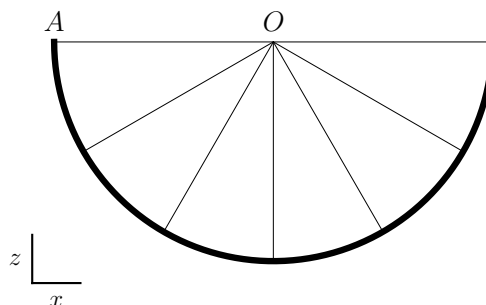


Fisica Generale I
A.A. 2017-2018, 12 luglio 2018

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

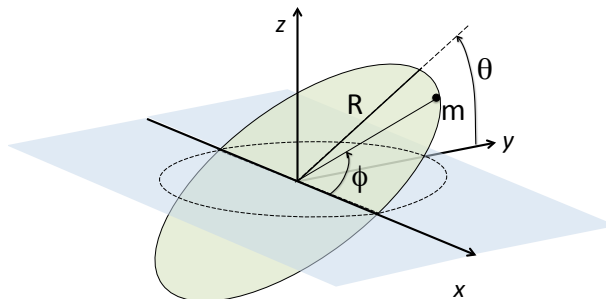
Una mezza ruota di massa M è appesa ad una parete verticale e vincolata a ruotare nel piano (x, z) attorno al proprio centro $O = (0, 0)$, come in figura. Tutta la massa è concentrata nell'arco sottile di raggio $R = 40$ cm, avente densità di massa uniforme, mentre i raggi hanno una massa trascurabile.



- a) Determinare le coordinate (x_{CM}, z_{CM}) del centro di massa all'equilibrio e la sua distanza R_{CM} da O .
- b) Scrivere l'espressione del momento di inerzia I del sistema rispetto ad O .
- c) La ruota sia mossa in modo da farle compiere piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio. Se θ è l'angolo formato dal raggio passante per il centro di massa e la verticale, scrivere l'equazione del moto della ruota e calcolare il periodo.
- d) Sia $M = 2$ kg. La ruota sia inizialmente ferma all'equilibrio. Al tempo $t = 0$ una particella di massa $m = 0.5$ kg colpisce la ruota nel punto A provenendo verticalmente dall'alto con velocità $v_0 = 5$ m/s. L'urto sia elastico, e sia v la velocità della particella dopo l'urto. Calcolare la velocità angolare ω della ruota immediatamente dopo l'urto e la sua energia meccanica E .
- e) Tracciare in un grafico l'energia potenziale della ruota in funzione dell'angolo θ e indicare nel grafico il valore di E . Calcolare l'ampiezza dell'oscillazione della ruota a seguito dell'urto e confrontarla con l'ampiezza che avrebbe se valesse l'approssimazione armonica, a parità di E .
- f) Se l'urto fosse perfettamente anelastico e la particella rimanesse attaccata alla ruota in A , e vi fosse anche attrito nel perno in O , che tipo di moto (qualitativamente) si osserverebbe? Si tracci (qualitativamente) il grafico di $\theta(t)$.

Esercizio I.2

Un disco di raggio $R = 91$ cm è inclinato rispetto all'orizzonte di un angolo θ . Si prenda un sistema di assi cartesiani (destrorso) che abbia l'asse z verticale e il piano $x-y$ orizzontale e orientato in modo tale che il punto del disco più in alto si trovi nel primo quadrante del piano $y-z$. Una particella poggia sul disco in prossimità del suo bordo e il



raggio del disco passante per la particella forma un angolo ϕ (tracciato sul disco) rispetto all'asse x . Tra la particella e il piano agisce un attrito radente con coefficienti di attrito statico e dinamico $\mu_s = 0.4$ e $\mu_d = 0.3$.

a) Determinare l'inclinazione critica θ_c oltre la quale la particella inizia a scivolare. Se l'angolo è quello critico e la particella, a seguito di una piccola perturbazione, inizia a muoversi, calcolare l'accelerazione con cui scivola.

b) In un tempo t la particella raggiunge il bordo opposto del disco e cade. Calcolare t nel caso in cui la posizione iniziale della particella corrisponda all'angolo $\phi = \pi/2$ e disegnare il grafico di $t(\phi)$ nell'intervallo $(0, \pi/2)$.

c) Supponiamo che il disco abbia inclinazione $\theta = \theta_c$, calcolata in precedenza, e che la particella sia ferma nel punto più alto del disco. Il disco stia anche ruotando con velocità angolare Ω attorno all'asse verticale z . Calcolare la velocità angolare critica Ω_c oltre la quale la particella cade dal bordo.

d) Supponiamo che la velocità angolare di rotazione sia $\Omega = 3$ rad/s e che, come prima, la particella si trovi nel punto più alto del disco. Si scriva l'espressione dell'energia potenziale della particella nel sistema di riferimento in rotazione, in funzione della posizione r misurata lungo il diametro del disco nel piano $y-z$, con $r = 0$ al centro. Se ne tracci il grafico. In assenza di attrito, esisterebbero punti di equilibrio? Dove? Di che tipo?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

In un recipiente adiabatico sono presenti due gas ideali, separati da una parete interna di area $S = 200$ cm², anch'essa adiabatica. Nel settore di sinistra sono presenti $n_1 = 3$ moli di un gas monoatomico, mentre in quello di destra ci sono $n_2 = 4$ moli di un gas biatomico. La parete è inizialmente bloccata in modo da far occupare un volume $V = 70$ litri al gas monoatomico e il doppio all'altro. I gas si trovano entrambi ad una temperatura iniziale $T_0 = 340$ K.

a) Determinare la forza (modulo e verso) necessaria a mantenere la parete in tale posizione.

b) La parete viene poi spostata lentamente al centro del recipiente. Quale

differenza di temperatura raggiungeranno i due gas?

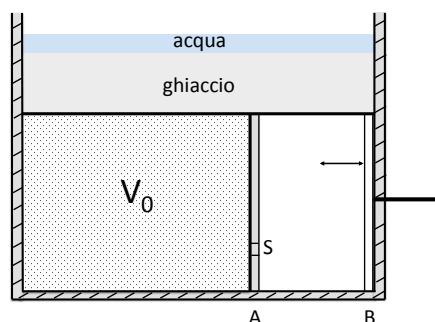
c) Si supponga adesso di mettere i due gas a contatto termico eliminando l'isolante dalla parete interna. Calcolare la nuova temperatura di equilibrio.

d) Di quanto è variata l'energia interna dell'intero sistema tra la configurazione iniziale e quella finale?

e) Calcolare la variazione di entropia sull'intero processo di ciascuno dei due gas e quella dell'universo commentando il risultato ottenuto.

Esercizio II.2

Il recipiente mostrato in figura contiene 2 moli di un gas ideale. La parete superiore tiene il gas in contatto termico con una miscela di acqua e ghiaccio di 10 kg ($\lambda_f = 333.5$ kJ/kg). Inizialmente la miscela è composta all'80% di ghiaccio e il gas è confinato in un volume $V_0 = 13$ litri da una parete fissa A. In un certo istante, uno sportellino (S in figura) si apre e il gas fluisce anche nel settore vuoto fino ad occupare complessivamente un volume $V = 1.5V_0$. L'espansione avviene molto più rapidamente dei tempi tipici con cui il calore viene scambiato tra il gas e la miscela di acqua e ghiaccio. Successivamente un pistone mobile laterale B ricomprime lentamente il gas nel volume iniziale V_0 , lo sportellino viene richiuso e il pistone torna a fine corsa a destra.



a) Determinare il calore ceduto dal gas e la massa di ghiaccio che viene sciolta durante il ciclo descritto. Qual è il numero massimo di cicli che si possono effettuare a 0°C ?

b) Calcolare la variazione di entropia dell'universo nel singolo ciclo.

Si pensi adesso di ripetere la procedura descritta sopra, ma utilizzando un gas reale per cui vale l'equazione di stato $(P + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = nRT$ e l'espressione per l'energia interna $U = nc_vT - \frac{n^2a}{V} + \text{cost.}$, con $a = 0.4$ Jm³/mol² e $b = 5 \times 10^{-5}$ m³/mol. Per il gas reale si consideri un calore specifico $c_v = \frac{5}{2}R$. Come nel caso precedente, dopo l'apertura dello sportellino S il gas compie un'espansione libera e adiabatica, poi termalizza con la miscela ed infine viene ricompresso in maniera quasistatica.

c) Qual è la temperatura del gas immediatamente dopo l'espansione?

d) Quanto calore viene scambiato con la miscela durante la fase di termalizzazione isocora?

e) Rappresentare il ciclo sul diagramma P - V e calcolare quanto ghiaccio si scioglie in un ciclo.

Soluzione esercizio I.1

a) Nella posizione di equilibrio, ovvero quella riportata in figura nel testo del problema, la coordinata x_{CM} del centro di massa è necessariamente uguale a zero, dato che il sistema è simmetrico rispetto allo scambio di x con $-x$:

$$\boxed{x_{\text{CM}} = 0} .$$

Per calcolare la coordinata z_{CM} , usiamo la definizione

$$z_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

e la trasformiamo in forma integrale sostituendo le masse m_i con la massa infinitesima $dm = \rho S R d\varphi$ compresa in un arco infinitesimo $d\varphi$, con densità ρ e sezione S costanti. La massa totale è l'integrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho S R d\varphi$. Ad un arco φ corrisponde una quota $z = -R \cos \varphi$ e la quota del CM diventa

$$z_{\text{CM}} = -\frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \rho S R^2 \cos \varphi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \rho S R} = -R \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi}$$

ovvero

$$z_{\text{CM}} = -\frac{R}{\pi} [\sin \varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{2R}{\pi},$$

Dunque

$$\boxed{z_{\text{CM}} = -\frac{2R}{\pi} = -25.5 \text{ cm}} ,$$

e la distanza del centro di massa da O è

$$\boxed{R_{\text{CM}} = |z_{\text{CM}}| = 25.5 \text{ cm}} .$$

b) Tutta la massa del corpo è concentrata a distanza R da O , perciò il momento d'inerzia è lo stesso di un punto materiale posto a questa distanza dal centro:

$$\boxed{I = MR^2}$$

c) Se il raggio passante per il CM si trova ad un angolo θ dalla verticale, il momento della forza peso che agisce sul corpo è

$$-MgR_{\text{CM}} \sin \theta ,$$

e l'equazione del moto per rotazioni attorno ad O è la seguente

$$\boxed{I\ddot{\theta} = -MgR_{\text{CM}} \sin \theta} .$$

Per piccole oscillazioni intorno a $\theta = 0$, $\sin \theta$ può essere approssimato con θ , trovando

$$\ddot{\theta} = -\frac{MgR_{\text{CM}}}{I}\theta ,$$

da cui ricaviamo il periodo delle piccole oscillazioni

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR_{\text{CM}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{Mg} \frac{\pi}{2R}} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{2g}} = 1.59 \text{ s} .$$

d) Si tratta di un urto in cui è coinvolto un corpo rigido vincolato. La reazione vincolare non è trascurabile durante l'urto e, dunque, la quantità di moto totale del sistema non si conserva. Si conserva invece il momento angolare totale calcolato rispetto al punto O ,

$$mv_0R = mvR + I\omega ,$$

e anche l'energia cinetica totale,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 .$$

Usando l'espressione del momento d'inerzia $I = MR^2$, otteniamo

$$\begin{cases} v_0^2 = v^2 + \frac{M}{m}R^2\omega^2 \\ v_0 = v + \frac{M}{m}R\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 = v_0^2 - \frac{M}{m}R^2\omega^2 \\ v = v_0 - \frac{M}{m}R\omega . \end{cases}$$

Inserendo la seconda nella prima e svolgendo i calcoli si trova

$$\omega = \frac{2v_0/R}{1 + \frac{M}{m}} = 5 \text{ rad/s}$$

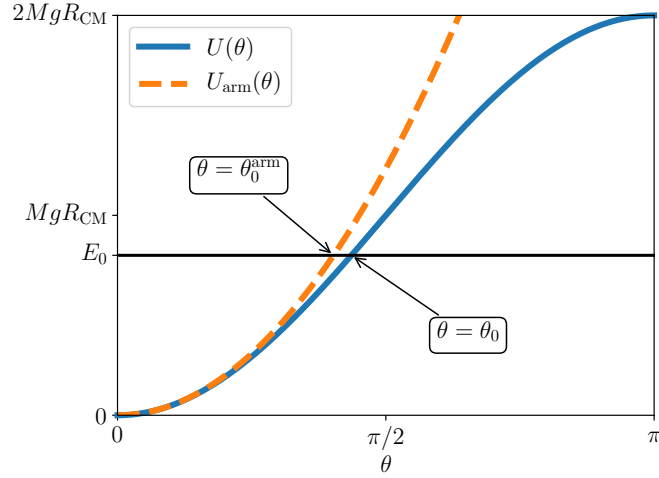
e l'energia meccanica corrispondente è

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = 4 \text{ J} .$$

e) L'energia potenziale della ruota in funzione di θ è data dall'espressione

$$U(\theta) = MgR_{\text{CM}}(1 - \cos \theta) ,$$

in cui $R_{\text{CM}}(1 - \cos \theta)$ è la coordinata z del centro di massa per un dato angolo θ . La funzione $U(\theta)$ è mostrata in figura. Il suo valore massimo è $U_{\text{max}} = 2MgR_{\text{CM}} = 10 \text{ J}$.



L'ampiezza di oscillazione θ_0 dopo l'urto si può trovare imponendo l'uguaglianza tra l'energia meccanica iniziale [$E = (1/2)I\omega^2 = 4 \text{ J}$] e l'energia potenziale per $\theta = \theta_0$:

$$MgR_{\text{CM}}(1 - \cos \theta_0) = E \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_0 = 1 - \frac{E}{MgR_{\text{CM}}},$$

da cui troviamo

$$\theta_0 = \arccos\left(1 - \frac{E}{MgR_{\text{CM}}}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\pi E}{2MgR}\right) = 1.37 \text{ rad} = 78.5^\circ.$$

L'approssimazione armonica di $U(\theta)$, valida per θ piccolo ($1 - \cos \theta \simeq \theta^2/2$), è

$$U_{\text{arm}}(\theta) = \frac{1}{2}MgR_{\text{CM}}\theta^2.$$

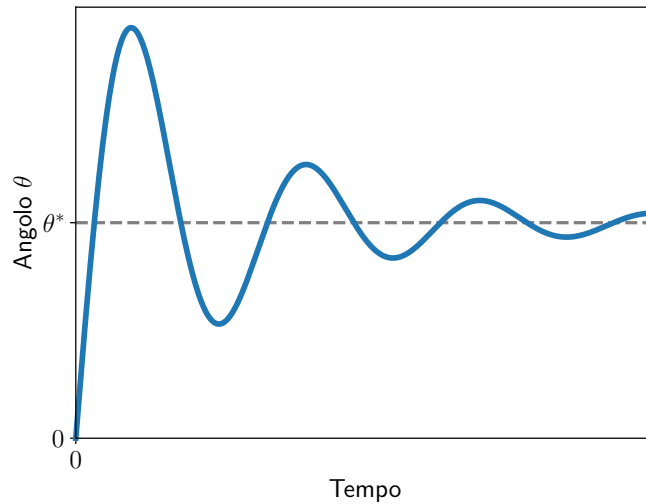
In questo caso, imponendo $U_{\text{arm}}(\theta_0^{\text{arm}}) = E$ troviamo

$$\theta_0^{\text{arm}} = \sqrt{\frac{2E}{MgR_{\text{CM}}}} = \sqrt{\frac{\pi E}{MgR}} = 1.27 \text{ rad} = 72.5^\circ,$$

e notiamo che $\theta_0^{\text{arm}} < \theta_0$ (come mostrato in figura). La differenza è relativamente piccola, ma non trascurabile, consistentemente con il fatto che il rapporto $E/U_{\text{max}} = 2/5$ non è un numero molto piccolo rispetto a 1.

f) Se la particella di massa m rimanesse attaccata alla ruota in A , questo modificherebbe la posizione del centro di massa (il corpo non sarebbe più simmetrico rispetto allo scambio di x con $-x$, e quindi x_{CM} non sarebbe più uguale a zero). Perciò la posizione di equilibrio corrisponderebbe a un angolo θ^* diverso da zero.

Se inoltre vi fosse anche attrito nel perno in O , le oscillazioni in θ (a partire dalla condizione iniziale $\theta = 0$) sarebbero smorzate, e per tempi lunghi l'angolo θ tenderebbe al suo valore di equilibrio θ^* , come mostrato in figura.



Soluzione esercizio I.2

a) Si tratta di un problema di equilibrio statico per una particella su un piano inclinato. La componente della forza peso perpendicolare al disco è $mg \cos \theta$ ed è compensata dalla reazione vincolare $N = mg \cos \theta$ in direzione opposta. La forza di attrito parallela al piano del disco necessaria a mantenere in equilibrio la particella è uguale alla componente della forza peso nella stessa direzione $F = mg \sin \theta$. Questa forza non può superare il valore imposto dal coefficiente di attrito statico, $F \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$ e l'uguaglianza vale nel caso critico $\theta = \theta_c$, da cui

$$mg \sin \theta_c = \mu_s mg \cos \theta_c \quad (1)$$

ovvero $\tan \theta_c = \mu_s$, e

$$\boxed{\theta_c = \text{atan } \mu_s = 21.8^\circ} . \quad (2)$$

Questo valore non dipende dalla posizione della particella sul disco perché, indipendentemente dall'angolo ϕ , le forze stanno tutte nello stesso piano verticale e l'angolo ϕ determina unicamente la quota a cui la particella si trova sul disco, che è del tutto indifferente per questo calcolo.

Se l'inclinazione è θ_c e la particella inizia a muoversi, a quel punto entra in gioco l'attrito dinamico. L'accelerazione lungo il disco, a , sarà causata dalla differenza tra la componente parallela al disco della forza peso, $mg \sin \theta_c$, e

la forza di attrito dinamico $\mu_d N = \mu_d mg \cos \theta_c$, in modo che

$$a = g(\sin \theta_c - \mu_d \cos \theta_c) = g \sin \theta_c (1 - \mu_d / \mu_s) = \frac{g}{4} \sin \theta_c = 0.91 \text{ m/s}^2 . \quad (3)$$

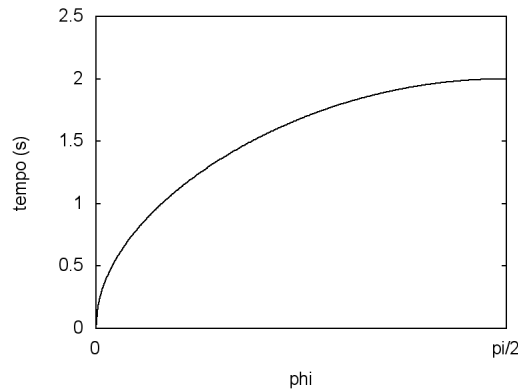
b) Abbiamo appena calcolato l'accelerazione di scivolamento. Per conoscere il tempo che la particella impiega a raggiungere il bordo opposto ci serve sapere lo spazio s da percorrere tra bordo e bordo, in modo da poter applicare la relazione $s = (1/2)at^2$ e ricavare t . Se la posizione iniziale della particella corrisponde all'angolo $\phi = \pi/2$, il calcolo è semplice dato che il moto avviene lungo un diametro e la particella percorre una distanza $s = 2R$. Dunque

$$t(\pi/2) = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{4R}{a}} = \sqrt{\frac{16R}{g \sin \theta_c}} = 2 \text{ s} . \quad (4)$$

Se invece l'angolo ϕ è compreso tra 0 e $\pi/2$ allora la distanza da percorrere da bordo a bordo è la lunghezza di un segmento secante il cerchio di raggio R in direzione perpendicolare all'asse x , che vale $s(\phi) = 2R \sin \phi$, da cui

$$t(\phi) = \sqrt{\frac{2s(\phi)}{a}} = \sqrt{\frac{4R \sin \phi}{a}} = \sqrt{\frac{16R \sin \phi}{g \sin \theta_c}} = t(\pi/2) \sqrt{\sin \phi} . \quad (5)$$

Il grafico corrispondente è mostrato in figura.



c) Ora il disco, oltre ad essere inclinato, ruota. Conviene osservare il tutto dal sistema di riferimento solidale con il disco in rotazione. Chiamiamo ancora x e y gli assi orizzontali di questo sistema di riferimento. Dovremo però introdurre anche le forze apparenti. Dato che la particella è ferma, si tratta di introdurre solo la forza centrifuga, che in modulo vale $m\Omega^2 R \cos \theta_c$,

è orizzontale e radiale rispetto all'asse z . Dato che la particella si trova nel punto più alto, la direzione radiale coincide con l'asse y e tutte le forze in gioco stanno nel piano $y-z$. Come prima possiamo decomporle nella direzione parallela e perpendicolare al piano, semplicemente aggiungendo alla condizioni di equilibrio trattata al punto a) anche le due componenti della forza centrifuga. Perpendicolarmente al piano otteniamo la condizione

$$N - mg \cos \theta_c - m\Omega^2 R \cos \theta_c \sin \theta_c = 0 \quad (6)$$

dove il segno positivo vale per forze dirette verso l'alto, mentre nella direzione parallela al piano del disco abbiamo

$$F - mg \sin \theta_c + m\Omega^2 R \cos^2 \theta_c = 0. \quad (7)$$

dove il segno positivo vale per forze radiali repulsive rispetto all'asse di rotazione. Se $\Omega = 0$, la forza F è positiva e trattiene la particella rispetto al peso che la farebbe scivolare. Se $\Omega \neq 0$, la forza centrifuga contribuisce a compensare il peso e, quindi fa decrescere l'attrito; ma al crescere di Ω la componente parallela della forza centrifuga supera quella della forza peso e, a questo punto, la forza di attrito deve invertire il verso, diventando negativa. Raggiunto un certo valore critico Ω_c , l'attrito non ce la fa più a trattenere la particella, che esce dal bordo e cade. Il valore critico è dato dalla condizione $|F| \leq \mu_s N$ che equivale a

$$-mg \sin \theta_c + m\Omega_c^2 R \cos^2 \theta_c = \mu_s mg \cos \theta_c + \mu_s m\Omega_c^2 R \cos \theta_c \sin \theta_c \quad (8)$$

ovvero

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{g(\sin \theta_c + \mu_s \cos \theta_c)}{R \cos \theta_c (\cos \theta_c - \mu_s \sin \theta_c)}}. \quad (9)$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\boxed{\Omega_c = \sqrt{\frac{2\mu_s g}{R \cos \theta_c (1 - \mu_s^2)}} = 3.32 \text{ rad/s}} \quad (10)$$

avendo ricordato che $\mu_s = \tan \theta_c$.

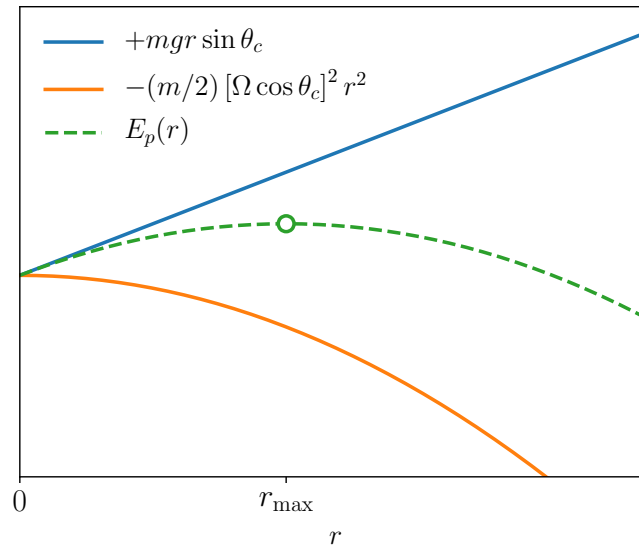
d) L'energia potenziale è associata alle forze conservative: la forza peso e la forza apparente centrifuga. Se la particella si trova in un punto a distanza r dal centro misurata lungo il diametro nel piano $y-z$ (positiva nel primo quadrante e negativa nel terzo), che ha un'inclinazione θ_c rispetto all'orizzonte, allora la sua energia potenziale è

$$\boxed{E_p(r) = mgr \sin \theta_c - \frac{1}{2} m\Omega^2 r^2 \cos^2 \theta_c} \quad (11)$$

essendo $r \sin \theta_c$ la quota e $r \cos \theta_c$ la distanza dall'asse di rotazione. Espressa come funzione di r , si tratta di una parabola rivolta verso il basso, che si annulla per $r = 0$ e per $r = 2g \sin \theta_c / (\Omega^2 \cos \theta_c)$. Senza fare altri calcoli, semplicemente per simmetria, si deduce che l'energia potenziale è massima a metà strada, cioè per

$$r_{\max} = \frac{g \sin \theta_c}{\Omega^2 \cos^2 \theta_c} = 46.9 \text{ cm}. \quad (12)$$

In assenza di attrito, si tratta di un punto di equilibrio instabile, dove le componenti parallele al piano della forza peso e della forza centrifuga si compensano esattamente, ma basta una piccola perturbazione per allontanare la particella nell'una o nell'altra direzione.



Soluzione esercizio II.1

a) Per mantenere ferma la parete occorre applicare una forza che compensi la risultante delle forze di pressione agenti su di essa. Calcoliamoci quindi le pressioni dei due gas mediante le equazioni di stato

$$P_1 = \frac{n_1 R T_0}{V} = 1.211 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{n_2 R T_0}{2V} = 0.8076 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (13)$$

che corrispondono a forze

$$F_1 = P_1 S = 2423 \text{ N} \quad \text{e} \quad F_2 = -P_2 S = -1615 \text{ N}, \quad (14)$$

dove si è tenuto conto del verso della forza di pressione di ciascun gas. La forza cercata è dunque

$$F = -(F_1 + F_2) = -808 \text{ N}. \quad (15)$$

b) Entrambi i gas subiscono una trasformazione adiabatica quasistatica. Conoscendo i volumi iniziali e finali per entrambi e la temperatura iniziale possiamo ricavare le temperature finali

$$T_0 V^{\gamma_{\text{mono}}-1} = T_1 \left(\frac{3}{2}V\right)^{\gamma_{\text{mono}}-1} \quad \longrightarrow \quad T_1 = T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = 259.5 \text{ K} \quad (16)$$

$$T_0 (2V)^{\gamma_{\text{bi}}-1} = T_2 \left(\frac{3}{2}V\right)^{\gamma_{\text{bi}}-1} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_0 \left(\frac{4}{3}\right)^{2/5} = 381.5 \text{ K}, \quad (17)$$

corrispondenti ad una differenza di temperatura

$$\boxed{\Delta T = T_2 - T_1 = 122 \text{ K}} . \quad (18)$$

Si poteva ricavare lo stesso risultato in maniera equivalente come segue. Le trasformazioni adiabatiche sono descritte da

$$\begin{cases} P_1 V_0^{\gamma_{\text{mono}}} = P'_1 \left(\frac{3V_0}{2}\right)^{\gamma_{\text{mono}}} , \\ P_2 (2V_0)^{\gamma_{\text{bi}}} = P'_2 \left(\frac{3V_0}{2}\right)^{\gamma_{\text{bi}}} , \end{cases} \quad (19)$$

e in più conosciamo le pressioni P_1 e P_2 prima della trasformazione. Questo porta ai due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} P_1 V_0^{\gamma_{\text{mono}}} = P'_1 \left(\frac{3V_0}{2}\right)^{\gamma_{\text{mono}}} \\ T_1 = \frac{P'_1}{n_1 R} \frac{3V_0}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} P_2 (2V_0)^{\gamma_{\text{bi}}} = P'_2 \left(\frac{3V_0}{2}\right)^{\gamma_{\text{bi}}} \\ T_2 = \frac{P'_2}{n_2 R} \frac{3V_0}{2} \end{cases} , \quad (20)$$

da cui estraiamo

$$\begin{cases} P'_1 = P_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma_{\text{mono}}} = 6.2 \times 10^4 \text{ Pa}, \\ P'_2 = P_2 \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma_{\text{bi}}} = 1.2 \times 10^5 \text{ Pa}, \end{cases} \quad (21)$$

che porta agli stessi valori di T_1 e T_2 già calcolati.

c) Il calore scambiato tra i due gas per raggiungere la nuova temperatura di equilibrio soddisfa la seguente condizione:

$$n_1 c_{v1} (T_{\text{eq}} - T_1) = n_2 c_{v2} (T_2 - T_{\text{eq}}) . \quad (22)$$

Dall'uguaglianza ricaviamo la temperatura di equilibrio

$$\boxed{T_{\text{eq}} = \frac{n_1 c_{v1} T_1 + n_2 c_{v2} T_2}{n_1 c_{v1} + n_2 c_{v2}} = 343.6 \text{ K}} . \quad (23)$$

d) La variazione di energia interna dell'intero sistema è data dalla somma di quella dei due gas

$$\boxed{\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1 c_{v1} (T_{\text{eq}} - T_0) + n_2 c_{v2} (T_{\text{eq}} - T_0) = 434 \text{ J}} . \quad (24)$$

e) Di entrambi i gas conosciamo temperature e volumi nella configurazione iniziale e finale, quindi possiamo scrivere direttamente le loro variazioni di entropia

$$\Delta S_1 = n_1 c_{v1} \ln \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_0} \right) + n_1 R \ln \frac{3}{2} = 10.5 \text{ J/K} \quad (25)$$

e

$$\Delta S_2 = n_2 c_{v2} \ln \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_0} \right) + n_2 R \ln \frac{3}{4} = -8.7 \text{ J/K} \quad (26)$$

mentre la variazione di entropia dell'universo è

$$\Delta S_{\text{uni}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1.8 \text{ J/K} . \quad (27)$$

L'entropia dell'universo aumenta a causa dell'irreversibilità del processo di termalizzazione. L'espansione/compressione adiabatica, invece, avviene in maniera quasistatica quindi non comporta un aumento di entropia dell'universo. Lo stesso risultato si ottiene infatti se consideriamo i due processi separatamente,

$$\Delta S_1^I = 0 \quad \Delta S_1^{II} = n_1 c_{v1} \ln \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_1} \right) = 10.5 \text{ J/K} \quad (28)$$

$$\Delta S_2^I = 0 \quad \Delta S_2^{II} = n_2 c_{v2} \ln \left(\frac{T_{\text{eq}}}{T_2} \right) = -8.7 \text{ J/K} . \quad (29)$$

Soluzione esercizio II.2

a) Quando lo sportellino S si apre, il gas ideale esegue un'espansione libera e adiabatica (non compie lavoro e non ha nemmeno il tempo per scambiare calore con la miscela di acqua e ghiaccio). Quindi $Q = W = \Delta U = 0$ e la temperatura finale è uguale a quella iniziale, pari alla temperatura della miscela a 0°C , ovvero $T_0 = 273.15 \text{ K}$. Durante la compressione isoterma quasistatica del gas ideale si ha $\Delta U = 0$ e il lavoro fatto dal pistone sul gas si converte tutto in calore, che viene ceduto dal gas alla miscela di acqua e ghiaccio. Dunque

$$Q_{\text{gas}} = W = \int P dV = nRT_0 \ln \frac{2}{3} = -1842 \text{ J} . \quad (30)$$

Il calore che viene assorbito dalla miscela causa la fusione di una massa di ghiaccio Δm data dalla relazione

$$\Delta m = \frac{|Q_{\text{gas}}|}{\lambda_f} = 5.52 \text{ g} . \quad (31)$$

Sapendo che inizialmente la massa di ghiaccio era di $m_{gh} = 8$ kg è semplice determinare il numero di cicli che si possono fare prima che il ghiaccio sia completamente sciolto (e che i 10 kg di acqua inizino a scaldarsi):

$$\boxed{N_{\text{cicli}} = \frac{m_{gh}}{\Delta m} = 1449} . \quad (32)$$

b) L'entropia dell'universo aumenta durante l'espansione libera del gas (trasformazione irreversibile), ma rimane costante durante la compressione isoterma (reversibile). Dunque:

$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}}^{(\text{ciclo})} = nR \ln 1.5 = 6.74 \text{ J/K}} . \quad (33)$$

c) Nel caso venga usato il gas reale, durante l'espansione libera adiabatica il gas non mantiene costante la temperatura, bensì si raffredda. Finita l'espansione, il contatto termico con la miscela di acqua e ghiaccio riporta lentamente la temperatura al valore iniziale, a volume costante. Infine il gas verrà compresso in maniera quasistatica cedendo calore al ghiaccio.

Sfruttando l'espressione assegnata per l'energia interna, possiamo esprimere la variazione di energia interna totale per l'espansione libera come

$$\Delta U = \left(nc_v T_1 - \frac{n^2 a}{V_1} \right) - \left(nc_v T_0 - \frac{n^2 a}{V_0} \right) = n \left(c_v \Delta T + an \frac{\Delta V}{V_0 V_1} \right) . \quad (34)$$

L'espansione del gas è comunque libera (non compie lavoro) e adiabatica (sufficientemente rapida da non aver tempo di scambiare calore con la miscela), quindi $Q = W = 0$. Di conseguenza $\Delta U = 0$ e

$$c_v(T_1 - T_0) = -an \frac{V_1 - V_0}{V_0 V_1} \quad (35)$$

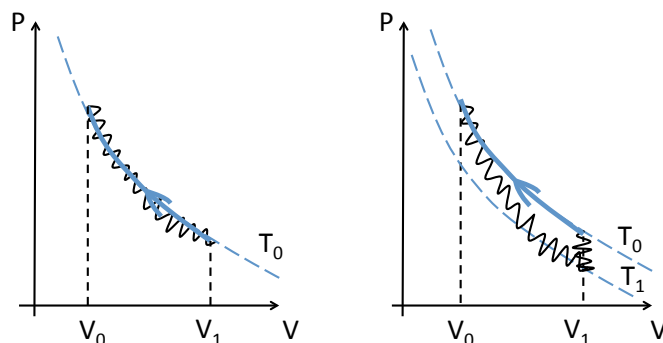
ovvero

$$\boxed{T_1 = T_0 - \frac{an}{c_v} \frac{1}{3V_0} = 272.15 \text{ K} = -1.0^\circ\text{C}} . \quad (36)$$

d) Alla fine dell'espansione adiabatica libera il gas si trova a temperatura T_1 , più bassa della miscela di acqua e ghiaccio. Quindi, mantenendo il volume costante ($W = 0$), il gas si scalderà fino a T_0 assorbendo calore dalla miscela

$$\boxed{Q_2 = \Delta U_2 = nc_v(T_0 - T_1) = 41.6 \text{ J}} \quad (37)$$

e) In figura sono rappresentati i cicli compiuti con il gas ideale (a sinistra) e con il gas reale (a destra).



Per calcolare la quantità di ghiaccio sciolto nel caso del gas reale occorre prima determinare il calore ceduto dal gas nella compressione isoterma da V_1 a V_0 . Mediante l'equazione di stato

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \quad (38)$$

possiamo calcolare il lavoro come

$$W_3 = \int_{V_1}^{V_0} \left(\frac{nRT_0}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \right) dV \quad (39)$$

ovvero

$$W_3 = nRT_0 \ln \left(\frac{V_0 - nb}{V_1 - nb} \right) + an^2 \frac{V_1 - V_0}{V_0 V_1} = -1812 \text{ J} . \quad (40)$$

Possiamo esprimere anche la variazione di energia interna durante tale trasformazione isoterma reversibile

$$\Delta U_3 = n^2 a \left(\frac{V_1 - V_0}{V_0 V_1} \right) = \frac{n^2 a}{3V_0} = 4 \text{ J} . \quad (41)$$

Quindi durante la compressione isoterma quasistatica il gas cede il calore

$$\boxed{Q_3 = W_3 + \Delta U_3 = -1808 \text{ J}} \quad (42)$$

e la massa di ghiaccio che si scioglie in un ciclo è

$$\boxed{\Delta m' = -\frac{(Q_2 + Q_3)}{\lambda_f} = 5.30 \text{ g}} \quad (43)$$

ed è minore di quella calcolata con il gas ideale.