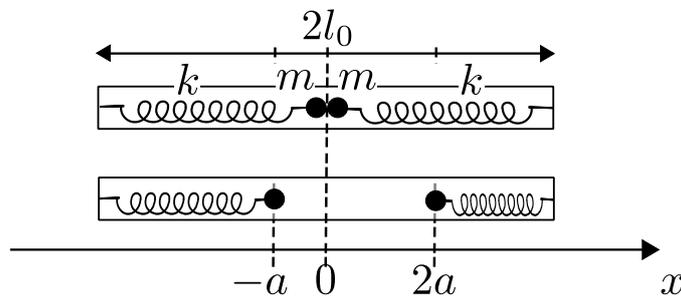


Fisica Generale I
A.A. 2017-2018, 18 giugno 2018

Esercizio I.1

Due molle identiche, di massa trascurabile, di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 , sono vincolate ai due estremi di una guida rettilinea e lasciano di lunghezza $2l_0$. All'estremità opposta di ciascuna molla è attaccata una pallina di massa m , di dimensioni trascurabili rispetto a l_0 . All'equilibrio le due palline si toccano al centro del sistema ($x = 0$), come illustrato in figura. La pallina di sinistra viene spostata verso il bordo di sinistra comprimendo la molla di a ; simultaneamente quella di destra viene spostata dalla parte opposta comprimendo la molla di $2a$. All'istante $t = 0$, le palline vengono lasciate libere di muoversi senza imprimere alcuna velocità iniziale. Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ le coordinate della pallina di sinistra e di destra per $t > 0$.

- a) Scrivere le equazioni del moto per le due palline e le espressioni di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ fino all'istante in cui le palline si urtano per la prima volta.
- b) Scrivere l'equazione del moto del centro di massa e la sua legge oraria $x_{CM}(t)$ per ogni $t > 0$.
- c) In quale istante e in quale posizione avviene il primo urto?
- d) Immediatamente prima dell'urto, scrivere le espressioni delle seguenti quantità: le velocità delle palline, la velocità del CM e la velocità relativa; l'energia cinetica totale, l'energia cinetica associata al centro di massa e l'energia cinetica del moto relativo.
- e) Se l'urto è elastico, determinare le velocità delle palline all'uscita dell'urto e tracciare le posizioni $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_{CM}(t)$ in un grafico per ogni $t > 0$.
- f) Siano gli urti anelastici, in modo tale che, in ciascun urto, l'energia cinetica del moto relativo viene ridotta ad una frazione f del suo valore prima dell'urto. Scrivere le equazioni che legano le velocità delle palline prima e dopo ciascun urto e dire, qualitativamente, cosa accade dopo molti urti.



Esercizio I.2

Il pianeta Mercurio ha massa $M = 3.3 \times 10^{23}$ kg e raggio $R = 2440$ km.

a) Determinare il valore g dell'accelerazione di gravità a cui sono soggetti i corpi sulla superficie del pianeta [si usi $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²]. Tenuto conto che il periodo di rotazione di Mercurio attorno al proprio asse è pari a 58.6 giorni terrestri, dimostrare che l'effetto della rotazione del pianeta sull'accelerazione di caduta dei corpi, Δg , è trascurabile ($\Delta g \ll g$).

b) Un razzo di massa m viene lanciato da un rilievo posto al polo nord. Dopo una breve fase di accelerazione, in cui la quota rispetto al suolo rimane costante, il razzo raggiunge una velocità v_1 puramente tangenziale e la propulsione viene spenta. Sapendo che Mercurio è privo di atmosfera, e supponendo che il razzo non incontri ostacoli dopo aver spento la propulsione, quanto deve valere v_1 affinché il razzo compia una traiettoria circolare? Calcolare il tempo T_1 impiegato dal razzo per tornare al punto di lancio.

c) Supponiamo, invece, che al momento dello spegnimento della propulsione la velocità del razzo sia v_2 , puramente tangenziale come prima, ma stavolta maggiore di v_1 e inferiore alla velocità di fuga. La velocità v_2 sia tale da far compiere al razzo un'orbita chiusa, con distanza massima dal centro di Mercurio pari a $2R$. Disegnare l'orbita. Usando la conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica, si calcoli v_2 .

d) Calcolare il rapporto tra il momento angolare del razzo in quest'orbita e quello nell'orbita circolare del punto b). Calcolare l'analogo rapporto dell'energia meccanica. Rappresentare entrambe le orbite nel grafico dell'energia potenziale efficace definita da $U_{\text{eff}}(r) = L^2/(2mr^2) + U(r)$, dove r è la distanza dal centro del pianeta.

e) Calcolare il rapporto dei periodi delle due orbite.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Tre moli di argon sono contenute in un recipiente dotato di pistone di massa trascurabile e libero di muoversi, che separa il gas dall'esterno. L'aria circostante si trova ad una pressione $P_1 = 1.02 \times 10^5$ Pa. L'argon può essere trattato come un gas ideale.

a) Inizialmente il gas è in uno stato di equilibrio termodinamico A, con $T_A = 286$ K. Poi viene lentamente fornito calore facendo aumentare il volume del gas del 30%, fino al nuovo stato B. Quindi il pistone viene bloccato e il gas viene raffreddato lentamente fino a fargli raggiungere uno stato C a pressione $P_2 = 0.95 \times 10^5$ Pa. Calcolare le coordinate termodinamiche degli stati A, B e C e tracciare le trasformazioni AB e BC nel diagramma P - V .

- b) In seguito il gas viene riportato allo stato iniziale eseguendo prima un raffreddamento isobaro CD a pressione P_2 e poi un riscaldamento isocoro DA, entrambi quasistatici. Tracciare il ciclo nel diagramma P - V ; calcolare la temperatura del gas in D, il lavoro complessivo compiuto dal gas, il calore scambiato e il rendimento della macchina termica così ottenuta.
- c) Si consideri ora un ciclo diverso, costituito da trasformazioni quasistatiche tra gli stati A, B, C', D', dove AB coincide con la trasformazione isobara del ciclo precedente, tra gli stessi stati A e B, e la trasformazione C'D' è ancora un'isobara alla stessa pressione P_2 del ciclo precedente. Invece, le trasformazioni BC' e D'A siano due isoterme. Tracciare questo nuovo ciclo nel diagramma P - V ; calcolare le coordinate termodinamiche degli stati C' e D', il lavoro complessivo compiuto dal gas, il calore scambiato e il rendimento della macchina termica così ottenuta.
- d) Rappresentare i due cicli nel diagramma T - S .

Esercizio II.2

Si consideri il seguente esperimento. Un blocco di plastica di massa $m_p = 5$ kg, a temperatura iniziale $t_{0p} = 20^\circ\text{C}$, viene messo a contatto con 1 kg di ghiaccio a $t_{0g} = -10^\circ\text{C}$ all'interno di un recipiente con pareti adiabatiche e capacità termica trascurabile. I due corpi raggiungono l'equilibrio termico a $t_f = 0^\circ\text{C}$ e nel recipiente si formano 385 ml di acqua allo stato liquido. Del ghiaccio sono noti il calore latente $\lambda = 335$ kJ/kg e il calore specifico $c_g = 2.1$ kJ/kg K.

- a) Determinare il calore assorbito dal ghiaccio, il calore specifico della plastica c_{0p} (nell'ipotesi che sia indipendente dalla temperatura) e la variazione di energia interna della plastica (trascurando effetti di espansione termica).
- b) Determinare le variazioni di entropia del blocco di plastica, del ghiaccio e dell'universo associate a questa trasformazione.
- c) Supponiamo di sapere, da informazioni indipendenti, che il calore specifico della plastica non è costante, ma dipende linearmente dalla temperatura in questo modo: $c_p(t) = a[1 + \gamma(t - t_f)]$. L'esperimento sia lo stesso di prima, con gli stessi risultati. Tracciare il grafico di $c_p(t)$ e dimostrare che il suo valore per $t = (t_{0p} + t_f)/2$ coincide con il valore c_{0p} calcolato al punto a). Usando gli stessi materiali e gli stessi strumenti di prima, quale esperimento potrebbe essere realizzato, in aggiunta al precedente, per determinare i valori a e γ ?

Soluzione esercizio I.1

a) L'esercizio richiede le equazioni del moto e le leggi orarie delle due palline rispetto al centro della guida. Tale scelta dell'origine dell'asse x fa sì che le due molle siano a riposo per $x = 0$, permettendoci di identificare la deformazione di ciascuna molla con la coordinata x_i della pallina i -esima.

Detto questo possiamo notare che prima dell'urto le due palline si comportano in maniera indipendente e loro equazioni del moto sono pertanto le seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{\text{el},1} = -kx_1 \\ m\ddot{x}_2 &= F_{\text{el},2} = -kx_2 \end{aligned}} \quad (1)$$

dove k indica la costante elastica delle due molle.

Per determinare le leggi orarie possiamo riscrivere le due equazioni del moto nel modo seguente

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m}x_1 = -\omega^2x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 = -\omega^2x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

dove abbiamo introdotto la pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$, che è la stessa per entrambe le palline. La soluzione generale delle precedenti equazioni differenziali è la stessa:

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega t + B_i). \quad (3)$$

A questo punto, per ottenere le leggi orarie, ci basta imporre le condizioni iniziali date dal problema, cioè

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= -a & \dot{x}_1(t=0) &= 0 \\ x_2(t=0) &= 2a & \dot{x}_2(t=0) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

da cui si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= -a \cos(\omega t) \\ x_2(t) &= 2a \cos(\omega t). \end{aligned}} \quad (5)$$

b) Ad ogni istante di tempo t la coordinata del centro di massa è data, per definizione, dall'espressione

$$x_{\text{CM}}(t) = \frac{mx_1(t) + mx_2(t)}{M} = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}, \quad (6)$$

essendo $M = 2m$ la massa totale del sistema. Inoltre l'equazione del moto per il centro di massa è la seguente:

$$M\ddot{x}_{\text{CM}} = F_{\text{ext}} \quad (7)$$

dove a destra dell'uguale ci va la somma delle forze esercitate dalle molle. Dunque vale

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_{\text{CM}} &= -k_1x_1 - k_1x_2 \\ &= -k(x_1 + x_2) = -2kx_{\text{CM}}. \end{aligned} \quad (8)$$

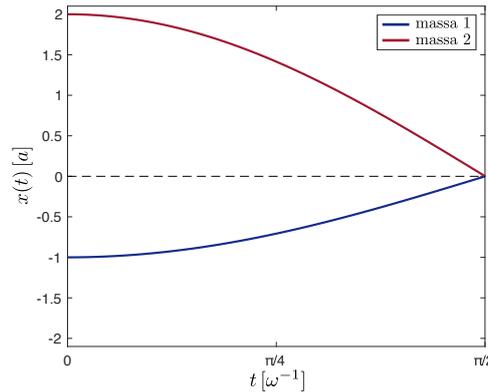
e pertanto l'equazione del moto diventa

$$m\ddot{x}_{\text{CM}} = -kx_{\text{CM}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_{\text{CM}} = -\omega^2x_{\text{CM}}}, \quad (9)$$

dove la pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$ è uguale a quella per le due palline, e la legge oraria è

$$\boxed{x_{\text{CM}}(t) = \frac{a}{2} \cos(\omega t)}. \quad (10)$$

Questa vale per ogni $t > 0$, anche dopo gli urti, dato che questi avvengono per effetto di sole forze interne, mentre il centro di massa obbedisce soltanto alle forze esterne.



c) Per determinare la posizione in cui avviene l'urto basta uguagliare x_1 e x_2 :

$$\begin{aligned} x_1(\bar{t}) &= x_2(\bar{t}) \\ -a \cos(\omega\bar{t}) &= 2a \cos(\omega\bar{t}). \end{aligned} \quad (11)$$

Per $a \neq 0$, la precedente equazione è risolta da

$$\boxed{\bar{t} = \pi/2\omega}. \quad (12)$$

Questo significa che l'urto avviene esattamente nel centro della guida, nel punto di equilibrio delle molle,

$$\boxed{x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) = 0}, \quad (13)$$

come si può capire facilmente dal grafico che riporta le leggi orarie per gli spostamenti delle due palline rispetto al centro del sistema. Nel grafico, le curve

continue rappresentano il moto prima del primo urto, quelle tratteggiate rappresentano il moto ipotetico delle palline in assenza di urti.

Si poteva arrivare alla stessa conclusione osservando che le masse e le molle sono uguali, quindi, partendo entrambe con velocità nulla arriveranno simultaneamente nella posizione di equilibrio dopo un quarto del periodo di oscillazione. Dato un oscillatore armonico la frequenza non dipende dall'ampiezza di oscillazione!

d) Le velocità delle due palline immediatamente prima dell'urto si possono ricavare dalle leggi orarie:

$$\begin{aligned} v_1(\bar{t}) &= \dot{x}_1(\bar{t}) = a\omega \sin(\omega\bar{t}) = a\omega \sin\left(\omega\frac{\pi}{2\omega}\right) = a\omega = v_0, \\ v_2(\bar{t}) &= \dot{x}_2(\bar{t}) = -2a\omega \sin(\omega\bar{t}) = -2a\omega \sin\left(\omega\frac{\pi}{2\omega}\right) = -2a\omega = -2v_0 \end{aligned} \quad (14)$$

dove abbiamo chiamato $v_0 = a\omega$. In alternativa, le velocità $v_1(\bar{t})$ e $v_2(\bar{t})$ si possono calcolare imponendo la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ka^2 &= \frac{1}{2}m[v_1(\bar{t})]^2 \\ \frac{1}{2}k(2a)^2 &= \frac{1}{2}m[v_2(\bar{t})]^2, \end{aligned} \quad (15)$$

da cui $|v_1(\bar{t})| = \sqrt{k/ma} = a\omega$ e $|v_2(\bar{t})| = 2\sqrt{k/ma} = 2a\omega$, con verso positivo per $v_1(\bar{t})$ e negativo per $v_2(\bar{t})$, come prima.

La velocità relativa tra le due palline immediatamente prima dell'urto è

$$\boxed{v_{\text{rel}} = v_1(\bar{t}) - v_2(\bar{t}) = 3a\omega = 3v_0}, \quad (16)$$

mentre quella del CM è

$$\boxed{v_{\text{CM}} = \frac{v_1(\bar{t}) + v_2(\bar{t})}{2} = -\frac{a\omega}{2} = -\frac{v_0}{2}}. \quad (17)$$

Per quanto riguarda invece l'energia cinetica totale, quella del CM e quella relativa, esse hanno la seguente forma:

$$\boxed{E_{k,\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{5}{2}mv_0^2}, \quad (18)$$

$$\boxed{E_{k,\text{CM}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{2}2m\frac{a^2\omega^2}{4} = \frac{1}{4}mv_0^2}, \quad (19)$$

$$\boxed{E_{k,\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{2}9a^2\omega^2 = \frac{9}{4}mv_0^2}. \quad (20)$$

Ovviamente $E_{k,CM} + E_{k,rel} = E_{k,tot}$, come deve essere.

e) Siccome abbiamo a che fare con urti elastici tra le palline, l'energia cinetica sarà conservata ad ogni urto. Inoltre nel punto in cui avviene l'urto le forze esterne sono nulle e quindi si conserva anche la quantità di moto totale. Pertanto, se definiamo v_1^\pm e v_2^\pm le velocità delle palline immediatamente prima (v^-) e dopo (v^+) l'urto, esse devono soddisfare le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_1^-)^2 + \frac{1}{2}m(v_2^-)^2 = \frac{1}{2}m(v_1^+)^2 + \frac{1}{2}m(v_2^+)^2 \\ mv_1^- + mv_2^- = mv_1^+ + mv_2^+ \end{cases} \quad (21)$$

ovvero

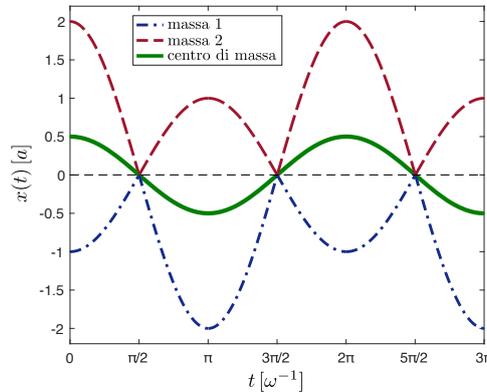
$$\begin{cases} (v_1^-)^2 + (v_2^-)^2 = (v_1^+)^2 + (v_2^+)^2 \\ v_1^- + v_2^- = v_1^+ + v_2^+ \end{cases} \quad (22)$$

Questo sistema ha soluzioni solo se le velocità rimangono invariate (nessun urto) oppure si scambiano i valori (urto). Dunque

$$\boxed{\begin{cases} v_1^+ = v_2^- = -2v_0 \\ v_2^+ = v_1^- = v_0 \end{cases}} \quad (23)$$

Quindi dopo ogni urto abbiamo che la pallina 1 compie il moto che avrebbe compiuto la pallina 2 in assenza della pallina 1 e viceversa (come riportato in figura). Questo risultato segue dal fatto che le due molle hanno la stessa costante elastica k . Il sistema è analogo al pendolo di Newton con due palline e per piccole oscillazioni. In questo caso l'oscillazione è data dalla forza elastica, nell'altro dalla proiezione della forza di gravità lungo la direzione tangente al moto del pendolo.

Per quanto riguarda il moto del centro di massa invece, la sua legge oraria è la stessa riportata in Eq. (10). Siccome le due palline hanno la stessa massa e ad ogni urto si scambiano semplicemente le leggi orarie, gli



urti risultano irrilevanti per il comportamento del centro di massa, come avevamo già anticipato.

f) L'energia cinetica relativa dopo l'urto anelastico è

$$E_{k,\text{rel}}^+ = f E_{k,\text{rel}}^- , \quad (24)$$

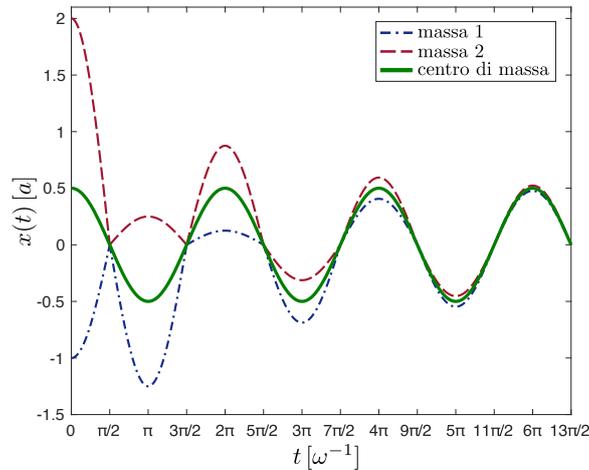
con $0 < f < 1$, mentre l'energia cinetica del centro di massa resta invariata. Pertanto l'energia cinetica totale dopo l'urto sarà

$$E_{k,\text{tot}}^+ = E_{k,\text{CM}} + E_{k,\text{rel}}^+ = \frac{1}{4} m v_0^2 + f E_{k,\text{rel}}^- . \quad (25)$$

Ora per calcolare le velocità delle palline in uscita dall'urto ci basta porre a sistema la conservazione della quantità di moto totale (che rimane costante e vale $M v_{\text{CM}} = -m v_0$) e la legge che governa l'energia meccanica, soggetta alla diminuzione dell'energia cinetica relativa dovuta all'anelasticità:

$$\begin{cases} m v_1^+ + m v_2^+ = -m v_0 \\ \frac{1}{2} m (v_1^+)^2 + \frac{1}{2} m (v_2^+)^2 = \frac{1}{4} m v_0^2 + f E_{k,\text{rel}}^- . \end{cases} \quad (26)$$

Assegnato il valore di f e date le velocità d'ingresso a ciascun urto (da cui il valore di $E_{k,\text{rel}}^-$) questo sistema permette di ricavare le velocità d'uscita. Qualitativamente, il moto procede invariato per il CM, mentre le palline oscilleranno tra distanze che si riducono ad ogni urto, dato che la distanza massima tra le palline si riduce proporzionalmente alla radice quadrata dell'energia cinetica del moto relativo (l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza). Dopo molti urti, l'energia del moto relativo tende ad annullarsi e, quindi, le due palline tenderanno a seguire da vicino il moto del CM, fino a che, di fatto, il loro moto sarà indistinguibile da quello. In figura si mostra il caso $f = 1/4$.



Soluzione esercizio I.2

a) L'accelerazione di gravità si ottiene da $|F| = GmM/r^2 = mg$ con $r = R$:

$$g = \frac{GM}{R^2} = 3.7 \text{ m/s}^2. \quad (27)$$

La variazione di g legata alla rotazione è dovuta alla forza centrifuga, $|F| = m\Omega^2 R$, con $\Omega = 2\pi/T_{\text{rot}}$. Questa variazione è nulla ai poli e massima all'equatore, così che la differenza tra i due valori di g è

$$\Delta g \equiv g_{\text{poli}} - g_{\text{equatore}} = \Omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T_{\text{rot}}^2} R = 3.76 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2. \quad (28)$$

La differenza relativa è

$$\frac{\Delta g}{g} \simeq 10^{-6} \quad (29)$$

e quindi Δg è trascurabile.

b) A partire dal punto in cui si spegne la propulsione, in prossimità della superficie, il moto diventa puramente balistico, soggetto alla sola forza di gravitazione di Mercurio. Se si vuole che l'orbita sia circolare la forza deve dare esattamente l'accelerazione centripeta corrispondente. Dunque

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v_1^2}{R} \quad (30)$$

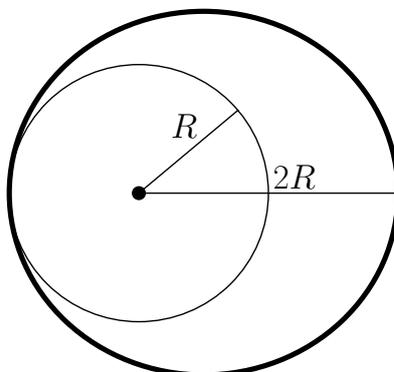
da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 3 \times 10^3 \text{ m/s} = 10800 \text{ km/h} . \quad (31)$$

Per tornare al punto di lancio il razzo deve percorrere l'intera circonferenza. Il periodo di rotazione è

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v_1} = 5.1 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1 \text{ h } 25 \text{ min } 4 \text{ s} . \quad (32)$$

c) Al momento dello spegnimento della propulsione il razzo si trova vicino alla superficie di Mercurio e sta viaggiando con velocità v_2 parallela al suolo a distanza $r_{\text{min}} = R$ dal centro del pianeta. Nel punto di massima distanza, $r_{\text{max}} = 2R$, la sua velocità è di nuovo puramente tangenziale. L'orbita è ellittica, essendo un'orbita chiusa (ma non circolare) nel campo gravitazionale di Mercurio. La figura mostra il pianeta di raggio R (linea sottile) e l'orbita ellittica (linea spessa), con il polo nord a sinistra, dove l'orbita è tangente alla superficie del pianeta.



Scriviamo le equazioni per la conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica, calcolate nei due punti estremi dell'orbita,

$$mv_2R = 2mv_3R \quad (33)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GMm}{2R}, \quad (34)$$

dove abbiamo chiamato v_3 la velocità del razzo nel punto di massima distanza. Dalla prima si ottiene $v_3 = v_2/2$, che inserito nella seconda dà

$$v_2 = \sqrt{\frac{4GM}{3R}} = \sqrt{\frac{4}{3}}v_1 = 3.5 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (35)$$

d) Il momento angolare è $L_2 = mv_2R$, mentre nel caso dell'orbita circolare (trattata al punto b) il suo valore era $L_1 = mv_1R$. Quindi abbiamo

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1.15. \quad (36)$$

L'energia meccanica nell'orbita ellittica vale

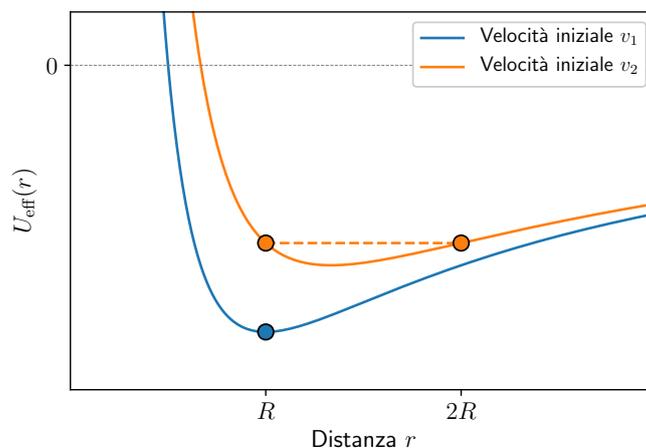
$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m \frac{4GM}{3R} - \frac{GmM}{R} = -\frac{1}{3} \frac{GmM}{R} \quad (37)$$

mentre per quella circolare vale

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m \frac{GM}{R} - \frac{GmM}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GmM}{R} \quad (38)$$

e il rapporto è dato da

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2}{3}. \quad (39)$$



Il moto avviene nel campo della forza gravitazionale, che è centrale e conserva il momento angolare e l'energia meccanica. Il grafico dell'energia potenziale efficace $U_{\text{eff}}(r)$, in unità arbitrarie, è mostrato in figura. La linea blu corrisponde al caso trattato in b) e l'orbita circolare è rappresentata semplicemente dal punto in $r = R$ in cui U_{eff} è minima (punto blu). La linea arancione corrisponde all'orbita trattata in c) e l'orbita ellittica corrisponde alla linea orizzontale tratteggiata tra la distanza minima $r = R$ e massima $r = 2R$.

e) Per il calcolo del periodo si può ricorrere alla terza legge di Keplero. Tutte le orbite chiuse attorno a Mercurio hanno lo stesso valore del rapporto T^2/a^3 , dove a è il semiasse maggiore dell'orbita e T è il periodo. Per l'orbita circolare calcolata al punto precedente avevamo già ricavato il periodo T_1 e in quel caso $a = R$. Per la nuova orbita abbiamo $a = (3/2)R$. Dunque il rapporto dei periodi T_2/T_1 è dato da

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = 1.84.} \quad (40)$$

Soluzione esercizio II.1

a) Nella prima trasformazione AB il pistone è libero di muoversi e si mantiene in equilibrio meccanico con la pressione esterna costante; dunque, si tratta di una trasformazione isobara quasistatica a pressione $P_A = P_1$. Nella trasformazione successiva BC, invece, il pistone è bloccato e quindi la trasformazione è un'isocora a volume $V_B = 1.3V_A$. Le coordinate degli stati di equilibrio si trovano applicando l'equazione di stato, usando $n = 3$, i valori

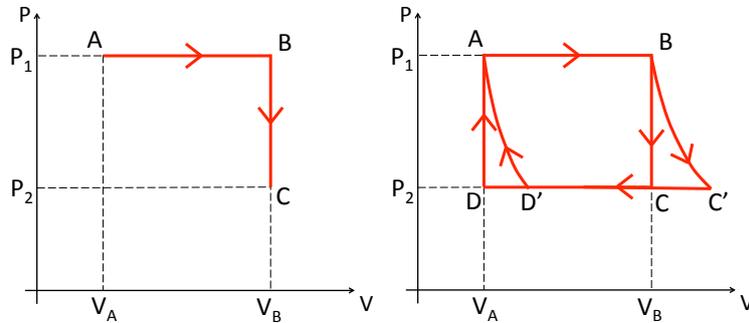
noti di P_1 , P_2 e T_A , e la relazione $V_B = 1.3V_A$:

$$P_A = P_1 = 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_A = 286 \text{ K}, \quad V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 69.9 \text{ l}$$

$$P_B = P_A = 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad V_B = 1.3V_A = 90.9 \text{ l}, \quad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 371.8 \text{ K}$$

$$P_C = P_2 = 0.95 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad V_C = V_B = 90.9 \text{ l}, \quad T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 346.3 \text{ K}.$$

Nella figura qui sotto a sinistra sono mostrate le trasformazioni AB e BC sul diagramma P - V (si noti che la scala è arbitraria e l'origine non è in $P = 0$ e $V = 0$).



b) Nella figura di destra è mostrato l'intero ciclo compiuto dal gas sul diagramma P - V , includendo le due trasformazioni CD e DA, rispettivamente isobara e isocora. La temperatura in D può essere ricavata dall'equazione di stato:

$$T_D = \frac{V_A P_C}{nR} = T_A \frac{P_C}{P_A} = 266.4 \text{ K}. \quad (41)$$

Il lavoro compiuto dal gas sull'intero ciclo corrisponde all'area del rettangolo descritto dalle quattro trasformazioni

$$W = (V_B - V_A)(P_A - P_D) = 0.3V_A \Delta P = 147 \text{ J}. \quad (42)$$

Il primo principio della termodinamica ci dice che in un ciclo il calore scambiato è uguale al lavoro compiuto, essendo $\Delta U = 0$:

$$Q = W = 147 \text{ J}. \quad (43)$$

Per determinare il rendimento del ciclo occorre calcolare il calore assorbito, ovvero la somma dei calori sulle trasformazioni AB e DA

$$Q_{\text{ass}} = Q_{AB} + Q_{DA} = n c_p (T_B - T_A) + n c_v (T_A - T_D) = 6084 \text{ J} \quad (44)$$

dove nel calcolo abbiamo usato i calori specifici $c_v = (3/2)R$ e $c_p = (5/2)R$, dato che l'Argon è un gas nobile e quindi è monoatomico. Il rendimento risulta essere

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = 2.4\%}. \quad (45)$$

c) Per calcolare le coordinate termodinamiche degli stati C' e D' usiamo al solito l'equazione di stato:

$$P_{C'} = P_2 = 0.95 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_{C'} = T_B = 371.8 \text{ K}, \quad V_{C'} = \frac{nRT_B}{P_2} = 97.6 \text{ l}$$

$$P_{D'} = P_2 = 0.95 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_{D'} = T_A = 286 \text{ K}, \quad V_{D'} = \frac{nRT_A}{P_2} = 75.1 \text{ l}.$$

Poi possiamo calcolare il lavoro eseguito nelle varie trasformazioni

$$W_{AB} = P_A(V_B - V_A) = 2140.1 \text{ J} \quad (46)$$

$$W_{BC'} = nRT_B \ln\left(\frac{V_{C'}}{V_B}\right) = 659.3 \text{ J} \quad (47)$$

$$W_{C'D'} = P_{C'}(V_{D'} - V_{C'}) = -2140.1 \text{ J} \quad (48)$$

$$W_{D'A} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_{D'}}\right) = -507.2 \text{ J} \quad (49)$$

da cui si ottiene il lavoro totale

$$\boxed{W' = W_{AB} + W_{BC'} + W_{C'D'} + W_{D'A} = 152.2 \text{ J}}, \quad (50)$$

da cui anche $\boxed{Q' = W' = 152.2 \text{ J}}$.

Per calcolare il rendimento ci servono i calori assorbiti:

$$Q'_{\text{ass}} = Q_{AB} + Q_{BC'} = nc_p(T_B - T_A) + W_{BC'} = 6009.7 \text{ J} \quad (51)$$

in modo che

$$\boxed{\eta = \frac{W'}{Q'_{\text{ass}}} = \frac{152.2}{6009.7} = 2.5\%}. \quad (52)$$

d) Per riportare i cicli sul diagramma T - S ricordiamo che $dS = \delta Q/T$. Per le isobare avremo $dS = nc_p \frac{dT}{T}$. Integrando ed esprimendo la temperatura in funzione dell'entropia, arriviamo a

$$T(S) = \text{costante} \times e^{\frac{S}{nc_p}}. \quad (53)$$

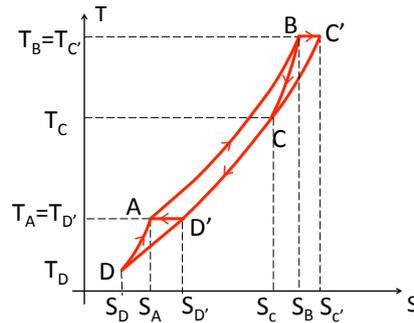
Analogamente per le isocore avremo

$$T(S) = \text{costante} \times e^{\frac{S}{nc_v}}. \quad (54)$$

Ricordando che $c_p > c_v$ i due cicli risultano come in figura. Si noti che, essendo l'entropia di un gas ideale esprimibile nella forma

$$S = nc_p \ln T - nR \ln P + c, \quad (55)$$

le trasformazioni che stanno sulla stessa isobara $P = \text{costante}$, sono tratti di una stessa curva esponenziale.



Soluzione esercizio II.2

a) Posti a contatto, plastica e ghiaccio termalizzano scambiando un certo calore Q . La plastica si raffredda, mentre il ghiaccio si scalda e si scioglie parzialmente. Il calore assorbito dal ghiaccio è

$$\boxed{|Q| = m_g c_g (t_f - t_{0g}) + \lambda \Delta m = m_g c_g \Delta t_g + \lambda \Delta m = 150 \text{ kJ}}, \quad (56)$$

avendo usato $\Delta m = 385 \text{ g}$ per la massa di ghiaccio fuso (1 ml di acqua corrisponde a 1 g).

Lo stesso calore viene ceduto dalla plastica. Se il calore specifico della plastica è costante, possiamo scrivere

$$|Q| = m_p c_{0p} (t_{0p} - t_f) = m_p c_{0p} \Delta t_p, \quad (57)$$

da cui

$$\boxed{c_{0p} = \frac{|Q|}{m_p \Delta t_p} = 1.5 \text{ kJ}/(\text{kg K})}. \quad (58)$$

Notiamo per inciso che, fino a che si lavora con differenze di temperatura, è indifferente esprimere i gradi in Celsius o Kelvin.

Infine, il pezzo di plastica non subisce variazioni di volume, quindi non compie lavoro meccanico: $W = 0$. Dal primo principio deduciamo che la variazione della sua energia interna è

$$\boxed{\Delta U = -|Q| = -150 \text{ kJ}}. \quad (59)$$

L'energia interna diminuisce, dato che la plastica si raffredda.

b) Per calcolare la variazione di entropia della plastica basta considerare un raffreddamento reversibile tra le stesse temperature. Questo richiede idealmente una serie infinita di serbatoi di calore, ciascuno ad una diversa temperatura T , con cui la plastica scambia un calore infinitesimo $\delta Q = m_p c_{0p} dT$. Per questo calcolo è necessario usare la scala delle temperature assolute. Dalla definizione di entropia possiamo scrivere

$$\Delta S_p = \int_{T_{0p}}^{T_f} \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = m_p c_{0p} \ln \frac{T_f}{T_{0p}} = -530 \text{ J/K}. \quad (60)$$

Per il ghiaccio va considerato anche il termine legato allo scioglimento parziale. Quest'ultimo si può stimare considerando uno scambio termico reversibile con un serbatoio a temperatura $T_f + \epsilon$, in modo che, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, si ha la variazione di entropia di scioglimento

$$\Delta S_{\text{sc}} = \int \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = \frac{\lambda \Delta m}{T_f} = 472.2 \text{ J/K} \quad (61)$$

a cui va aggiunta la variazione di entropia associata al riscaldamento del ghiaccio. La variazione totale è dunque

$$\Delta S_g = m_g c_g \ln \frac{T_f}{T_{0g}} + \frac{\lambda \Delta m}{T_f} = (78.3 + 472.2) \text{ J/K} = 550.5 \text{ J/K}. \quad (62)$$

Di conseguenza, essendo l'intero sistema isolato, la variazione di entropia dell'universo sarà data dalla somma

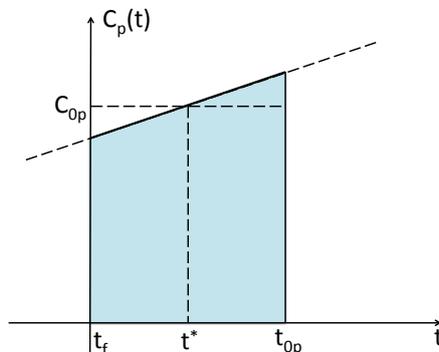
$$\Delta S_{\text{uni}} = \Delta S_p + \Delta S_g = 20.5 \text{ J/K}, \quad (63)$$

che è positiva, come ci si aspetta.

c) La funzione $c_p(t) = a[1 + \gamma(t - t_f)]$ è una retta che assume il valore a per $t = t_f$ e il valore $a(1 + \gamma \Delta t_p)$ per $t = t_{0p}$, avendo chiamato Δt_p l'intervallo di temperatura $t_{0p} - t_f$, come al punto a). Per definizione di calore specifico, possiamo scrivere $Q = m_p c_p(t) dt$ per ogni variazione infinitesima di temperatura; ne segue che l'area sottesa dalla retta $c_p(t)$ nell'intervallo Δt_p è uguale al modulo del calore per unità di massa ceduto dalla plastica al ghiaccio:

$$\int_{t_f}^{t_{0p}} c_p(t) dt = \frac{|Q|}{m_p}. \quad (64)$$

Dal punto a) sappiamo che $|Q| = 150$ kJ. Dato che l'esperimento è lo stesso e che il ghiaccio e la plastica eseguono le stesse trasformazioni, il calore sarà ancora 150 kJ. La differenza sta nel fatto che in a) la quantità $|Q|/m_p$ era data dall'espressione $c_{0p}\Delta t$, che è l'area del rettangolo sotteso dal segmento orizzontale corrispondente a $c(t) = c_{0p} = \text{costante}$, mentre ora l'integrale corrisponde all'area di un



trapezio, come in figura. Per ragioni di simmetria, il rettangolo che ha la stessa area (lo stesso $|Q|$) del trapezio è quello che ha il lato superiore che taglia il segmento obliquo del trapezio esattamente a metà. Questo implica che $c_p(t) = c_{0p}$ per $t = (t_{0p} + t_f)/2$, come si voleva dimostrare.

Volendo dimostrarlo tramite calcoli espliciti, basta eguagliare le due espressioni alternative del calore, quella con c_p costante e quella con $c_p(t)$ lineare in t , ottenute dall'integrale precedente:

$$c_{0p}\Delta t_p = a\Delta t_p + \frac{1}{2}a\gamma(\Delta t_p)^2, \quad (65)$$

ovvero

$$c_{0p} = a + \frac{1}{2}a\gamma\Delta t_p = a \left(1 + \gamma \frac{\Delta t_p}{2} \right), \quad (66)$$

che coincide con il valore di $c_p(t)$ a metà dell'intervallo Δt_p , a conferma della dimostrazione geometrica data in precedenza.

Notiamo che la condizione appena trovata per il valor medio di c_p nell'intervallo Δ_p fornisce una relazione tra i valori incogniti a e γ , note le quantità c_{0p} e Δt_p , ma non permette di calcolarli singolarmente. Serve quindi un'altra relazione che li leghi. Dovendo usare lo stesso blocco di plastica e la stessa quantità di acqua nello stesso recipiente, una possibilità consiste nel ripetere l'operazione di prima ma partendo da una temperatura diversa per il blocco di plastica e/o per l'acqua. Ad esempio, si può prendere il blocco di plastica alla stessa temperatura iniziale di prima, ma stavolta metterlo a contatto con l'acqua, tutta in fase liquida a $t = t_f = 0^\circ\text{C}$. Le due sostanze raggiungeranno l'equilibrio termico ad una temperatura t'_f intermedia tra t_f e t_{0p} . La misura di t'_f fornirà la seconda relazione algebrica tra a e γ che serve per determinarne i valori e conoscere in modo completo l'andamento di $c_p(t)$.