Fisica Generale I
A.A. 2018-2019, 14 gennaio 2019

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1
Una sonda viene inviata su Marte. Sulla sonda è presente un tubo cilindrico sottile lungo 4 m, dentro il quale si trovano due sferette di massa $m = 100$ g, una fissa al centro del tubo, l'altra libera di muoversi senza attrito. Una volta ammartata, la sonda dispone il tubo verticalmente rispetto al suolo. Le due sferette vengono caricate elettricamente in modo tale da attrarsi o respingersi, a seconda del segno delle cariche, con una forza $F_{\text{el}}(d) = \pm K/d^2$, dove K è una costante che vale 0.143 Nm^2 e d è la distanza tra loro. La massa di Marte è $M = 6.4 \times 10^{23}$ kg e il suo diametro medio $D = 6800$ km (si ricordi inoltre che $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2).
a) Stimare l'accelerazione di gravità sulla superficie marziana.
b) Scrivere l'espressione analitica dell'energia potenziale della sferetta mobile in funzione della quota z, sia nel caso di forza repulsiva che in quello di forza attrattiva. Si scelga di porre $z = 0$ nella posizione della sferetta fissa. Disegnare i due grafici.
c) Determinare le posizioni di equilibrio z_{eq} nei due casi e la frequenza per piccole oscillazioni attorno alla condizione di equilibrio stabile.
d) Nel caso repulsivo, se la sferetta mobile inizialmente si trova ferma all'estremo superiore del tubo e viene lasciata cadere, a quale distanza minima arriva dalla sferetta fissa?
e) Cosa accadrebbe invece alle due sferette se, partendo dalla configurazione di equilibrio stabile, il vincolo che tiene la sferetta fissa al centro del tubo venisse improvvisamente rimosso? Descrivere qualitativamente il moto.

Esercizio I.2
Un'asta rigida omogenea di massa $M = 3$ kg e lunga $L = 2$ m è disposta orizzontalmente su un tavolino di lunghezza $L/2$. Il centro dell'asta coincide con il centro del tavolino. Il tavolino ha i bordi rialzati e, quindi, l'asta poggia solo su di essi. Il punto di contatto di destra è solo di appoggio, privo di attrito, mentre quello di sinistra è un perno fisso attorno al quale l'asta può ruotare nel piano verticale. All'estremità destra dell'asta è appesa una particella di una massa $m = 1$ kg tramite una molla verticale di lunghezza a riposo $l_0 = 0.5$ m, costante elastica $k = 144$ N/m e massa trascurabile.
a) In condizioni di equilibrio statico del sistema, determinare la lunghezza della molla e scrivere l'espressione per le reazioni vincolari tra il tavolino e l'asta.
b) Partendo dalla posizione di equilibrio, alla particella viene impressa una piccola velocità iniziale v_0 verso l'alto. Come variano le reazioni vincolari in

funzione del tempo?
c) Qual è il valore massimo di v_0 affinché l'asta rimanga orizzontale durante le oscillazioni della particella?
d) Supponiamo che la particella salga fino ad una distanza $l_0/2$ dall'asta, dove arriva con velocità $v_1 = 1$ m/s, e che la molla sia dotata di un dispositivo tale da bloccarla rigidamente quando è compressa fino a quel punto, mantenendo poi la particella a distanza fissa dall'asta. Calcolare il momento d'inerzia del sistema per rotazioni attorno al perno. Determinare la velocità angolare e l'accelerazione angolare con cui l'asta si solleva immediatamente dopo il bloccaggio della molla.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1
Un sub si immerge nel mar dei Caraibi portando con sé un utilissimo recipiente dotato di pistone e contenente O_2. Il pistone separa il gas dall'acqua di mare ed è libero di muoversi. Inizialmente il gas è in equilibrio termodinamico con l'ambiente s.l.m. con una temperatura esterna $t_A = 27.5°C$ ed occupa un volume $V_A = 3$ dm^3. Dopo aver isolato termicamente il recipiente, il sub si immerge e scende lentamente sul fondale ad una profondità $z_f = 10$ m, mantenendo il pistone libero di muoversi. In funzione della profondità z, la temperatura cala di $\beta = 0.25°C/m$, mentre la pressione aumenta di $\alpha = 0.1$ atm/m.
a) Determinare il volume occupato dal gas.
b) Improvvisamente un polpo si attacca al recipiente e strappa via il rivestimento isolante termico. Per nulla spaventato, il sub decide di rimanere ad osservare il polpo che se ne va. Nel frattempo il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio scambiando calore con l'acqua del mare. Determinare le nuove coordinate termodinamiche del gas e il calore scambiato.
c) Il sub decide poi di tornare in superficie, risalendo lentamente in sicurezza. Il gas torna alla condizione di partenza. Calcolare la variazione di entropia dell'universo nell'intera procedura di immersione, sosta e emersione.
d) Descrivere la trasformazione che subisce il gas durante la risalita. Come varia il volume in funzione della profondità?
e) Determinare il lavoro compiuto durante la risalita.

Esercizio II.2

Quattro moli di un gas biatomico sono contenute in un recipiente dotato di un pistone mobile che permette lo scambio di calore con l'esterno. Inizialmente il gas si trova in condizioni di equilibrio termodinamico ad una temperatura $T_A = 360$ K e una pressione $P_A = 0.9 \times 10^5$ Pa, uguale a quella esterna P_0^{ext}. Il pistone viene bloccato e il recipiente viene messo in contatto termico con una miscela di acqua e ghiaccio. Il gas scambia calore con la miscela (che tale rimane) fino a raggiungere un nuovo stato di equilibrio B. Successivamente il recipiente viene isolato termicamente e il gas viene compresso in maniera adiabatica quasistatica fino ad uno stato di equilibrio C con $P_C = P_0^{\text{ext}}$. Infine il cilindro, con il pistone libero di muoversi soggetto alla pressione esterna P_0^{ext} costante, viene posto a contatto con un termostato a temperatura T_A, che riporta il gas allo stato iniziale A. Ricordiamo che il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg.

a) Tracciare il diagramma PV.

b) Calcolare la massa di ghiaccio sciolta in un ciclo.

c) Quant'è la temperatura del gas nello stato C?

d) Qual è il calore scambiato con il termostato nella trasformazione CA?

e) Stimare il rendimento del ciclo e confrontarlo con quello della macchina di Carnot ideale tra gli stessi termostati.

f) Quant'è la variazione di entropia dell'universo nel ciclo? Si dimostri che è anche uguale al calore degradato diviso per la temperatura della miscela di acqua e ghiaccio.

Soluzione esercizio I.1

a) La forza di attrazione gravitazionale sulla superficie del pianeta è in modulo pari a

$$F = \frac{GmM}{R^2} = \frac{4GmM}{D^2} \,. \tag{1}$$

L'accelerazione di gravità locale $g = F/m$ è dunque

$$\boxed{g = \frac{4GM}{D^2} = 3.7 \text{ m/s}^2} \tag{2}$$

b) La sferetta libera di muoversi è soggetta all'accelerazione di gravità locale g e alla repulsione o attrazione elettrostatica della sfera fissa, a seconda del segno della carica che possiede. Per ottenere un'espressione dell'energia potenziale associata alla forza elettrostatica è sufficiente integrare la forza lungo la direzione del tubo. Indichiamo con z la coordinata verticale e mettiamo l'origine $z = 0$ al centro dell'asta dove si trova l'altra sferetta, fissa. Dato che la forza diverge in $z = 0$ e si annulla a distanza infinita, poniamo il riferimento per U_{el} all'infinito. Dalla definizione di energia potenziale si ha

$$U_{\text{el}}(z) = -\int_{\infty}^{z} F_{\text{el}}(z')\, dz' = -\int_{\infty}^{z} \pm\frac{K}{|z'|^2}\, dz' = \pm\frac{K}{|z|} \,. \tag{3}$$

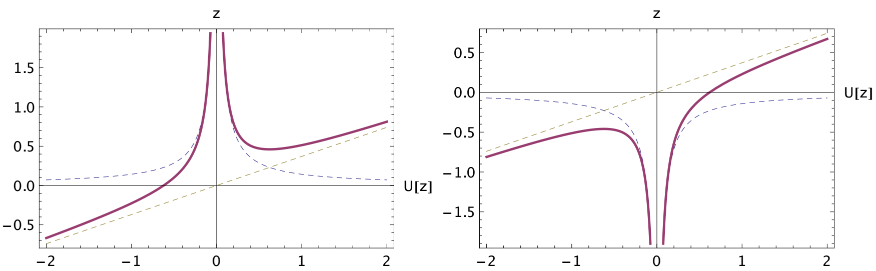


Figura 1: Energia potenziale della sferetta mobile nel caso in cui sia respinta dalla sferetta fissa in $z = 0$ (sinistra) o sia attratta (destra). Le curve tratteggiate indicano i contributi dell'energia potenziale della forza peso e della forza elettrostatica.

Si noti che il potenziale è simmetrico rispetto a $z = 0$ in quanto dipende dalla distanza d tra le sferette cariche e non dal segno di z. Il segno $+$ corrisponde al caso repulsivo e il segno $-$ a quello attrattivo. A questa energia potenziale va aggiunta quella gravitazionale, pari a mgz. L'energia potenziale totale è dunque

$$\boxed{U(z) = mgz \pm \frac{K}{|z|}} \,. \tag{4}$$

Questo risultato è mostrato nella figura. Si vede che in entrambi i casi esiste un punto di equilibrio. Nel caso repulsivo, l'equilibrio è stabile, trattandosi di un minimo locale, e si trova nella parte superiore dell'asta, dove la repulsione elettrostatica equilibra la forza peso. Nel caso attrattivo si tratta di un punto di equilibrio instabile, trattandosi di un massimo locale, e si trova nella parte inferiore dell'asta. Notiamo infine che, volendo essere pignoli, si potrebbe anche considerare l'interazione gravitazionale tra le due sferette, che esiste, ma è enormemente più piccola di quella elettrostatica e può essere tranquillamente ignorata.

c) La posizione di equilibrio stabile nel caso repulsivo e per $z > 0$ si trova imponendo $dU/dz = 0$, oppure eguagliando le forze mg e K/z^2. In entrambi i casi si trova

$$\boxed{z_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{K}{mg}} = 0.62 \text{ m}}\,. \tag{5}$$

Per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio stabile, la sferetta è soggetta ad un'energia potenziale armonica, che si ottiene approssimando la funzione $U(z)$ con una parabola. A tale scopo calcoliamo la derivata seconda di $U(z)$ in $z = z_{\text{eq}}$:

$$U''(z_{\text{eq}}) = \frac{2K}{z_{\text{eq}}^3} \tag{6}$$

e ricordiamo che, nello sviluppo della funzione, il termine quadratico ha la forma $(1/2)U''(z_{\text{eq}})z^2$. Questa energia potenziale è formalmente equivalente a quella di un oscillatore armonico, $(1/2)kz^2$. Per sfruttare l'equivalenza, basta identificare la costante elastica k con $U''(z_{\text{eq}})$. In questo modo, la pulsazione ω è la solita $\sqrt{k/m}$ e la frequenza è data da

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{U''(z_{\text{eq}})}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{mz_{\text{eq}}^3}} = 0.55 \text{ Hz}}\,. \tag{7}$$

d) Le forze in gioco sono tutte conservative, quindi la sferetta mantiene la sua energia meccanica durante il moto. Nella posizione iniziale, $z_0 = 2$ m, è ferma e quindi ha un'energia

$$E = U(z_0) = mgz_0 + \frac{K}{z_0}\,. \tag{8}$$

Abbandonata da questa posizione, cadrà verso la sferetta fissa fino a raggiungere una distanza minima z_{min}, per poi invertire il suo moto e continuare in modo periodico (ma non armonico). Nel movimento la quota z rimane positiva e possiamo quindi togliere il modulo dalle equazioni. La distanza minima si trova imponendo che l'energia potenziale in quel punto sia uguale a E, ovvero

$$mgz + \frac{K}{z} = mgz_0 + \frac{K}{z_0}\,, \tag{9}$$

da cui

$$z^2 - \left(1 + \frac{K}{mgz_0^2}\right) z_0 z + \frac{K}{mg} = 0\,, \tag{10}$$

o anche

$$z^2 - (1+\epsilon)\, z_0 z + \epsilon z_0^2 = 0\,, \tag{11}$$

avendo chiamato $\epsilon = K/(mgz_0^2)$. Si ottiene così

$$z_{1,2} = \frac{z_0}{2}\left[1 + \epsilon \pm \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 4\epsilon}\,\right] = \frac{z_0}{2}\left[1 + \epsilon \pm (1-\epsilon)\right]\,. \tag{12}$$

La soluzione con il $+$ è semplicemente la quota iniziale z_0, mentre quella con il $-$ è la quota minima cercata:

$$z_{\min} = \epsilon z_0 \tag{13}$$

ovvero

$$\boxed{z_{\min} = \frac{K}{mgz_0} = 0.192\ \text{m}}\,. \tag{14}$$

Notiamo che la stessa soluzione poteva essere anche trovata imponendo che l'equazione quadratica (11) abbia la forma $(z - z_0)(z - z_{\min}) = 0$, dato che una delle due radici deve coincidere con il punto iniziale. Quindi il prodotto $z_0 z_{\min}$ deve coincidere con il termine noto del trinomio (11), ϵz_0^2, da cui segue il risultato $z_{\min} = \epsilon z_0$. Notiamo anche che il rapporto tra quota minima e quota iniziale può essere scritto nella forma

$$\frac{z_{\min}}{z_0} = \frac{z_{\text{eq}}^2}{z_0^2} = \frac{K/z_0}{mgz_0}\,, \tag{15}$$

dove l'ultima espressione è il rapporto tra l'energia potenziale elettrostatica e l'energia potenziale gravitazionale della sferetta nella posizione iniziale.

e) La posizione di equilibrio stabile si ha solo nel caso repulsivo. Sbloccando improvvisamente la sferetta fissa, il sistema composto dalle due sferette inizierà a cadere al suolo. In particolare il centro di massa, che si trova nel punto medio tra le particelle, scende verticalmente con accelerazione g, senza risentire della forza elettrostatica interna, mentre il moto relativo obbedisce all'equazione

$$\mu \ddot{d} = \frac{K}{d^2} \tag{16}$$

dove d è la distanza tra le due particelle e $\mu = m/2$ è la massa ridotta. La distanza relativa aumenta nel tempo a causa della repulsione. Naturalmente, quando quella inferiore raggiunge il suolo marziano, la successiva dinamica sarà condizionata dal tipo di urto (se elastico o anelastico).

Soluzione esercizio I.2

a) Scegliamo l'asse z positivo verso il basso, con l'asta a quota $z = 0$. La particella di massa m rimane in equilibrio se la forza elastica compensa esattamente la forza peso $mg = k(z - l_0)$, quindi la posizione di equilibrio è

$$\boxed{z_{\rm eq} = l_0 + \frac{mg}{k} = 0.568 \text{ m}}\,. \tag{17}$$

La particella si trova quindi 6.8 cm più in basso della posizione di equilibrio della molla senza massa appesa. All'equilibrio le reazioni vincolari agenti sull'asta nel perno di sinistra (1) e sul punto di appoggio a destra (2) sono entrambe verticali e i loro moduli si possono determinare imponendo che la somma dei momenti delle forze agenti sull'asta si annulli, sia usando il punto 1 come polo, sia usando il punto 2. Si ottengono le due equazioni

$$\tau_1 = \frac{L}{2}N_2 - \frac{L}{4}Mg - \frac{3}{4}Lk(z_{\rm eq} - l_0) = \frac{L}{2}N_2 - \frac{L}{4}Mg - \frac{3}{4}Lmg = 0 \tag{18}$$

$$\tau_2 = -\frac{L}{2}N_1 + \frac{L}{4}Mg - \frac{L}{4}k(z_{\rm eq} - l_0) = -\frac{L}{2}N_1 + \frac{L}{4}Mg - \frac{L}{4}mg = 0\,, \tag{19}$$

avendo tenuto conto che la forza elastica con cui la molla tira l'asta verso il basso è uguale, all'equilibrio, al peso mg. Dalle relazioni precedenti si ottengono i valori

$$\boxed{N_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{M}\right)Mg = 9.8 \text{ N}} \tag{20}$$

$$\boxed{N_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3m}{M}\right)Mg = 29.4 \text{ N}}\,. \tag{21}$$

Si nota che nel limite in cui m è trascurabile rispetto a M le due reazioni vincolari diventano uguali, ciascuna metà del peso dell'asta, come ci aspettiamo dalla simmetria della configurazione. La presenza di una massa m, non trascurabile, rompe la simmetria, gravando ulteriormente sul punto di appoggio a destra (N_2 aumenta) e alleggerendo il perno a sinistra (N_1 diminuisce e può anche cambiare di segno se $m > M$). Notiamo anche che gli stessi risultati potevano essere ottenuti sostituendo una delle due equazioni per i momenti con l'equazione per l'equilibrio per traslazioni (somma delle forze uguale a zero). L'unica differenza sta nel fatto che le due equazioni per i momenti delle forze sono già disaccoppiate: in ciascuna compare solo una delle due reazioni vincolari incognite.

b) L'equazione del moto della massa m è

$$m\ddot{z} = mg - k(z - l_0), \tag{22}$$

ovvero

$$\ddot{z} = -\omega^2(z - z_{\text{eq}}) \tag{23}$$

dove $\omega = \sqrt{k/m} = 12$ rad/s e z_{eq} è la quota di equilibrio calcolata al punto precedente. La soluzione generale è

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A\sin(\omega t + \phi)\,. \tag{24}$$

Imponendo le condizioni iniziali, $z(0) = z_{\text{eq}}$ e $\dot{z}(0) = -v_0$, si possono ricavare le costanti di integrazione A e ϕ. La soluzione diventa

$$z(t) = z_{\text{eq}} - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,. \tag{25}$$

Nonostante l'asta non si muova, il movimento della massa m fa sì che la forza elastica agente sull'asta cambi nel tempo, facendo quindi variare anche le reazioni vincolari necessarie a mantenere l'asta in equilibrio. Se v_0 è piccola e la particella compie piccole oscillazioni, l'asta non si alza e rimane ferma. Le condizioni per l'annullarsi dei momenti delle forze sono

$$\tau_1(t) = \frac{L}{2}N_2(t) - \frac{L}{4}Mg - \frac{3}{4}Lk(z(t) - l_0) = 0 \tag{26}$$

$$\tau_2(t) = -\frac{L}{2}N_1(t) + \frac{L}{4}Mg - \frac{1}{4}Lk(z(t) - l_0) = 0\,, \tag{27}$$

dove stavolta abbiamo utilizzato la forza elastica dipendente dal tempo. Risolvendole si ottiene

$$\boxed{N_1(t) = N_{1,\text{eq}} + \frac{1}{2}\frac{kv_0}{\omega}\sin\omega t} \tag{28}$$

$$\boxed{N_2(t) = N_{2,\text{eq}} - \frac{3}{2}\frac{kv_0}{\omega}\sin\omega t}\,, \tag{29}$$

dove i valori di equilibrio sono quelli calcolati al punto precedente.

c) La forza esercitata dalla molla sull'asta è massima quando la particella raggiunge la massima quota nell'oscillazione. In tal caso la funzione seno nelle espressioni precedenti assume il valore 1. Nello stesso istante possiamo calcolare il valore della reazione vincolare nel punto di appoggio di destra (2), che assume il suo valore minimo:

$$N_{2,\text{min}} = N_{2,\text{eq}} - \frac{3}{2}\frac{kv_0}{\omega} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3m}{M}\right)Mg - \frac{3}{2}\frac{kv_0}{\omega}\,. \tag{30}$$

Dato che il punto di appoggio (2) non può esercitare una forza negativa (non può trattenere l'asta), se vogliamo che l'asta rimanga ferma la velocità v_0 non può superare il valore critico per il quale $N_{2,\min}$ si annulla. Dunque

$$\boxed{v_0 \leq v_{0,\text{crit}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3m}{M}\right)\frac{Mg\omega}{k} = 1.63 \text{ m/s}}\,. \tag{31}$$

d) Quando la particella è bloccata, il sistema composto da asta e particella si comporta come un unico corpo rigido che può ruotare attorno al perno sul bordo sinistro del tavolino. Per il momento d'inerzia dell'asta possiamo usare il teorema di Steiner

$$I_{\text{asta}} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{16}ML^2 = \frac{7}{48}ML^2 \tag{32}$$

mentre per la particella basta calcolare la distanza dal polo usando il teorema di Pitagora

$$I_{\text{part}} = m\left(\frac{9L^2}{16} + \frac{l_0^2}{4}\right) \tag{33}$$

e il momento d'inerzia totale è la somma dei due:

$$\boxed{I = \frac{7}{48}ML^2 + m\left(\frac{9L^2}{16} + \frac{l_0^2}{4}\right) = 4.06 \text{ kg m}^2}\,. \tag{34}$$

Il bloccaggio improvviso della particella nel momento in cui la molla è compressa a metà della sua lunghezza a riposo è equivalente ad un urto perfettamente anelastico tra la particella che arriva dal basso e l'asta inizialmente orizzontale (il ruolo della molla dopo il bloccaggio è irrilevante, dato che si limita a tenere la particella ad una distanza fissa dall'asta, ma senza influenzarne la dinamica). Dopo l'urto, sia l'asta che la particella ruotano rigidamente attorno al perno in (1). La velocità con cui la particella arriva al punto di bloccaggio è v_1. La velocità angolare con cui l'asta e la particella ruotano dopo il bloccaggio può essere calcolata imponendo la conservazione del momento angolare rispetto al perno, trascurando le forze esterne (forza peso e reazione vincolare in (2)) durante l'urto. Prima dell'urto il momento angolare è

$$L_i = \frac{3}{4}Lmv_1\,. \tag{35}$$

Dopo l'urto possiamo esprimere il momento angolare come

$$L_f = I\Omega\,, \tag{36}$$

Imponendo che siano uguali, otteniamo la velocità angolare

$$\boxed{\Omega = \frac{3Lm}{4I}v_1 = 0.37 \text{ rad/s}}\,. \tag{37}$$

L'accelerazione angolare immediatamente dopo il bloccaggio, quando l'asta è ancora orizzontale e inizia a ruotare, si ottiene dall'equazione del moto $I\alpha = \tau$, dove τ è la somma dei momenti delle forze esterne agenti sul sistema, usando il perno come polo. Le forze che danno momento non nullo sono solo la forza peso dell'asta e la forza peso della particella. La reazione vincolare nel punto d'appoggio di destra non c'è più e quella nel perno non dà momento. Dunque si ha

$$\boxed{\alpha = -\frac{Lg}{4I}(M + 3m) = -7.25 \text{ rad/s}^2}\,. \tag{38}$$

Soluzione esercizio II.1

a) L'immersione avviene lentamente e mantenendo il recipiente in isolamento termico. Pertanto il gas subirà una trasformazione adiabatica quasistatica. Trattando l'ossigeno come un gas ideale biatomico e conoscendo la dipendenza di P dalla profondità otteniamo

$$\boxed{P_B = P(z_f) = P_A + \alpha z_f = 2\,\text{atm} = 202650\,\text{Pa}}\,. \tag{39}$$

Dalle relazioni PV^γ =costante e $TV^{\gamma-1}$ =costante, ricaviamo

$$\boxed{V_B = V_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{1/\gamma} = 1.829 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \tag{40}$$

e

$$\boxed{T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{(\gamma-1)} = 366.46 \text{ K}}\,. \tag{41}$$

b) Dall'equazione di stato in A determiniamo il numero di moli

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 0.1216\,\text{mol}\,. \tag{42}$$

Una volta perso l'isolante termico, il recipiente termalizzerà con l'acqua del mare a profondità z_f. Il gas sarà pertanto descritto dalle seguenti coordinate termodinamiche

$$\begin{gathered}\boxed{P_C = P_B = 202650\,\text{Pa}}\\ \boxed{T_C = T_{\text{acq}}(z_f) = T_A - \beta z_f = 298.15\,\text{K}}\\ \boxed{V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = 1.4874 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}\,.\end{gathered} \tag{43}$$

Infine, il calore scambiato con l'acqua del mare si può ottenere applicando il primo principio della termodinamica e ricordando che il calore specifico a volume costante di un gas biatomico è $c_v = 5R/2$. Otteniamo

$$\begin{aligned} Q_{BC} &= \Delta U_{BC} + W_{BC} \\ &= nc_v(T_C - T_B) + P_C(V_C - V_B) \\ &= -172.6\,\mathrm{J} - 69.2\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{44}$$

e quindi

$$\boxed{Q_{BC} = -241.8\,\mathrm{J}}, \tag{45}$$

Si noti che il segno di Q_{BC} è negativo, come ci si aspetta.

c) Dato che l'immersione e l'emersione del sub sono processi lenti per il gas, possiamo considerare entrambe le trasformazione AB e CA reversibili. L'unica trasformazione irreversibile è pertanto la trasformazione BC in cui il recipiente scambia calore con l'ambiente esterno a temperatura fissata $T_{\text{acq}}(z_f) = T_C$. Sommando le variazioni di entropia del gas e dell'acqua circostante, otteniamo

$$\Delta S^{\text{univ}}_{\text{ciclo}} = \Delta S^{\text{univ}}_{BC} = nc_p \ln \frac{V_C}{V_B} - \frac{Q_{BC}}{T_C} = (-0.732 + 0.811)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{46}$$

e dunque

$$\boxed{\Delta S^{\text{univ}}_{\text{ciclo}} = 0.079\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}. \tag{47}$$

d) Durante la risalita sia la pressione esterna che la temperatura dell'acqua cambiano, essendo entrambe funzioni della profondità z. In particolare, $T_{\text{acq}}(z) = T_A - \beta z$ e $P_{\text{ext}}(z) = P_A + \alpha z$. Pertanto, siccome il recipiente è a contatto termico con l'ambiente ed il pistone è libero di muoversi, anche la temperatura e la pressione del gas cambieranno in maniera analoga. Il sub risale lentamente e quindi possiamo pensare che istante per istante il gas sia in equilibrio termodinamico con l'ambiente. Ciò ci permette di affermare che la trasformazione è reversibile. Inoltre, siccome durante risalita il gas scambia calore con l'acqua del mare (cioè con l'ambiente esterno), tale trasformazione non sarà nè adiabatica, nè isoterma. Al fine di calcolare l'espressione del volume in funzione della profondità z, possiamo utilizzare l'equazione di stato

$$P(z)V(z) = nRT(z), \tag{48}$$

da cui

$$\boxed{V(z) = \frac{nR\,(T_A - \beta z)}{P_A + \alpha z}}. \tag{49}$$

e) Il lavoro compiuto dal gas è dato dall'integrale

$$W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} P(V) dV \,. \tag{50}$$

Dato che conosciamo P e V come funzioni della profondità z, conviene cambiare variabile d'integrazione:

$$W_{CA} = \int_{z_f}^{0} P(z) \frac{dV}{dz} \; dz \,. \tag{51}$$

La derivata la possiamo calcolare dall'espressione precedente di $V(z)$:

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{nR(\beta P_A + \alpha T_A)}{(P_A + \alpha z)^2} \,. \tag{52}$$

L'integrale diventa

$$W_{CA} = -\int_{z_f}^{0} \frac{nR(\beta P_A + \alpha T_A)}{(P_A + \alpha z)} \; dz \,, \tag{53}$$

che dà

$$W_{CA} = -\frac{nR}{\alpha}(\beta P_A + \alpha T_A) \ln \frac{P_A}{(P_A + \alpha z_f)} \,. \tag{54}$$

ovvero

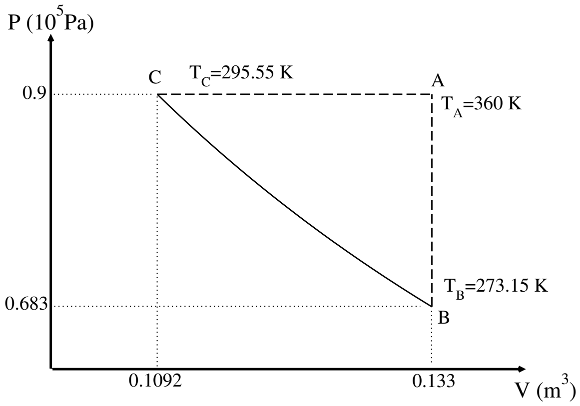
$$\boxed{W_{CA} = \frac{nR}{\alpha}(\beta P_A + \alpha T_A) \ln \frac{P_C}{P_A} = 214 \text{ J}} \,. \tag{55}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Il gas compie tre diverse trasformazioni termodinamiche in sequenza: una trasformazione isocora AB irreversibile (il gas è a contatto termico con un termostato a temperatura iniziale diversa dalla sua e questo determina una irreversibilità termica); una compressione quasistatica e adiabatica BC; una fase di riscaldamento CA a pressione esterna costante e a contatto con un termostato a temperatura T_A (irreversibile per lo stesso motivo della AB). Il ciclo è mostrato nel diagramma PV in figura. La temperatura in B coincide con la temperatura della miscela di acqua e ghiaccio. Gli altri valori delle coordinate termodinamiche sono quelli calcolati al successivo punto c).

b) Essendo la trasformazione isocora, il gas cede alla miscela di acqua e ghiaccio una quantità di calore

$$Q = nc_v(T_A - T_B) = 7220 \text{ J} \,. \tag{56}$$



Tale calore va tutto a sciogliere parte del ghiaccio. La massa Δm sciolta sarà data dalla relazione

$$Q = \lambda \Delta m \tag{57}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{\Delta m = \frac{5}{2} nR \frac{T_A - T_B}{\lambda} = 21.88\,\mathrm{g}}\,. \tag{58}$$

c) Per determinare la temperatura del gas nello stato C possiamo sfruttare l'equazione di stato

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR}\,. \tag{59}$$

Sappiamo che $P_C = P_A = P_0^{\mathrm{ext}}$, quindi non resta che determinare il volume V_C. Dato che la trasformazione BC è adiabatica e quasistatica abbiamo che $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$, con $V_B = V_A = nRT_A/P_A = 0.133\,\mathrm{m}^3$ e $P_B = P_A T_B/T_A = 0.683\,\mathrm{Pa}$. Risulta quindi

$$V_C = V_B \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{1/\gamma} = 0.1092\,\mathrm{m}^3 \tag{60}$$

e

$$\boxed{T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 295.5\,\mathrm{K}}\,. \tag{61}$$

d) La trasformazione CA avviene a pressione esterna costante. Anche se la trasformazione è termicamente irreversibile e non siamo in grado di determinare la pressione del gas istante per istante, possiamo ugualmente calcolare il lavoro meccanico fatto dal gas, W, sfruttando il principio di azione e reazione, $W = -W_{\mathrm{amb}}$, sapendo che il lavoro fatto dall'ambiente sul gas è il prodotto della pressione esterna per la variazione di volume, $W_{\mathrm{amb}} = -P_0^{\mathrm{ext}}|\Delta V|$. Trattandosi di un'espansione del gas, il lavoro fatto dall'ambiente è negativo, mentre quello fatto dal gas è positivo. Noto il lavoro, possiamo calcolare il calore assorbito dal gas fruttando il primo principio:

$$\boxed{Q_{CA} = \Delta U + W = \frac{5}{2}nR(T_A - T_C) + P_0^{\text{ext}}(V_A - V_C) = 7500\,\text{J}} \tag{62}$$

Visto che la trasformazione avviene a pressione costante, si può anche determinare come $Q_{CA} = nc_p(T_A - T_C)$.

e) Durante il ciclo il gas assorbe calore solo nella trasformazione CA, quindi $Q_{\text{ass}} = Q_{CA}$. Durante la trasformazione AB il gas non compie lavoro. Nella compressione adiabatica BC abbiamo che $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_v(T_C - T_B) = -1858$ J. Come già detto al punto precedente, la trasformazione CA avviene con il pistone libero e la pressione esterna costante quindi possiamo dire che il lavoro compiuto dal gas è pari in modulo a quello compiuto dalla pressione esterna sul pistone, $W_{CA} = P_0^{\text{ext}}(V_A - V_C) = 2142$ J. Siamo quindi in grado di stimare il rendimento del ciclo

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = \frac{-C_v(T_C - T_B) + P_0^{\text{ext}}(V_A - V_C)}{Q_{\text{ass}}} = 3.8\%} \tag{63}$$

e confrontarlo con quello di un ciclo di Carnot operante tra gli stessi due termostati

$$\boxed{\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 24.1\% > \eta}\,. \tag{64}$$

f) L'entropia è una funzione di stato, quindi nell'intero ciclo la variazione di entropia del gas è nulla, $\Delta S_{\text{gas}} = 0$. Ne consegue che la variazione di entropia dell'universo è data solamente dalla variazione di entropia dell'ambiente, costituito dalla miscela di acqua e ghiaccio e dal termostato caldo.
Nella trasformazione AB, una massa Δm di ghiaccio della miscela si scioglie, rimanendo comunque a $T_B = 273.15$ K. Per la miscela si ha quindi

$$\Delta S_m = \frac{\lambda \Delta m}{T_B} = 26.43\,\text{J/K}\,. \tag{65}$$

Per il termostato, invece, che cede un calore Q_{CA}, abbiamo

$$\Delta S_t = -\frac{Q_{CA}}{T_A} = -20.83\,\text{J/K}\,. \tag{66}$$

La variazione di entropia dell'universo su un ciclo è quindi

$$\boxed{\Delta S_u = \Delta S_m + \Delta S_t = 5.6\,\text{J/K}}\,. \tag{67}$$

Il calore degradato è dato dalla differenza tra il lavoro prodotto da una macchina di Carnot e quello prodotto dalla macchina in questione, a parità di calore assorbito e termostati usati. Dunque

$$Q_{\text{degr}} = Q_{\text{ass}}(\eta_{\text{carnot}} - \eta) = 1.52\,\text{kJ} \tag{68}$$

che, diviso per la temperatura della miscela, dà, appunto, 5.6 J/K, come si voleva dimostrare.