Fisica Generale I
A.A. 2018-2019, 8 febbraio 2019

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Una gru sovrasta l'edificio Povo 1 per studiare il curioso moto degli studenti attorno all'edificio (i rinomati Giri di Povo 1). La gru ha un braccio orizzontale di acciaio, che possiamo considerare come una trave rigida sottile di lunghezza $L = 30$ m. La trave è vincolata al pilastro verticale in un punto A, con una cerniera che ne permette la rotazione soltanto nel piano orizzontale. Come mostrato in figura, l'estremità più vicina dista $L/6$ da A. Sul lato lungo si trova una telecamera di massa $m = 3$ kg, che può scorrere lungo la trave, essendo agganciata ad essa tramite una guida rettilinea. La gru ruota in senso antiorario, a velocità angolare costante, impiegando due minuti per compiere ogni giro.

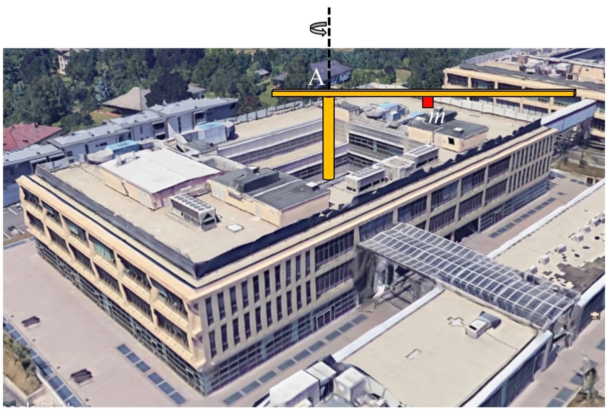
a) Inizialmente la telecamera è bloccata a metà della trave; ad un certo istante il vincolo viene rimosso e la telecamera inizia a scorrere lungo la guida senza attrito. Determinare la velocità con cui ne raggiunge l'estremità.

b) Qual è il momento di forze, in funzione della posizione x della telecamera, che il motore della gru deve imprimere alla trave per tenere costante la sua rotazione durante il moto della telecamera?

c) Determinare le reazioni vincolari della trave sulla telecamera durante il moto di quest'ultima.

d) Si consideri adesso il caso in cui la guida eserciti un attrito radente descritto dai coefficienti di attrito statico $\mu_s = 0.05$ e dinamico $\mu_d = 0.03$. Qual è la velocità angolare massima della gru affinché la telecamera rimanga ferma a metà della trave per il solo effetto dell'attrito? E se invece la velocità angolare è quella critica e la telecamera comincia a scorrere sulla guida, con quale velocità arriva all'estremità?

e) Tornando al caso del punto a), in assenza di attrito, scrivere l'equazione del moto radiale della telecamera e determinarne la soluzione.



Esercizio I.2

Una sfera omogenea di raggio $R = 4$ cm e massa $m = 500$ g è appesa al soffitto mediante un'asticella sottile, di lunghezza $L = 2R$ e massa trascurabile, saldata rigidamente alla superficie della sfera (figura I). Il sistema può oscillare liberamente nel piano verticale attorno al punto O vincolato al soffitto.

a) Determinare il momento d'inerzia della sfera rispetto ad O.

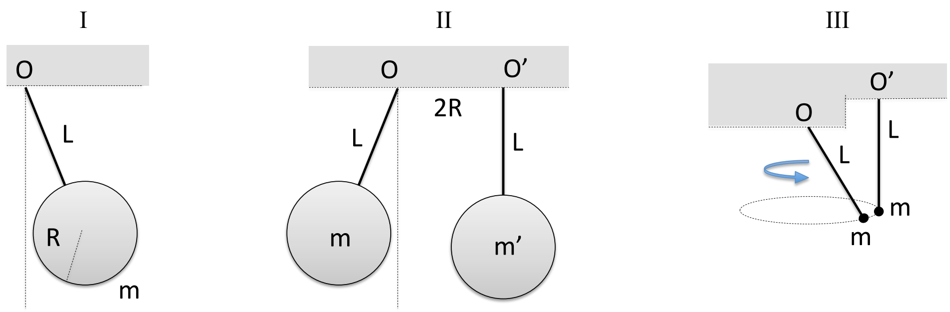
b) Scrivere la legge oraria nel caso in cui venga abbandonata da ferma da un piccolo angolo θ_0 e calcolare il periodo di oscillazione.

Si consideri adesso (figura II) anche una seconda sfera identica, appesa con analoga asticella al soffitto ma in un punto O$'$ che dista $D = 2R$ da O. Inizialmente la prima sfera viene lasciata, da ferma, da un angolo $\theta_0 = 10°$ rispetto alla verticale e va a colpire la seconda sfera che si trova nella sua posizione di equilibrio. L'urto è frontale ed elastico, con le due asticelle che si mantengono nello stesso piano verticale.

c) Calcolare la velocità v_0 con cui la prima sfera colpisce la seconda e descrivere la dinamica del sistema a seguito dell'urto.

d) Come cambierebbe il moto successivo all'urto se la seconda sfera avesse una massa doppia, $m_2 = 2m$?

e) Si consideri infine il caso (figura III) in cui si hanno due pendoli semplici (con masse m puntiformi e asta di lunghezza L). Il primo è appeso più in basso e la massa percorre una traiettoria circolare (pendolo conico) con un angolo tale da andare a colpire esattamente l'altra massa, inizialmente in quiete. Descrivere qualitativamente il moto in seguito all'urto elastico.



Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1
Un gas ideale monoatomico è contenuto in un recipiente di volume fissato e si trova all'equilibrio a $t_{\mathrm{gas}} = 40°\mathrm{C}$ e $P = 10^5$ Pa. Un cubetto di ghiaccio di massa $m = 50$ g, che si trova ad una temperatura $t_g = -3°\mathrm{C}$, viene posto a contatto termico con il gas. Lentamente il sistema raggiunge un nuovo equilibrio termico ad una temperatura $t_f = 1°\mathrm{C}$. Determinare:
a) il numero di moli di gas nel recipiente, sapendo che i calori specifici di acqua e ghiaccio sono $c_a = 4.186$ kJ/kg K e $c_g = 2.090$ kJ/kg K, e il calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 334$ kJ/kg (si trascuri per semplicità la capacità termica del recipiente);
b) il volume occupato dal gas;
c) la variazione di energia interna;
d) la variazione di entropia del gas e dell'universo.
e) A partire dal nuovo stato di equilibrio, improvvisamente l'acqua viene tolta e il gas viene fatto espandere liberamente fino a fargli occupare il triplo del suo volume iniziale. Nell'ipotesi che l'espansione avvenga in modo adiabatico, determinare la variazione di energia interna e di entropia del gas nella trasformazione.

Esercizio II.2
Un terzo di mole di un gas ideale biatomico compie un ciclo costituito da quattro trasformazioni in sequenza, AB, BC, CD, DA, quasistatiche e reversibili, dove:
- AB e CD sono trasformazioni adiabatiche;
- BC è una trasformazione isocora;
- DA è una trasformazione isobara.

Le temperature in A, C e D sono rispettivamente $T_A = 300$ K, $T_C = 610$ K, $T_D = 320$ K.
a) Sulla base dei soli dati disponibili, stabilire se il ciclo rappresenta una macchina termica o una macchina frigorifera.
b) Con gli stessi dati, calcolare la temperatura del gas in B.
c) Se $V_B = 2$ l, valutare le coordinate termodinamiche del gas nei quattro punto A, B, C, e D.
d) Disegnare il ciclo in un diagramma P-V e calcolare il lavoro compiuto dal gas nel ciclo.
e) Calcolare il rendimento. Come cambierebbe il rendimento se considerassimo il doppio delle moli di gas?

Soluzione esercizio I.1

a) Il moto della telecamera avviene lungo una guida rettilinea priva di attrito. La guida è in quiete nel sistema di riferimento in rotazione, solidale con la gru. Conviene decisamente utilizzare questo sistema di riferimento per risolvere il problema, dato che in quello inerziale il moto della telecamera è più complicato. Nel sistema di riferimento in rotazione la telecamera è soggetta alla forza centrifuga radiale, $F(x) = m\Omega^2 x$, dove x è la distanza misurata a partire dal punto A sull'asse di rotazione. La posizione iniziale è $x = L/3$, mentre l'estremo del lato lungo si trova in $x = (5/6)L$. Tale forza apparente è anche conservativa e l'energia potenziale associata è $U(x) = -(1/2)m\Omega^2 x^2$, in modo che $F = -dU/dx$. La forza di Coriolis, che agisce quando la telecamera si muove, è perpendicolare alla trave e non compie lavoro. Dato che non vi sono altre forze radiali, possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica in questo modo

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2\left(\frac{5}{6}L\right)^2 = -\frac{1}{2}m\Omega^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 , \tag{1}$$

ricavando così la velocità radiale finale

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{7}{12}}\Omega L = 1.2 \text{ m/s}} \tag{2}$$

dove abbiamo usato il periodo di rotazione, $T = 120$ s, per calcolare $\Omega = 2\pi/T = 0.0524$ rad/s.

b) La trave ruota a velocità costante mentre la telecamera si muove radialmente. Quindi il sistema composto dalla trave e dalla telecamera cambia il suo momento angolare nel tempo. Limitiamoci a considerare la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione della gru. Si avrà

$$L_z = I\Omega = (I_{\text{trave}} + mx^2)\Omega \,, \tag{3}$$

dove la dipendenza dal tempo entra solo nel termine x^2. La derivata temporale di L_z deve essere uguale al momento delle forze agente sulla trave nella giunzione in A, non essendovi altre forze che possano esercitare un momento sulla trave in quella direzione (in assenza di vento). Dunque

$$\tau = \frac{dL_z}{dt} = \frac{dL_z}{dx}\frac{dx}{dt} = 2m\Omega x v \,. \tag{4}$$

Per esprimere τ in funzione di x dobbiamo ricavare l'espressione della velocità v in funzione di x. Di nuovo, possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}m\Omega^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 , \tag{5}$$

da cui

$$v(x) = \Omega\sqrt{x^2 - \frac{L^2}{9}} \tag{6}$$

e infine

$$\boxed{\tau = 2m\Omega^2 x\sqrt{x^2 - \frac{L^2}{9}}}. \tag{7}$$

Nel caso in cui sulla cerniera in A vi fossero attriti che resistono alla rotazione della gru (come ci si aspetta in una gru reale), il motore dovrebbe compensarne l'azione con un'ulteriore momento di forze, che si aggiunge a quello trovato; ma tale momento sarebbe indipendente dalla posizione della telecamera e sarebbe quindi costante.

c) Le reazioni vincolari esercitate dalla guida rettilinea sulla telecamera, in direzione perpendicolare alla guida stessa, sono necessarie sia per compensare la forza peso, che farebbe cadere la telecamera al suolo, che per mantenerla in rotazione assieme alla gru. La prima condizione riguarda al reazione vincolare nella direzione verticale, che vale

$$\boxed{N_z = mg} \tag{8}$$

ed è costante. La seconda, vista nel sistema di riferimento in rotazione, è la forza necessaria a compensare la forza di Coriolis, e dunque

$$\boxed{N_y = 2m\Omega v(x) = 2m\Omega^2\sqrt{x^2 - \frac{L^2}{9}}} \tag{9}$$

che invece dipende dalla posizione x.

d) Se la telecamera è ferma a metà della trave, in $x = L/3$, essa risente della forza centrifuga $m\Omega^2(L/3)$, che deve essere compensata da una forza uguale e opposta. Se questa forza è solamente quella di attrito statico, il suo limite superiore è $\mu_s mg$. Dunque la velocità di rotazione della gru è limitata superiormente dalla condizione

$$m\Omega^2\frac{L}{3} \leq \mu_s mg \tag{10}$$

ovvero

$$\boxed{\Omega \leq \Omega_{\max} = \sqrt{\frac{3\mu_s g}{L}} = 0.221 \text{ rad/s}}. \tag{11}$$

Se la velocità angolare è proprio $\Omega_{\max}$ e la telecamera inizia a scorrere sulla guida, il suo moto sarà rallentato dalla forza di attrito radente. L'energia meccanica non si conserva e la sua variazione è uguale al lavoro (negativo) eseguito dalla forza di attrito. La velocità finale sarà quindi minore di quella calcolata al punto a). La forza di attrito è $-\mu_d N$, dove $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$ è il modulo della reazione vincolare. Il termine N_y dipende dalla velocità istantanea della telecamera, come al punto c) e, per questo motivo, renderebbe il calcolo molto complicato. Osserviamo però che il suo contributo a N è piccolo rispetto a quello della forza peso. Infatti, N_y è sicuramente minore di $2m\Omega_{\max} v_{f,\max}$, dove $v_{f,\max}$ è la velocità finale calcolata come al punto a) ma con la nuova velocità angolare. Dunque $N_y/N_x \leq 2\Omega_{\max} v_{f,\max}/g = 0.23$ e l'errore che si compie nel valore di N trascurando la forza di Coriolis, essendo dell'ordine di $(1/2)(N_y/N_z)^2$, è inferiore al 3%. Procediamo quindi assumendo che la forza di attrito sia $-\mu_d mg$. Dato che è una forza costante, il lavoro che compie è semplicemente il prodotto della forza per lo spazio percorso, pari a $L/2$. Eguagliandolo alla variazione di energia meccanica otteniamo

$$-\mu_d mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m \Omega_{\max}^2 L^2 \left[\left(\frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] \tag{12}$$

da cui si ottiene la nuova velocità finale

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{7}{12} \Omega_{\max}^2 L^2 - \mu_d g L} = 4.1 \text{ m/s}}\,. \tag{13}$$

e) Tornando al caso senza attrito, con la telecamera che parte da ferma a metà della trave e soggetta alla sola forza centrifuga, l'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = m\Omega^2 x \tag{14}$$

ovvero

$$\boxed{\ddot{x} - \Omega^2 x = 0}\,. \tag{15}$$

Si tratta di trovare funzioni che, derivate due volte, danno se stesse moltiplicate per la costante positiva Ω^2. Le uniche funzioni che hanno questa proprietà sono le funzioni esponenziali $\exp(\pm\Omega t)$. La soluzione potrà essere, in generale, una combinazione lineare delle due

$$x(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\,. \tag{16}$$

La soluzione particolare che corrisponde al moto della telecamera deve soddisfare le condizioni iniziali $x(0) = L/3$ e $\dot{x}(0) = 0$. Da queste si ottengono $A + B = L/3$ e $A - B = 0$. Quindi la soluzione è

$$\boxed{x(t) = \frac{L}{6} \left(e^{\Omega t} + e^{-\Omega t} \right)}\,. \tag{17}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Per il calcolo del momento d'inerzia basta ricorrere al teorema di Steiner. Sapendo che il momento d'inerzia della sfera rispetto al suo centro è $(2/5)MR^2$ e che la distanza del centro della sfera dal vincolo O è $3R$, si ottiene

$$\boxed{I = \frac{2}{5}mR^2 + m(3R)^2 = \frac{47}{5}mR^2 = 7.52 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}} \tag{18}$$

b) Si tratta di un pendolo fisico. L'oscillazione è indotta dal momento della forza peso rispetto al polo O secondo la legge

$$I\ddot{\theta} = \tau\theta \tag{19}$$

dove $\tau(\theta) = -3Rmg\sin\theta$. Quindi l'equazione del moto è

$$\ddot{\theta} = -\frac{15}{47}\frac{g}{R}\sin\theta \tag{20}$$

e per piccoli angoli può essere scritta nella forma dell'equazione armonica

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{15}{47}\frac{g}{R}\right)\theta = 0 \tag{21}$$

con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{15}{47}\frac{g}{R}} = 8.85\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{22}$$

La soluzione è

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos\omega t} \tag{23}$$

avendo scelto la fase in modo da avere velocità nulla quando l'angolo è quello iniziale, θ_0. Il periodo è dato da

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{47}{15}\frac{R}{g}} = 0.71\ \mathrm{s}}\,. \tag{24}$$

c) L'angolo di partenza, $\theta = 10° = 0.1745$ rad, è abbastanza piccolo da assumere valida l'approssimazione armonica. La velocità angolare della prima sfera può essere ricavata dalla legge oraria scritta in precedenza, derivando rispetto al tempo

$$\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0\sin\omega t\,. \tag{25}$$

Al momento dell'urto, dopo un quarto di periodo, entrambe le sfere si trovano sulla verticale e la velocità della prima raggiunge il suo valore massimo

$$\boxed{v_0 = 3R\dot{\theta} = 3R\omega\theta_0 = 0.185\ \mathrm{m/s}} \tag{26}$$

L'urto elastico tra due sfere uguali, con la prima che arriva con velocità orizzontale e la seconda ferma, è la realizzazione minima del pendolo di Newton. La conservazione dell'energia e della quantità di moto impongono che la prima si fermi e la seconda parta con la stessa velocità che aveva la prima. In particolare possiamo usare la conservazione della quantità di moto totale nella direzione dell'urto

$$v_0 = v_1 + v_2 \tag{27}$$

in aggiunta alla conservazione dell'energia cinetica di traslazione

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2\,. \tag{28}$$

La massa m è sparita dalle equazioni perché è la stessa in tutti i termini. Elevando al quadrato la prima e usando la seconda si conclude che il prodotto delle velocità dopo l'urto, $v_1 v_2$, deve essere nullo. Escludendo il caso, non fisico, in cui la seconda sfera rimane ferma, rimane solo il caso in cui questa si muova con velocità v_0, con la prima che si arresta nell'urto:

$$\boxed{v_1 = 0\ ;\quad v_2 = v_0}\,. \tag{29}$$

Gli urti si ripetono poi uguali in successione, invertendo la direzione dell'urto ogni mezzo periodo di oscillazione.
Si noti che, trattandosi in realtà di urti tra pendoli fisici, si sarebbe dovuto prima scrivere la conservazione del momento angolare rispetto ad uno dei due punti fissi O oppure O$'$ e poi la conservazione dell'energia cinetica scritta nella forma $(1/2)I\omega^2$. Avremmo comunque trovato le equazioni (27) e (28).

d) Se la seconda sfera ha una massa doppia della prima le equazioni per la conservazione della quantità di moto e dell'energia diventano

$$v_0 = v_1 + 2v_2 \tag{30}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + 2v_2^2\,. \tag{31}$$

Come prima, conviene elevare al quadrato la prima e usare la seconda per ottenere $v_2(v_2 + 2v_1) = 0$. Scartiamo la soluzione $v_2 = 0$ in quanto incompatibile con l'urto, e inseriamo l'altra soluzione, $v_2 = -2v_1$ nella prima equazione, ottenendo

$$\boxed{v_1 = -\frac{1}{3}v_0\ ;\quad v_2 = \frac{2}{3}v_0}\,. \tag{32}$$

Dopo il primo urto le due sfere si muoveranno in verso opposto per poi scontrarsi di nuovo dopo mezzo periodo di oscillazione. Il periodo di oscillazione infatti non dipende dalla velocità iniziale. Prima di urtarsi la seconda volta, le loro velocità sono le stesse scritte qui sopra, ma con segno opposto. La conservazione dell'energia cinetica ha la stessa forma di prima, mentre la quantità di moto prima dell'urto ha segno opposto. Dunque

$$-v_0 = v_1' + 2v_2' \tag{33}$$

$$v_0^2 = (v_1')^2 + 2(v_2')^2 \,. \tag{34}$$

Eleviamo al quadrato la prima e usiamo la seconda per ottenere nuovamente $v_2'(v_2' + 2v_1') = 0$. Stavolta però la soluzione giusta è $v_2' = 0$, dato che l'altra, $v_2' = -2v_1'$, se inserita nella prima equazione darebbe velocità d'uscita dall'urto uguali a quelle d'ingresso, come se l'urto non avvenisse. Quindi, al secondo urto la prima sfera si riprende tutto il moto che aveva prima del primo urto, mentre la seconda si ferma. Il moto si ripeterà in questo modo all'infinito (avendo trascurato attriti e effetti inelastici).

e) Sia v_0 la velocità tangenziale della prima particella lungo l'orbita circolare del pendolo conico. Le due particelle puntiformi si urtano elasticamente nella direzione della tangente all'orbita. Essendo le masse uguali, immediatamente dopo l'urto la prima particella si ferma e la seconda parte con velocità v_0. La prima particella quindi inizierà un moto pendolare, ma stavolta come pendolo semplice, nel piano del foglio in figura III. L'altra, analogamente, si comporterà come un pendolo semplice, ma nel piano ortogonale al foglio. Il periodo di oscillazione è lo stesso, dato che i pendoli hanno uguale massa e uguale lunghezza. Dopo un periodo di oscillazione le due particelle si urtano di nuovo, la prima essendo istantaneamente ferma e la seconda provenendo con velocità v_0 nel verso entrante nel foglio. Di nuovo esse si scambieranno le loro velocità. La prima riparte sull'orbita circolare del pendolo conico e la seconda si ferma. E così via.
Va detto, per inciso, che la realizzazione pratica di tale dispositivo è molto più delicata che nel caso del normale pendolo di Newton, perché qui bastano minimi effetti di attrito, di anelasticità e di anarmonicità (violazione dell'approssimazione di piccoli angoli) per violare le condizioni necessarie a garantire una sequenza di urti. Inoltre v_0 non può avere un valore qualsiasi, dato che il pendolo conico ha un'orbita circolare stabile solo per velocità angolari maggiori di $\sqrt{g/L}$.

Soluzione esercizio II.1

a) Il gas e il cubetto di ghiaccio, inizialmente a temperature diverse, vengono messi a contatto e raggiungono equilibrio termico ad una temperatura $t_f = 1°\mathrm{C}$. A questa temperatura il ghiaccio si sarà interamente sciolto. Dato che la capacità termica del recipiente è trascurabile per ipotesi, lo scambio di calore avviene solo tra il gas e il ghiaccio/acqua. In particolare, la quantità di calore

$$Q = nc_v(t_f - t_{\mathrm{gas}}) \,, \tag{35}$$

rilasciata dal gas verrà assorbita dal ghiaccio scaldandolo fino a $t_0 = 0°\text{C}$, poi sciogliendolo completamente in acqua a temperatura costante e, infine, scaldando l'acqua fino a t_f. Dunque deve valere la relazione

$$Q = mc_g(t_0 - t_g) + m\lambda + mc_a(t_f - t_0)\,, \tag{36}$$

da cui possiamo determinare il numero di moli del gas

$$\boxed{n = \frac{mc_g(t_0 - t_g) + m\lambda + mc_a(t_f - t_0)}{c_v(t_{\text{gas}} - t_f)} = 35.4 \text{ mol}}\,, \tag{37}$$

avendo utilizzato il valore $c_v = (3/2)R$ per il calore specifico del gas e i valori assegnati per le altre quantità. Notiamo che in questo calcolo non è necessario convertire le temperature in Kelvin, dato che entrano in gioco solo differenze di temperatura.

b) Il volume occupato dal gas può essere ottenuto dall'equazione di stato applicata allo stato di equilibrio iniziale

$$\boxed{V = \frac{nRT_{\text{gas}}}{P} = 0.922 \text{ m}^3 = 92.2 \text{ l}}\,, \tag{38}$$

essendo $T_{\text{gas}} = 313.15$ K.

c) La variazione di energia interna del gas dipende unicamente dalla variazione di temperatura:

$$\boxed{\Delta U = nc_v(t_f - t_{\text{gas}}) = -17.2 \text{ kJ}}\,. \tag{39}$$

L'energia interna diminuisce dato che il gas si raffredda a volume costante.

d) La variazione di entropia del gas può essere ricavata dall'espressione $S(T, V) = nc_v \ln T + nR \ln V + \text{costante}$, che nel caso di una trasformazione a volume costante si riduce a

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}} = nc_v \ln \frac{T_f}{T_{\text{gas}}} = -58.72 \text{ J/K}}\,. \tag{40}$$

In alternativa, poteva essere calcolata come $\int \delta Q_{\text{rev}}/T$, sapendo che $\delta Q_{\text{rev}} = nc_v dT$. Per calcolare la variazione di entropia dell'universo occorre sommare la variazione di entropia del ghiaccio e dell'acqua; questa contiene un termine legato al riscaldamento del ghiaccio, uno per lo scioglimento e uno per il riscaldamento dell'acqua:

$$\Delta S_{\text{gh}} = mc_g \ln \frac{T_0}{T_{gh}} + \frac{m\lambda}{T_0} + mc_a \ln \frac{T_f}{T_0} = 63.06 \text{ J/K} \tag{41}$$

e la somma complessiva diventa

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{gh}} = 4.34 \text{ J/K} \tag{42}$$

ed è un numero positivo, in accordo con l'aumento dell'entropia dell'universo.

e) Il gas espande in modo libero e adiabatico, triplicando il volume a disposizione. Durante un'espansione libera il gas non compie lavoro. Essendo anche isolato non scambia calore, quindi

$$\boxed{\Delta U = 0} \tag{43}$$

e la temperatura finale è uguale a quella iniziale. Per calcolare la variazione di entropia, basta di nuovo applicare la $S(T,V) = nc_v \ln T + nR \ln V + $costante, ma stavolta tenendo costante T:

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}} = nR \ln 3 = 323.3 \text{ J/K}} \,. \tag{44}$$

Soluzione esercizio II.2

a) La trasformazione DA è isobara con $T_D > T_A$ quindi si tratta di un raffreddamento. Visto che la trasformazione CD è adiabatica con C a temperatura più alta, allora l'unico ciclo possibile è un ciclo di una macchina termica formato da una compressione adiabatica (AB), un riscaldamento a volume costante (BC), un'espansione adiabatica (CD) e da un raffreddamento a pressione costante (DA), tali da formare una curva chiusa nel piano P-V, percorsa in senso orario.

b) Abbiamo a disposizione tre temperature su quattro. La quarta è incognita e, per ricavarla, possiamo usare le proprietà delle trasformazioni che legano i quattro stati di equilibrio. Una possibile strategia consiste nel considerare dapprima le trasformazioni AB e CD, che sono adiabatiche quasistatiche e per le quali valgono le relazioni $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ e $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$, ovvero

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} \tag{45}$$

e

$$\frac{T_C}{T_D} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} \,. \tag{46}$$

Poi possiamo usare le informazioni che vengono dalle altre due trasformazioni. In particolare, nella prima equazione possiamo inserire $V_B = V_C$, essendo la trasformazione BC isocora, mentre nella seconda possiamo usare $V_D = (T_D/T_A)V_A$, essendo DA una isobara. Dunque

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} \tag{47}$$

e

$$\frac{T_C}{T_D} = \left(\frac{T_D V_A}{T_A V_C}\right)^{\gamma-1} . \tag{48}$$

Ora basta prendere il rapporto delle due per eliminare i volumi e ricavare la temperatura incognita:

$$\boxed{T_B = T_C \left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{\gamma} = 557.3 \text{ K}} \tag{49}$$

avendo considerato $\gamma = 7/5$ per un gas biatomico.

c) Dato che BC è isocora, il volume in C è uguale a quello in B:

$$\boxed{V_C = V_B = 2 \text{ l}}. \tag{50}$$

Poi, sfruttando le proprietà delle adiabatiche reversibili troviamo anche

$$\boxed{V_A = V_B \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 9.407 \text{ l} \;; \qquad V_D = V_C \left(\frac{T_C}{T_D}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 10.03 \text{ l}}. \tag{51}$$

Infine, l'equazione di stato ci premette di conoscere la pressione in ciascuno dei quattro stati di equilibrio

$$\boxed{P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 8.838 \times 10^4 \text{ Pa} \;; \quad P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 7.723 \times 10^5 \text{ Pa}} \tag{52}$$

$$\boxed{P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 8.453 \times 10^5 \text{ Pa} \;; \quad P_D = P_A}. \tag{53}$$

d) Il diagramma PV è mostrato in figura.

Il lavoro compiuto dal gas sul ciclo corrisponde all'area racchiusa nel ciclo. Ricordando che per un gas biatomico $c_v = (5/2)R$, abbiamo

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v(T_B - T_A) = -1783 \text{ J} \tag{54}$$

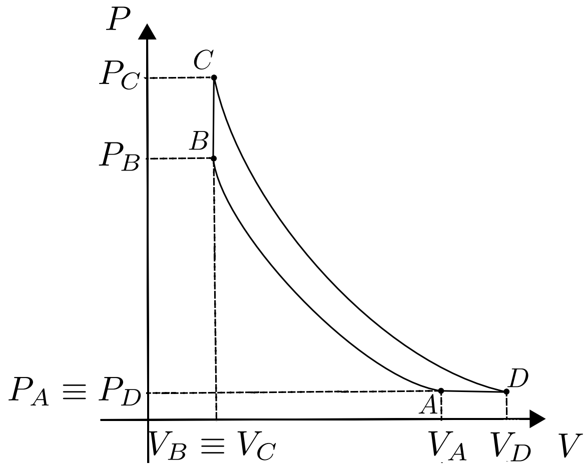
$$W_{BC} = 0 \text{ kJ} \tag{55}$$

$$W_{CD} = -\Delta U_{CD} = -nc_v(T_D - T_C) = 2009 \text{ J} \tag{56}$$

$$W_{DA} = P_A(V_A - V_D) = -55.06 \text{ J} \tag{57}$$

Quindi il lavoro sul ciclo è

$$\boxed{W = 170.9 \text{ J}} \tag{58}$$



e) Per calcolare il rendimento della macchina termica in esame dobbiamo determinare il calore assorbito sul ciclo, che in questo caso è

$$Q_{\text{ass}} = Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = 365.1 \text{ J}. \qquad (59)$$

Il rendimento della macchina è dunque

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = 0.468} \qquad (60)$$

Lo stesso rendimento poteva essere ottenuto calcolando $\eta = 1 - |Q_{DA}|/Q_{BC}$. Il risultato non cambia se cambia il numero di moli. Infatti, sia il lavoro compiuto che il calore assorbito sono direttamente proporzionali al numero di moli e quest'ultimo si elimina nel rapporto.