 \text{ s}}\,. \tag{18}$$

Soluzione esercizio I.2

a) La distribuzione di massa non è simmetrica rispetto all'asse di rotazione e quindi il centro di massa si troverà fuori dall'asse, dalla parte del pannello metallico. Le due parti quadrate del pannello hanno masse $m_1 = \sigma_1 a^2 = 1.44$ kg e $m_2 = \sigma_2 a^2 = 0.72$ kg. Il centro di massa di ciascuna parte si trova nel centro del rispettivo quadrato, a distanza $\pm a/2$ dall'asse. Quindi, chiamata z la quota verticale, il centro di massa si trova in

$$\boxed{z_{CM} = \frac{\frac{a}{2}m_2 - \frac{a}{2}m_1}{m_1 + m_2} = \frac{a}{2}\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = -\frac{a}{6} = -5 \text{ cm}} \tag{19}$$

Per calcolare il momento d'inerzia complessivo rispetto all'asse di rotazione consideriamo il fatto che ciascuna delle due parti quadrate è equivalente a un'asta rigida con la stessa massa, in rotazione attorno ad un suo estremo (per dimostrarlo basta immaginare la piastra come l'insieme di tante aste sottili, ciascuna di massa m_i, di pari lunghezza, e sommare i momenti d'inerzia di queste). Si ottiene

$$\boxed{I = \frac{1}{3}m_1 a^2 + \frac{1}{3}m_2 a^2 = 0.0648 \text{ kg}\,\text{m}^2} \tag{20}$$

b) L'urto è elastico quindi si conserva l'energia cinetica

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\,. \tag{21}$$

Dato che il sistema è vincolato all'asse e le forze vincolari non possono essere trascurate durante l'urto, la quantità di moto del sistema non si conserva. Si conserva invece il momento angolare calcolato rispetto ad un qualsiasi punto dell'asse, dato che le forze esterne hanno momento di forze nullo. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{a}{2}mv_0 = \frac{a}{2}mv_0' + I\omega\,. \tag{22}$$

Abbiamo così due equazioni per le incognite v' e ω. Dopo alcuni passaggi algebrici troviamo:

$$\boxed{v_0' = v_0\frac{\left(1 - \frac{4I}{ma^2}\right)}{\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)} \quad ; \qquad \omega = \frac{4v_0/a}{1 + \frac{4I}{ma^2}}} \tag{23}$$

e notiamo che per

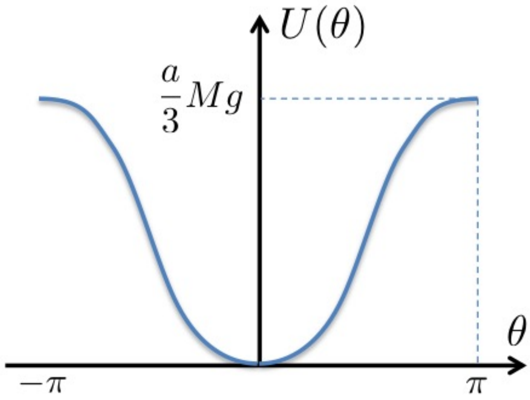
$$\boxed{m = \frac{4I}{a^2} = 2.88 \text{ kg}} \tag{24}$$

la velocità della particella dopo l'urto è nulla.

c) L'energia potenziale del pannello associata alla forza di gravità è la stessa che avrebbe una particella puntiforme di massa totale $M = m_1 + m_2$ concentrata nel centro di massa. Quest'ultimo, come calcolato al punto a), si trova a distanza $a/6$ dall'asse di rotazione. Se il pannello è ruotato di un angolo θ rispetto alla verticale, la sua energia potenziale è

$$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{6} Mga(1 - \cos\theta)} \tag{25}$$

avendo scelto come riferimento per l'energia potenziale il punto in cui si trova il CM quando il pannello sta sulla verticale ($\theta = 0$). Il grafico corrispondente è mostrato in figura.



d) L'approssimazione armonica coincide con lo sviluppo al secondo ordine dell'energia potenziale $U(\theta)$ intorno a $\theta = 0$:

$$\boxed{U_{\mathrm{arm}}(\theta) = \frac{1}{12} Mga\theta^2} . \tag{26}$$

L'equazione del moto del pannello, per rotazioni attorno all'asse, è

$$I\ddot{\theta} = -Mg\frac{a}{6}\sin\theta . \tag{27}$$

Per piccoli angoli (quando $\sin\theta \simeq \theta$) l'equazione diventa quella di un oscillatore armonico

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0 , \tag{28}$$

con pulsazione $\Omega = \sqrt{Mga/(6I)}$, da cui si ricava il periodo

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{6I}{Mga}} = 1.55 \text{ s}}\,. \tag{29}$$

e) Dopo l'urto il pannello parte con energia cinetica $(1/2)I\omega^2$, dove ω è stato calcolato al punto b) in funzione dei parametri del problema. Ruotando, l'energia cinetica si converte in energia potenziale. Il giro completo avviene se l'energia cinetica iniziale è maggiore o uguale al valore massimo dell'energia potenziale, che è $U(\pi) = Mga/3$. Assegnata la velocità iniziale della particella v_0 si vede facilmente che ω cresce con il crescere dei valori di m. Esiste dunque un valore minimo di m oltre il quale il pannello compie giri completi. Il valore minimo è fissato dalla relazione

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{3}Mga\,, \tag{30}$$

ovvero

$$\frac{16Iv_0^2}{2a^2(1+\frac{4I}{ma^2})^2} = \frac{1}{3}Mga\,, \tag{31}$$

da cui

$$\frac{4I}{ma^2} = \sqrt{\frac{24Iv_0^2}{Mga^3}} - 1\,. \tag{32}$$

Inserendo a destra i valori numerici si trova

$$\frac{4I}{ma^2} = 4 \tag{33}$$

e dunque

$$\boxed{m = \frac{I}{a^2} = 0.72 \text{ kg}}\,. \tag{34}$$

Soluzione esercizio II.1

a) Consideriamo l'aria come un gas ideale biatomico. Il volume interno alla cabina è $V = 12$ m^3 e pressione e temperatura coincidono con quelle esterne. Quindi è semplice determinare il numero di moli d'aria che vi sono contenute usando l'equazione di stato dopo aver convertito la temperatura da Celsius a Kelvin:

$$\boxed{n = \frac{P_{\text{ext}}V}{RT_{\text{ext}}} = 502 \text{ mol}}\,. \tag{35}$$

b) Le n moli di gas contenute nella cabina subiscono una trasformazione isocora (P/T =costante), in cui la temperatura viene abbassata di 20 gradi, da $T_1 = 273.15$ K a $T_2 = 253.15$ K, e conseguentemente si abbassa anche la pressione in proporzione:

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} = 8.8 \times 10^4 \text{ Pa}. \tag{36}$$

La depressione è quindi

$$\boxed{\Delta P = P_2 - P_1 = -7 \times 10^3 \text{ Pa}}. \tag{37}$$

c) Nel raffreddamento isocoro la variazione di energia interna del gas è

$$\boxed{\Delta U = n c_V (T_2 - T_1) = n \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) = -209 \text{ kJ}} \tag{38}$$

dove per il calore specifico a volume costante abbiamo usato quello per un gas ideale biatomico. La variazione di entropia varia è

$$\boxed{\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{n c_V dT}{T} = n c_V \ln \frac{T_2}{T_1} = -793 \text{ J/K}}. \tag{39}$$

d) La portanza massima del tetto è 1000 kg/m^2. Una quantità di neve pari a 80 cm di densità 250 kg/m^3 e equivale ad una massa di neve di 200 kg/m^2. Resta dunque un margine di ulteriore carico ammissibile fino a 800 kg/m^2. Moltiplicando questa portanza per l'accelerazione di gravità si ottiene il valore in N/m^2 della massima decompressione accettabile: $|\Delta P_{\max}| = 7848$ Pa. La decompressione dipende dalla differenza di temperatura tra esterno e interno come si è visto al punto b). In particolare, se la temperatura esterna è $T_1 = 273.15$ K e quella interna è T, la pressione interna è data da

$$P = P_{\text{ext}} \frac{T}{T_1} \tag{40}$$

e la decompressione è

$$|\Delta P| = |P - P_{\text{ext}}| = P_{\text{ext}} \left(1 - \frac{T}{T_1}\right). \tag{41}$$

Inserendo $|\Delta P_{\max}|$ e risolvendo l'equazione per T, si trova:

$$\boxed{T_{\min} = T_1 \left(1 - \frac{|\Delta P_{\max}|}{P_{\text{ext}}}\right) = 251 \text{ K}}. \tag{42}$$

Al di sotto di questo valore, la combinazione della neve e della differenza di pressione tra interno ed esterno, farebbe collassare la cabina.

e) Dopo l'ingresso dell'aria dalla fessura, nella nuova situazione di equilibrio, dentro la cella si avranno $n' = n + \Delta n$ moli d'aria alla pressione P_{ext} e alla temperatura T_2. L'equazione di stato dice che

$$P_{\text{ext}}V = (n + \Delta n)RT_2 \tag{43}$$

da cui

$$\boxed{\Delta n = \frac{P_{\text{ext}}V}{RT_2} - n = 40 \text{ mol}}\,. \tag{44}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Nello stato iniziale, che chiamiamo A, possiamo scrivere la condizione di equilibrio delle forze che agiscono sul pistone:

$$P_A S = P_{\text{ext}} S + k\Delta x\,. \tag{45}$$

La compressione della molla coincide con l'altezza del recipiente occupato dal gas: $\Delta x = V_A/S$. Dunque abbiamo

$$P_A = P_{\text{ext}} + \frac{kV_A}{S^2} = 1.80 \times 10^5 \text{ Pa} \tag{46}$$

e dall'equazione di stato ricaviamo quindi il numero di moli del gas:

$$\boxed{n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 0.634 \text{ mol}}\,. \tag{47}$$

b) Al ghiaccio, inizialmente a temperatura $T_A = 273.15$ K, viene fornito lentamente del calore che lo porta prima a sciogliersi a temperatura costante T_A e poi a riscaldare l'acqua di fusione fino a $T_B = 285.15$ K. La quantità di calore necessaria è

$$\boxed{Q_0 = m\lambda_f + mc_a(T_B - T_A) = 1151 \text{ kJ}}\,. \tag{48}$$

e la variazione di entropia corrispondente è

$$\boxed{\Delta S = \frac{m\lambda_f}{T_A} + mc_a \ln\frac{T_B}{T_A} = 4.202 \text{ kJ/K}}\,. \tag{49}$$

c) Nella fase di scioglimento del ghiaccio a temperatura costante, nulla cambia nello stato del gas. Invece, quando l'acqua di fusione si riscalda, anche il gas segue lo stesso incremento di temperatura. Il processo è lento, e può essere visto come una trasformazione quasistatica. In ogni istante, l'equilibrio meccanico del pistone impone che

$$\boxed{P(V) = P_{\text{ext}} + \frac{k}{S^2}V}\,, \tag{50}$$

da cui si vede chiaramente che nel diagramma P-V la trasformazione è rappresentata da un segmento rettilineo con coefficiente angolare k/S^2. Alla fine del processo si avrà

$$P_B = P_{\text{ext}} + \frac{k}{S^2}V_B\,, \tag{51}$$

e inoltre vale l'equazione di stato

$$P_B V_B = nRT_B\,, \tag{52}$$

con $T_B = 285.15$ K. Dalle due equazioni si ottiene

$$\frac{k}{S^2}V_B^2 + P_{\text{ext}}V_B - nRT_B = 0\,, \tag{53}$$

che risolta dà

$$\boxed{V_B = \frac{-P_{\text{ext}} + \sqrt{P_{\text{ext}}^2 + 4nRT_B k/S^2}}{2k/S^2} = 8.24 \text{ litri}} \tag{54}$$

e

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 1.824 \times 10^5 \text{ Pa}} \tag{55}$$

d) Note le coordinate termodinamiche e la funzione $P(V)$, possiamo calcolare il lavoro nella fase in cui la temperatura passa da T_A a T_B, integrando esplicitamente:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P(V)dV = \int_{V_A}^{V_B} \left(P_{\text{ext}} + \frac{k}{S^2}V\right) dV \tag{56}$$

ovvero

$$\boxed{W_{AB} = P_{\text{ext}}(V_B - V_A) + \frac{k}{2S^2}(V_B^2 - V_A^2) = 43.5 \text{ J}}\,. \tag{57}$$

La variazione di energia interna è semplicemente

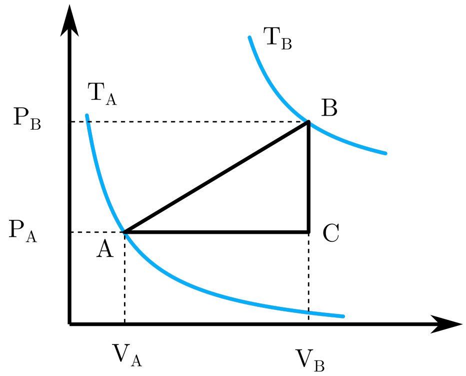
$$\boxed{\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = 94.9 \text{ J}}\,, \tag{58}$$

e il primo principio ci fornisce poi il calore assorbito

$$\boxed{Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = 138.4 \text{ J}}\,. \tag{59}$$

Notiamo anche che questo calore è molto più piccolo del calore assorbito dall'acqua di fusione, $mc_a(T_B - T_A)$, consistentemente con il fatto che la capacità termica del gas è molto più piccola di quella dell'acqua.

e) Il diagramma P-V è mostrato in figura.



Il rendimento del ciclo è, per definizione, il rapporto tra il lavoro complessivamente svolto dal gas e il calore che ha assorbito. In questo caso il calore viene assorbito dal gas solamente durante la trasformazione AB e lo abbiamo già calcolato al punto precedente. Invece il lavoro complessivo è l'area del triangolo nel diagramma P-V:

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}(P_B - P_A)(V_B - V_A) = 0.288 \text{ J}\,, \tag{60}$$

Dunque il rendimento vale

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{AB}} = 2.08 \times 10^{-3}}\,. \tag{61}$$

Il minimo che si possa dire è che non si tratta certo di una macchina termica efficiente. Una macchina ideale di Carnot che lavorasse con due soli termostati alle due temperature estreme usate dal nostro ciclo, T_A e T_B, avrebbe almeno un rendimento del 4.4%, che non è gran che, ma è comunque molto meglio del due e rotti per mille che abbiamo trovato qui.