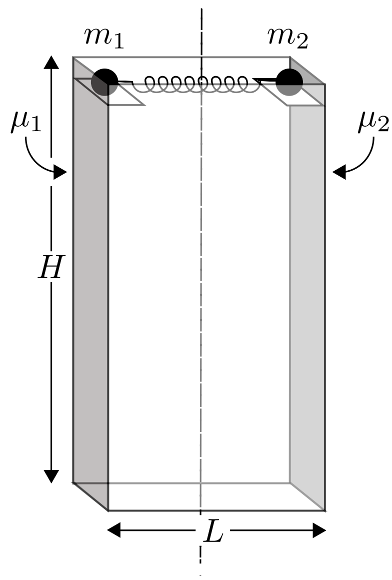
Fisica Generale I
A.A. 2017-2018, 18 gennaio 2018

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Due particelle di massa $m_1 = 50$ g e $m_2 = 150$ g sono collegate mediante una molla di massa trascurabile, di costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 12$ cm, e sono confinate dentro ad una sottile guida cava verticale di larghezza $L = 10$ cm e altezza $H = 20$ cm, come in figura.



a) Inizialmente le due particelle si trovano in alto, come in figura e la molla è disposta lungo l'asse orizzontale x. Due staffe mantengono le masse in equilibrio, evitando di farle cadere. Determinare le reazioni vincolari che agiscono sulle particelle orizzontalmente e verticalmente.

b) Ad un certo istante le staffe vengono eliminate e le particelle iniziano a cadere. Le pareti strette che confinano le particelle nella direzione x sono scabre, con coefficienti di attrito dinamico $\mu_1 = 1$ per quella a sinistra e μ_2 per quella a destra. Le altre pareti sono lisce. Determinare il valore di μ_2 affinché la molla rimanga orizzontale durante la discesa.

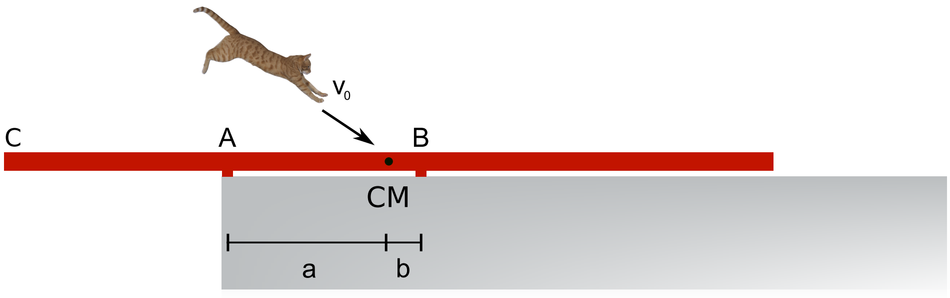
c) Usando il teorema delle forze vive, calcolare la velocità con cui le particelle escono dal fondo della guida.

d) Determinare il periodo di oscillazione del sistema dopo l'uscita dalla guida.

e) Descrivere il moto di ciascuna delle due masse e riportare in un grafico gli andamenti nel tempo.

f) Si torni al punto b), ma stavolta la guida sia in rotazione con velocità angolare costante, in modo da compiere 1 giro al secondo attorno all'asse di simmetria verticale (linea tratteggiata verticale). Come varia la condizione su μ_2 affinché la molla rimanga orizzontale durante la discesa? Descrivere qualitativamente il moto durante la caduta, dentro e fuori la guida.

Esercizio I.2



Una trave sottile omogenea di massa $M = 27$ kg e lunghezza $L = 3$ m poggia su un piano orizzontale liscio mediante due piccoli supporti di massa trascurabile, vincolati ad essa, a distanza $a = 70$ cm e $b = 10$ cm dal centro dell'asta, come in figura. Al tempo $t = 0$, un gatto di massa $m = 3$ kg salta sulla trave in corrispondenza del centro di massa, con velocità $v_0 = 3$ m/s e con un angolo di 30° rispetto all'orizzonte. Grazie ai suoi artigli il gatto rimane attaccato alla trave in tale punto.

a) Con quale velocità l'intero sistema inizia a muoversi sul piano? Quanta energia cinetica è stata persa?

b) Al tempo $t_1 = 1$ s, il gatto inizia a camminare con accelerazione costante $a_{\mathrm{g}} = 0.1$ m/s^2 rispetto alla trave, verso destra. Determinare le reazioni vincolari sui supporti N_A e N_B in funzione della posizione del gatto sulla trave x_{g}. Il movimento del gatto fa sì che, in un certo istante t_2, la reazione vincolare in A si annulli; determinare dove si trova il gatto in quel momento.

c) Determinare t_2 e la distanza totale percorsa dalla trave.

Si torni alla situazione di partenza con il gatto che cade sulla trave, ma stavolta supponiamo che il gatto arrivi con velocità $3v_0$ nel punto C, cadendo verticalmente dall'alto e rimanga aggrappato.

d) Determinare il momento d'inerzia del sistema trave+gatto rispetto all'asse di rotazione passante per A.

e) Determinare la velocità angolare con cui la trave inizia a ruotare attorno ad A, immediatamente dopo la caduta del gatto.

f) Nell'ipotesi che il punto di appoggio in A sia fisso e si comporti come una cerniera attorno a cui la trave ruota, si calcoli l'angolo massimo formato dalla trave rispetto all'orizzonte prima di invertire la rotazione e riportare il gatto in alto.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1
Una mole di gas biatomico ideale subisce un'espansione quasistatica tra due stati di equilibrio A e B durante la quale, in ogni istante, il prodotto TV viene mantenuto costante.
a) Si determini la variazione dell'energia interna, il lavoro compiuto e il calore assorbito nella trasformazione in funzione delle variabili T_A e $r = V_A/V_B < 1$.
b) A partire dallo stato B, il gas viene scaldato lentamente a volume fissato, fino a tornare alla pressione iniziale raggiungendo lo stato C. Infine viene raffreddato lentamente a pressione costante in modo che torni nello stato iniziale A. Disegnare l'intero ciclo su un diagramma P-V e calcolare il coefficiente di prestazione della macchina frigorifera nel caso in cui $r = 1/2$.
c) Esprimere la variazione di entropia del gas durante la trasformazione BC in funzione di r e calcolarla per $r = 1/2$.
d) Supponiamo adesso che la trasformazione BC avvenga mettendo il gas direttamente a contatto con un termostato a temperatura T_C. Indicare la variazione di entropia del gas e quella dell'universo corrispondenti a questa trasformazione BC.

Esercizio II.2
Una candela di cera di massa $M = 300$ g è immersa in un 1 kg di acqua a $t_0 = 20°$C all'interno di un recipiente termicamente isolato con l'esterno. Acqua e cera sono in equilibrio.
a) Supponiamo che nel recipiente venga versata lentamente dell'acqua calda, in particolare si aggiunga una massa m di acqua a $t_a = 60°$C e si aspetti che il sistema raggiunga l'equilibrio. Si determini la temperatura di equilibrio $t(m)$ in funzione della massa d'acqua aggiunta e se ne tracci il grafico, usando il valore 0.7 cal/g°C per il calore specifico della cera.
b) Calcolare la massa m_1 di acqua calda da aggiungere se si vuole che la temperatura finale sia quella di fusione della cera $t_f = 45°$C.
c) Arrivati a t_f si continua a versare lentamente acqua calda, sempre a $t_a = 60°$C, causando la fusione della cera. Nell'istante in cui la cera ha finito di fondersi completamente, si misura la massa d'acqua versata (in aggiunta alla precedente m_1) e si scopre che questa è $m_2 = 170$ g. Quanto vale il calore latente di fusione λ_f della cera?
d) Viene poi aggiunta altra acqua calda, pari a $m_3 = 2$ kg. Qual è la temperatura finale di equilibrio t_1? Si disegni il grafico della temperatura di equilibrio in funzione della massa d'acqua calda aggiunta, tenendo conto della transizione di fase.
e) Determinare la variazione di entropia della cera e dell'universo tra lo stato iniziale e quello finale.

Soluzione esercizio I.1

a) Le due particelle si trovano in equilibrio all'interno della guida e poggiano sulle staffe. Essendo in equilibrio, la sommatoria delle forze esterne agenti su ciascuna della due particelle dev'essere nulla. Pertanto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{est},1} &= (-F_{\text{el}} + N_{1,\text{oriz}})\ \hat{x} + (N_{1,\text{vert}} - m_1 g)\ \hat{y} = 0 \\ \sum \vec{F}_{\text{est},2} &= (F_{\text{el}} + N_{2,\text{oriz}})\ \hat{x} + (N_{2,\text{vert}} - m_2 g)\ \hat{y} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

dove abbiamo introdotto la forza elastica $F_{\text{el}} = -k(L - l_0) = 0.2\ \text{N}\ > 0$, abbiamo distinto le componenti orizzontali e verticali delle reazioni vincolari agenti sulle due particelle e abbiamo preso l'asse x con il verso positivo da sinistra a destra (dalla particella 1 alla particella 2). Da queste equazioni si ottengono le seguenti espressioni:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{N}_{1,\text{vert}} = m_1 g\ \hat{y} = (0.49\ \text{N}\ )\ \hat{y} & \vec{N}_{1,\text{oriz}} = F_{\text{el}}\ \hat{x} = (0.2\ \text{N}\ )\ \hat{x} \\ \vec{N}_{2,\text{vert}} = m_2 g\ \hat{y} = (1.47\ \text{N}\ )\ \hat{y} & \vec{N}_{2,\text{oriz}} = -F_{\text{el}}\ \hat{x} = (-0.2\ \text{N}\ )\ \hat{x} \end{array}} \tag{2}$$

Si noti che le reazioni vincolari verticali, esercitate dalle staffe, sono diverse a destra e a sinistra, mentre le pareti imprimono la stessa reazione vincolare orizzontale, in modulo.

b) Affinché le due masse scendano nella guida mantenendosi alla stessa quota in ogni istante, esse devono essere soggette alla stessa accelerazione lungo $\hat{y}$. La forza di attrito radente è proporzionale al modulo della reazione vincolare perpendicolare alla parete, quest'ultimo essendo uguale a F_{el}. Dunque le equazioni del moto nella direzione verticale sono

$$m_1 a_1 = -m_1 g + \mu_1 F_{\text{el}} \tag{3}$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + \mu_2 F_{\text{el}} \tag{4}$$

e la condizione $a_1 = a_2$ diventa

$$\frac{-m_1 g + \mu_1 F_{\text{el}}}{m_1} = \frac{-m_2 g + \mu_2 F_{\text{el}}}{m_2} \tag{5}$$

da cui

$$\boxed{\mu_2 = \mu_1 \frac{m_2}{m_1} = 3}. \tag{6}$$

c) Dato che le due particelle scendono, da ferme, con la stessa accelerazione, esse scendono anche con la stessa velocità. Possiamo calcolare la velocità v con cui escono dalla guida applicando il teorema delle forze vive:

$$\Delta E_k = W_{\text{FC}} + W_{\text{FNC}}. \tag{7}$$

Qui abbiamo indicato con $W_{\rm FC}$ il lavoro delle forze conservative e con $W_{\rm NFC}$ quello delle forze non conservative. Il primo coincide con la variazione di energia potenziale del sistema, cambiata di segno, $W_{\rm FC} = (m_1 + m_2)gH$. Il secondo è il lavoro delle forze di attrito $W_{\rm FNC} = -(\mu_1 + \mu_2)F_{\rm el}H$. La variazione di energia cinetica coincide con l'energia cinetica nel momento dell'uscita dalla guida e vale $\Delta E_k = (1/2)(m_1 + m_2)v^2$. Ne segue che

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)gH - (\mu_1 + \mu_2)F_{\rm el}H, \tag{8}$$

da cui si ricava

$$\boxed{v = \sqrt{2\left(g - \frac{\mu_1 + \mu_2}{m_1 + m_2}F_{\rm el}\right)H} = 1.52 \text{ m/s}}\,. \tag{9}$$

d) Dopo l'uscita dalla guida, sul sistema composto dalle due particelle non agiscono più forze esterne nella direzione orizzontale, ma solo la forza peso nella direzione verticale. Il centro di massa del sistema, che risente solo delle forze esterne, seguirà la traiettoria parabolica tipica della caduta libera in un campo di gravità, e la molla rimane orizzontale. Le forze interne tra le due masse, elastiche, determinano invece il moto relativo, che sarà di tipo armonico. Trattandosi di un sistema a due corpi in un campo di gravità uniforme, possiamo ridurlo ad un problema ad un corpo per una particella di massa ridotta $m_{\rm r}$ e coordinata relativa $x_{\rm r}$

$$m_{\rm r} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 37.5 \text{ g} \qquad x_{\rm r} \equiv x_2 - x_1 \tag{10}$$

la cui equazione del moto è

$$m_{\rm r}\ddot{x}_{\rm r} = -k(x_{\rm r} - l_0)\,. \tag{11}$$

Introduciamo quindi la variabile $\Delta x = x_{\rm r} - l_0$, per la quale vale l'equazione

$$m_{\rm r}\ddot{\Delta x} = -k\Delta x \tag{12}$$

dalla quale otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\ddot{\Delta x} = -\frac{k}{m_{\rm r}}\Delta x = -\omega^2 \Delta x \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_{\rm r}}}\,. \tag{13}$$

La soluzione generale della precedente equazione differenziale è

$$\Delta x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{14}$$

ed ha periodo di oscillazione

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\rm r}}{k}} = 0.38 \text{ s}}\,. \tag{15}$$

e) Al fine di scrivere il moto di ciascuna delle due masse possiamo esplicitare x_1 e x_2 in funzione della coordinata del centro di massa $x_{\rm CM}$ e della coordinata relativa $x_{\rm r}$. Consideriamo inoltre $t = 0$ l'istante in cui le due masse escono dalla guida. Ricordando che

$$x_{\rm CM}(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{M} \qquad ; \qquad x_{\rm r}(t) = x_2(t) - x_1(t) \tag{16}$$

dove $M = m_1 + m_2$, si ottengono le seguenti espressioni per x_1 e x_2:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{\rm CM}(t) - \frac{m_2}{M} x_{\rm r}(t) \\ x_2(t) &= x_{\rm CM}(t) + \frac{m_1}{M} x_{\rm r}(t) \end{aligned} \tag{17}$$

A questo punto ricordiamo che il CM non si muove lungo $\hat{x}$ e pertanto

$$x_{\rm CM}(t) = x_{\rm CM}(t=0) = \frac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{M} = \frac{L}{2}\frac{m_2 - m_1}{M} = \frac{L}{4} = 2.5 \text{ cm}. \tag{18}$$

Invece per quanto riguarda $x_{\rm r}(t)$ possiamo usare l'equazione (14) e la definizione di Δx per scrivere

$$x_{\rm r}(t) = l_0 + \Delta x(t) = l_0 + A\cos(\omega t + \phi). \tag{19}$$

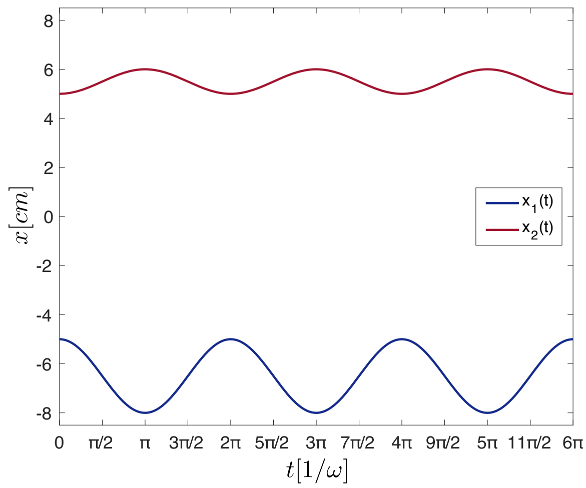


Figura 1: In questo grafico sono riportati gli andamenti oscillatori di $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Il moto verticale delle particelle invece è uniformemente accelerato.

Infine imponendo le condizioni iniziali $x_{\rm r}(0) = L$ e $\dot{x}_{\rm r}(0) = 0$ otteniamo le seguenti espressioni

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{L}{4} - \frac{3}{4}\big[l_0 + (L - l_0)\cos(\omega t)\big] \\ x_2(t) &= \frac{L}{4} + \frac{1}{4}\big[l_0 + (L - l_0)\cos(\omega t)\big] \;. \end{aligned}} \tag{20}$$

Queste funzioni sono tracciate nel grafico in Figura 1.

f) La rotazione del sistema modifica le forze normali alla superficie della guida e di conseguenza le forze d'attrito dinamico agenti sulle due masse. In particolare, se ci mettiamo nel sistema di riferimento in rotazione, la particella i-esima sentirà anche la forza centrifuga $m_i\omega^2 L/2$ che si aggiunge alla forza elastica e alla reazione vincolare nella direzione orizzontale. Dunque le reazioni vincolari diventano in modulo

$$|N_{1,\text{oriz}}| = F_{\text{el}} + m_1\omega^2 L/2 \ ; \quad |N_{2,\text{oriz}}| = F_{\text{el}} + m_2\omega^2 L/2 \tag{21}$$

Pertanto, nel caso in cui il sistema ruoti a velocità angolare costante ω, la condizione affinché le due masse cadano con la stessa accelerazione verticale diventa:

$$\frac{-m_1 g + \mu_1(F_{\text{el}} + m_1\omega^2 L/2)}{m_1} = \frac{-m_2 g + \mu_2(F_{\text{el}} + m_2\omega^2 L/2)}{m_2} \tag{22}$$

da cui otteniamo

$$\boxed{\mu_2 = \mu_1 \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{F_{\text{el}} + m_1\omega^2 L/2}{F_{\text{el}} + m_2\omega^2 L/2}\right) = 1.81}. \tag{23}$$

Per quanto riguarda il moto all'interno della guida, siccome il CM non si trova centrato sull'asse di rotazione del sistema esso compirà un moto elicoidale di raggio fissato (uguale a $x_{\text{CM}} = L/4$) e passo crescente (a causa dell'accelerazione costante lungo $\hat{y}$). Si noti inoltre che a causa dell'incremento delle forze normali alla parete della guida, a parità di μ_1, l'accelerazione nel caso rotante risulterà minore rispetto a quella calcolata nel punto b). Al di fuori della guida invece il CM compirà un moto parabolico caratterizzato da accelerazione costante lungo $\hat{y}$ data da g e da una velocità iniziale ortogonale ad $\hat{y}$ di modulo $\omega L/4$ e verso dato dalla normale alla retta passante per le due masse al tempo $t = 0$. Contemporaneamente il moto relativo delle due masse sarà ancora di tipo armonico, ma caratterizzato da una rotazione (aggiuntiva rispetto ai punti c) e d)) che non avverrà però a velocità angolare costante, dato che deve conservarsi il momento angolare mentre le distanze tra le particelle variano nel tempo.

.

Soluzione esercizio I.2

a) Tanto per cominciare approssimiamo il gatto con una particella puntiforme anziché considerarlo un corpo esteso, dato che, senza questa approssimazione, il problema sarebbe praticamente intrattabile. Poi possiamo considerare l'arrivo del gatto sulla trave come un urto perfettamente anelastico. A causa dell'urto, le reazione vincolari sui punti di appoggio della trave sono impulsive e impediscono di utilizzare la conservazione della quantità di moto totale nella direzione verticale. Invece, dato che il piano di appoggio è liscio e non esercita alcuna forza orizzontale, possiamo ancora usare la conservazione della quantità di moto in quella direzione:

$$mv_0 \cos\phi = (m+M)v_{\text{cm}} \tag{24}$$

dove $\phi = 30°$ e v_{cm} è la velocità orizzontale del sistema trave+gatto dopo l'urto. Dunque

$$\boxed{v_{\text{cm}} = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\phi = 0.26 \text{ m/s}} \tag{25}$$

L'energia cinetica prima dell'urto è data esclusivamente da quella del gatto, $E_i = (1/2)mv_0^2$. Essa non si conserva, dato che l'urto è anelastico. Infatti, il suo valore finale è $E_f = (1/2)(m+M)v_{\text{cm}}^2$, e la variazione è

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\frac{m^2\cos^2\phi}{m+M}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{26}$$

ovvero

$$\boxed{\Delta E_k = -E_i \left[1 - \frac{m\cos^2\phi}{(1+M/m)}\right] = -12.48 \text{ J}}\,. \tag{27}$$

b) Dopo l'urto il sistema trasla a velocità costante, senza ruotare. Quindi possiamo calcolare la somma dei momenti delle forze rispetto ad A e B e porli uguali a zero per ricavare un'espressione per le reazioni vincolari in funzione della posizione del gatto sulla trave. Prendiamo come $x_g = 0$ la posizione del centro della trave, che è anche la posizione iniziale del gatto; allora si ha

$$\sum \tau_A = Mga + mg(x_g + a) - N_B(a+b) \tag{28}$$

$$\sum \tau_B = Mgb - mg(x_g - b) - N_A(a+b) \tag{29}$$

da cui

$$\boxed{N_A(x_{\text{g}}) = \frac{Mb - m(x_{\text{g}} - b)}{a+b}g} \tag{30}$$

e

$$\boxed{N_B(x_{\text{g}}) = \frac{Ma + m(x_{\text{g}} + a)}{a+b}g}\,. \tag{31}$$

Notiamo che $N_A + N_B = (M+m)g$, che corrisponde alla condizione di equilibrio per la traslazione verticale e che avremmo potuto usare in alternativa ad una delle due equazioni precedenti. Si vede che N_A si annulla quando

$Mb - m(x_g - b) = 0$, quindi quando il gatto si trova nella posizione x_g^* data da

$$\boxed{x_\mathrm{g}^* = \left(1 + \frac{M}{m}\right) b = 1 \text{ m}} \tag{32}$$

c) A partire dal tempo $t_1 = 1$ s, il gatto si muove sulla trave con accelerazione a_g verso destra, partendo da fermo, in modo che $x_\mathrm{g}(t) = \frac{1}{2} a_\mathrm{g} (t - t_1)^2$. Quindi per raggiungere x_g^* impiega un tempo

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2x_\mathrm{g}^*}{a_g}} = \sqrt{\frac{2b}{a_\mathrm{g}}\left(1 + \frac{M}{m}\right)} = 4.5 \text{ s} \tag{33}$$

e il tempo trascorso dall'urto è

$$\boxed{t_2 = 5.5 \text{ s}}\,. \tag{34}$$

Nel sistema di riferimento in quiete, solidale con il piano di appoggio, la trave percorre uno spazio $\Delta x_1 = v_\mathrm{cm} t_1$, finché il gatto rimane fermo su di essa, e un ulteriore $\Delta x_2 = v_\mathrm{cm}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_\mathrm{trave} (t_2 - t_1)^2$ durante il moto del gatto. L'accelerazione della trave può essere riscritta usando il principio di azione e reazione: essendo il sistema gatto+trave isolato in direzione orizzontale, possiamo infatti affermare che $m(a_\mathrm{g} + a_\mathrm{trave}) = -M a_\mathrm{trave}$, da cui $a_\mathrm{trave} = -\frac{m}{m+M} a_\mathrm{g}$. Sommando i due spazi otteniamo

$$\Delta x_\mathrm{tot} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = v_\mathrm{cm} t_2 - \frac{1}{2} \frac{m}{M+m} a_\mathrm{g} (t_2 - t_1)^2 \tag{35}$$

ovvero

$$\boxed{\Delta x_\mathrm{tot} = v_\mathrm{cm} t_2 - b = 1.33 \text{ m}}\,. \tag{36}$$

d) Il momento di inerzia totale rispetto all'asse di rotazione in A, sarà dato dalla somma dei momenti di inerzia della trave e del gatto. Usando il teorema di Steiner possiamo calcolare il momento di inerzia della trave rispetto ad A e sommargli quello del gatto:

$$\boxed{I_A = \left(\frac{1}{12} M L^2 + M a^2\right) + m \left(\frac{L}{2} - a\right)^2 = 35.4 \text{ kg m}^2} \tag{37}$$

e) Stavolta l'urto avviene in modo tale che le forze esterne impulsive sono solo quelle agenti nel vincolo in A. Quindi, il momento angolare rispetto ad A rimane costante nell'urto. Il momento angolare è un vettore perpendicolare al foglio ed uscente da esso, di modulo pari a

$$3\left(\frac{L}{2} - a\right) m v_0 = I_A \omega_0\,, \tag{38}$$

dove il membro di sinistra rappresenta i valore prima dell'urto e quello di destra il valore immediatamente successivo. L'equazione fornisce il risultato

$$\boxed{\omega_0 = \frac{3\left(\frac{L}{2} - a\right) m v_0}{I_A} = 0.61 \text{ s}^{-1}} \tag{39}$$

f) La trave con il gatto attaccato ruota in senso antiorario attorno al vincolo in A fino ad un angolo massimo θ a cui il moto rotatorio si arresta e si inverte, riportando il gatto verso l'alto. Durante questo moto si conserva l'energia meccanica in modo che

$$\frac{1}{2} I_A \omega_0^2 = \left[Mga - mg\left(\frac{L}{2} - a\right)\right] \sin\theta \tag{40}$$

quindi possiamo determinare l'angolo critico di inversione

$$\boxed{\theta = \arcsin \frac{I_A \omega_0^2}{2\left[Mga - mg(\frac{L}{2} - a)\right]} = 0.04 \text{ rad} = 2.3^\circ} \, . \tag{41}$$

Soluzione esercizio II.1

a) La trasformazione AB mantiene il prodotto tra temperatura e volume costante:

$$TV = T_A V_A = T_B V_B = \text{cost.} \tag{42}$$

Inoltre, dato che si tratta di una trasformazione quasistatica, ed essendo un gas ideale, in ogni istante vale anche l'equazione di stato

$$PV = nRT \, . \tag{43}$$

Combinando le due equazioni possiamo ricavare l'andamento della pressione in funzione del volume:

$$P(V) = \frac{nRT_A V_A}{V^2} \, . \tag{44}$$

Essendo $T_B = T_A V_A / V_B = r T_A$, con $r < 1$, possiamo calcolare la variazione di energia interna in questo modo

$$\boxed{\Delta U_{AB} = n c_v (T_B - T_A) = n c_v T_A \left(\frac{V_A}{V_B} - 1 \right) = -\frac{5}{2} n R T_A (1 - r) < 0} \, , \tag{45}$$

dove abbiamo usato il fatto che il gas è biatomico e quindi ne conosciamo i calori specifici $c_v = (5/2)R$ e $c_p = (7/2)R$. La quantità ΔU_{AB} risulta negativa per l'espansione, come era lecito attendersi visto che TV =costante: se il volume aumenta allora diminuisce la temperatura e così anche l'energia interna.

Il lavoro compiuto dal gas durante questa trasformazione è dato da

$$W_{AB} = \int PdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_AV_A}{V^2}dV = nRT_AV_A\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}\right) \tag{46}$$

ovvero

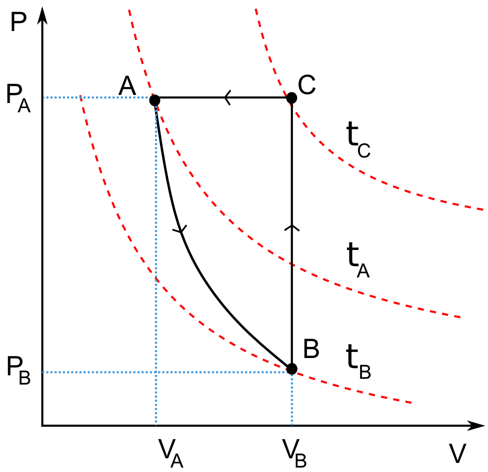
$$\boxed{W_{AB} = nRT_A(1-r) > 0}. \tag{47}$$

Dal primo principio possiamo dunque ottenere il calore assorbito

$$\boxed{Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = -\frac{3}{2}nRT_A(1-r) < 0}. \tag{48}$$

Il lavoro compiuto dal gas nell'espansione è positivo. Il calore invece è negativo.

b) Il ciclo frigorifero è riportato in figura.



La temperatura nello stato C può essere espressa in funzione dei parametri noti. Basta scrivere l'equazione di stato $P_CV_C = nRT_C$ e usare le informazioni $V_C = V_B$ e $P_C = P_A$ per ottenere

$$T_C = \frac{P_AV_B}{nR} = T_A\frac{V_B}{V_A} = \frac{1}{r}T_A \tag{49}$$

e ricordiamo invece che $T_B = rT_A$. Il coefficiente di prestazione della macchina frigorifera è definito come $COP = Q_{\text{ass}}/|W|$. Durante l'intero ciclo frigorifero viene assorbito calore solamente durante il riscaldamento isocoro. Quindi

$$Q_{\text{ass}} = Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = \frac{5}{2}nRT_A\left(\frac{1}{r} - r\right). \tag{50}$$

Il lavoro è nullo nella trasformazione isocora, mentre nella isobara vale

$$W_{CA} = -P_A(V_C - V_A) = -P_A(V_B - V_A) = -P_A V_A \left(\frac{1}{r} - 1\right) \tag{51}$$

ovvero

$$W_{CA} = -nRT_A \left(\frac{1}{r} - 1\right) \tag{52}$$

e il lavoro totale eseguito dal gas diventa

$$W = W_{AB} + W_{CA} = nRT_A(1-r) - nRT_A \left(\frac{1}{r} - 1\right) \tag{53}$$

e quindi

$$W = nRT_A \left(2 - r - \frac{1}{r}\right) < 0\,. \tag{54}$$

A questo punto possiamo calcolare il coefficiente di prestazione

$$COP = \frac{Q_{\mathrm{ass}}}{|W|} = \frac{5}{2}\frac{\left(\frac{1}{r} - r\right)}{\left(\frac{1}{r} + r - 2\right)}\,, \tag{55}$$

il cui valore per $r = 1/2$ è

$$\boxed{COP = \frac{15}{2} = 7.5}\,. \tag{56}$$

c) Nella trasformazione BC il gas non varia il suo volume quindi si può scrivere la sua variazione di entropia come

$$\boxed{\Delta S_{BC} = nc_v \ln\frac{T_C}{T_B} = \frac{5}{2}nR\ln\frac{(1/r)T_A}{rT_A} = \frac{5}{2}nR\ln\frac{1}{r^2}} \tag{57}$$

che per $r = 1/2$ vale

$$\boxed{\Delta S_{BC} = \frac{5}{2}nR\ln 4 = 28.8\ \mathrm{J/K}} \tag{58}$$

d) Se il gas viene messo a contatto direttamente con una sorgente a temperatura T_C mantenendo fisso il volume ($V_C = V_B$), allora subisce una trasformazione isocora irreversibile. Di conseguenza, si avrà un aumento dell'entropia dell'universo. La variazione di entropia del gas è la stessa calcolata al punto precedente, essendo una funzione di stato. Calcoliamo la variazione di entropia dell'ambiente, costituito dal solo termostato a temperatura T_C

$$\Delta S_{BC}^{\mathrm{amb}} = -\frac{Q_{BC}}{T_C} = -\frac{\frac{5}{2}nRT_A\left(\frac{1}{r}-r\right)}{(1/r)T_A} = -\frac{5}{2}nR(1-r^2) \tag{59}$$

da cui

$$\boxed{\Delta S_{BC}^{\mathrm{uni}} = \Delta S_{BC} + \Delta S_{BC}^{\mathrm{amb}} = \frac{5}{2}nR\left(\ln\frac{1}{r^2} - 1 + r^2\right)} \tag{60}$$

che per $r = 1/2$ vale

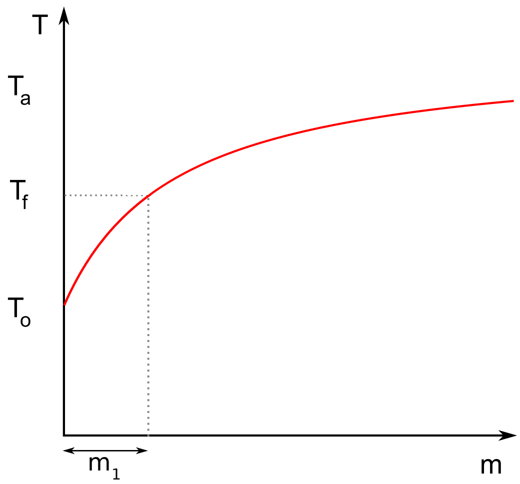
$$\boxed{\Delta S_{BC}^{\mathrm{uni}} = \frac{5}{2}nR\left(\ln 4 - \frac{3}{4}\right) = 13.2\ \mathrm{J/K}}\,. \tag{61}$$

Soluzione esercizio II.2

a) La candela e l'acqua presente nel recipiente sono già in equilibrio termico a t_0. Aggiungendo una massa m generica di acqua calda a t_a, l'intero sistema dovrà raggiungere un nuovo equilibrio, ad una temperatura intermedia t.

L'acqua calda cederà calore al sistema presente nel recipiente. Sappiamo che la massa iniziale d'acqua nel recipiente è $m_0 = 1$ kg. Il suo calore specifico sia c_a. Eguagliando il calore assorbito dall'acqua iniziale e dalla cera a quello ceduto dall'acqua calda, possiamo quindi scrivere il bilancio termico come

$$Mc(t - t_0) + m_0 c_a(t - t_0) = -mc_a(t - t_a), \tag{62}$$



da cui è semplice ricavare l'espressione richiesta per $t(m)$:

$$\boxed{t(m) = \frac{(Mc + m_0 c_a)t_0 + m c_a t_a}{Mc + (m_0 + m)c_a}} \tag{63}$$

Come era naturale attendersi, se $m \to 0$ allora la temperatura di equilibrio $t \to t_0$, mentre, nel limite opposto, per $m \to \infty$ si ha che $t \to t_a$. L'andamento è riportato nella figura seguente.

b) Eguagliando la temperatura $t(m)$, data dall'espressione precedente, al valore della temperatura di fusione t_f si ottiene l'equazione per la massa di acqua calda m_1 necessaria per portare tutto il sistema alla temperatura di fusione della cera

$$t_f = \frac{(Mc + m_0 c_a)t_0 + m_1 c_a t_a}{Mc + (m_0 + m_1)c_a} \tag{64}$$

da cui

$$\boxed{m_1 = \frac{(Mc + m_0 c_a)(t_f - t_0)}{c_a(t_a - t_f)} = 2.017 \text{ kg}} \tag{65}$$

dove abbiamo usato $c/c_a = 0.7$.

c) In questo caso la temperatura di equilibrio del sistema totale rimarrà t_f e il calore verrà fornito dalla massa di acqua calda m_2 direttamente alla candela per scioglierla completamente:

$$M\lambda_f = -m_2 c_a (t_f - t_a)\,. \tag{66}$$

Da questa si ottiene

$$\boxed{\lambda_f = \frac{m_2 c_a (t_a - t_f)}{M} = 35.6 \text{ kJ/kg} = 8.5 \text{ kcal/kg}} \tag{67}$$

d) Aggiungendo ulteriore acqua calda, il bilancio energetico diventa

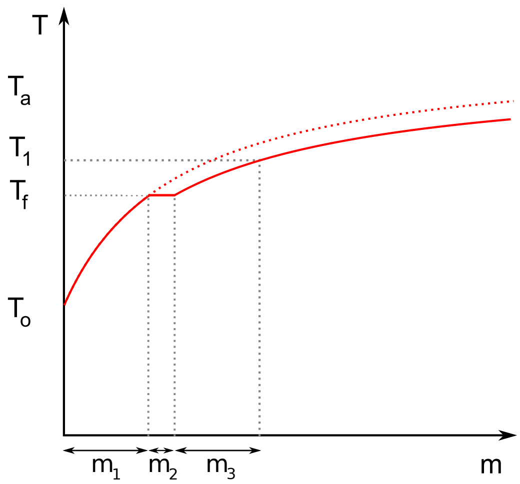
$$Mc(t_1 - t_f) + (m_0 + m_1 + m_2)c_a(t_1 - t_f) = -m_3 c_a (t_1 - t_a), \tag{68}$$

da cui ricaviamo la temperatura finale del sistema all'equilibrio

$$\boxed{t_1 = \frac{\big[(m_0 + m_1 + m_2)c_a + Mc\big]t_f + m_3 c_a t_a}{(m_0 + m_1 + m_2 + m_3)c_a + Mc} = 50.6°\text{C}} \tag{69}$$

e) La variazione di entropia della cera è data dalla somma di quella corrispondente all'innalzamento di temperatura e quella corrispondente alla transizione di fase (fusione)

$$\boxed{\Delta S_{\text{cera}} = Mc \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + \frac{M\lambda_f}{T_f} = 120.8 \text{ J/K}} \tag{70}$$



dove in questo caso è necessario esprimere tutte le temperature nella scala della temperatura assoluta. Per calcolare la variazione di entropia dell'universo occorre considerare cosa accade al resto del sistema. Abbiamo una massa d'acqua m_0 che viene scaldata da T_0 a T_1 e una massa $(m_1+m_2+m_3)$ d'acqua che viene raffreddata da T_a a T_1, quindi

$$\Delta S_{\text{amb}} = m_0 c_a \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + (m_1+m_2+m_3)c_a \ln\left(\frac{T_1}{T_a}\right) = -86.0 \text{ J/K} \quad (71)$$

da cui la variazione di entropia dell'universo

$$\boxed{\Delta S_{\text{uni}} = \Delta S_{\text{cera}} + \Delta S_{\text{amb}} = 34.8 \text{ J/K}}. \quad (72)$$