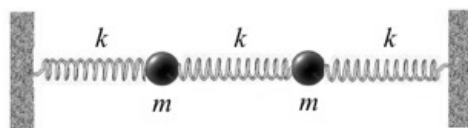


Oscillatori accoppiati e caos

1 Due masse e tre molle uguali



Consideriamo un sistema unidimensionale costituito da due particelle di massa m collegate a tre molle uguali di costante elastica k , come in figura. Siano φ_a e φ_b gli spostamenti delle masse dalle rispettive posizioni di equilibrio, dove l'indice a indica la massa a sinistra in figura e b quella a destra; gli spostamenti siano positivi se effettuati verso destra. Le equazioni del moto per le due particelle sono

$$m\ddot{\varphi}_a = -k\varphi_a + k(\varphi_b - \varphi_a) = -2k\varphi_a + k\varphi_b \quad (1)$$

$$m\ddot{\varphi}_b = -k\varphi_b - k(\varphi_b - \varphi_a) = -2k\varphi_b + k\varphi_a . \quad (2)$$

Chiamiamo $\omega_0^2 = k/m$. Allora le equazioni diventano

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2(2\varphi_a - \varphi_b) \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2(-\varphi_a + 2\varphi_b) . \quad (4)$$

Possiamo trasformare queste equazioni in equazioni algebriche lineari cercando soluzioni della forma $\cos(\omega t + \theta)$, oppure equivalentemente $\sin(\omega t + \theta)$, o anche $\exp[\pm i(\omega t + \theta)]$. Ad esempio cerchiamo soluzioni fatte così:

$$\varphi_a = a \cos(\omega t + \theta) \quad (5)$$

$$\varphi_b = b \cos(\omega t + \theta) , \quad (6)$$

dove a e b sono delle costanti numeriche reali. Inserendo queste funzioni nelle equazioni del moto si ottengono le equazioni

$$-\omega^2 a \cos(\omega t + \theta) = -\omega_0^2(2a - b) \cos(\omega t + \theta) \quad (7)$$

$$-\omega^2 b \cos(\omega t + \theta) = -\omega_0^2(-a + 2b) \cos(\omega t + \theta) . \quad (8)$$

Affinché queste equazioni abbiano soluzione ad ogni tempo t occorre che i coefficienti del coseno siano uguali. Dunque

$$-\omega^2 a = -\omega_0^2(2a - b) \quad (9)$$

$$-\omega^2 b = -\omega_0^2(-a + 2b) . \quad (10)$$

Chiamiamo $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$. Allora le equazioni diventano

$$2a - b = \lambda a \quad (11)$$

$$-a + 2b = \lambda b . \quad (12)$$

Un sistema di due equazioni algebriche come questo può essere scritto anche in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (13)$$

e le equazioni del moto delle particelle si sono così trasformate in un problema agli autovalori in uno spazio vettoriale bidimensionale,

$$\mathcal{M}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} , \quad (14)$$

con la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

e il vettore

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \quad (16)$$

Notiamo subito che la matrice \mathcal{M} è reale ed è anche simmetrica (è uguale alla sua trasposta), dunque ammette due autovalori reali a cui corrispondono due autovettori linearmente indipendenti. Per trovare autovalori e autovettori basta trovare la base che diagonalizza la matrice. In pratica, si può riscrivere l'equazione nella forma $(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{M})\mathbf{u} = 0$, ovvero

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 , \quad (17)$$

e questa equazione ha soluzioni non banali solo se il determinante della matrice si annulla. La cosiddetta equazione caratteristica $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{M}) = 0$ diventa

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \quad (18)$$

ovvero

$$[(\lambda - 2) - 1][(\lambda - 2) + 1] = 0 \quad (19)$$

da cui

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \quad (20)$$

che ha soluzioni per $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ questi sono i due autovalori. Se ricordiamo la definizione di lambda, essi corrispondono alle due pulsazioni

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (21)$$

e

$$\omega_2 = \sqrt{3} \omega_0 = \sqrt{3k/m} \quad (22)$$

Per trovare gli autovettori basta sostituire ciascun autovalore nell'equazione (17). Per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

che implica $a = b$. L'autovettore è dunque un vettore con le componenti uguali. Possiamo scriverlo in forma generica come $A_1 \mathbf{w}_1$ dove A_1 è la generica ampiezza dell'oscillazione e \mathbf{w}_1 è l'autovettore

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

che ha norma 1, dove la norma è la radice quadrata del prodotto interno $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1$. La soluzione con pulsazione $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ ha quindi la forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t) \\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1). \quad (25)$$

Le grandezze reali A_1 e θ_1 sono costanti d'integrazione che sono fissate, caso per caso, dalle condizioni iniziali. La soluzione corrisponde ad una oscillazione di entrambe le particelle in fase e con la stessa ampiezza. Dato che un'oscillazione del genere non modifica la lunghezza della molla intermedia, la forza attiva su ciascuna particella è quella della sola molla laterale, e questo giustifica il fatto che la pulsazione è uguale a quella del singolo oscillatore libero.

Per l'autovalore $\lambda_1 = 3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

che implica $a = -b$. L'autovettore è dunque un vettore con le componenti opposte. Analogamente a prima, possiamo scriverlo in forma generica come

$A_2 \mathbf{w}_2$ dove A_2 è la generica ampiezza dell'oscillazione e \mathbf{w}_2 è l'autovettore normalizzato a 1

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

La soluzione con pulsazione $\sqrt{3} \omega_0$ ha quindi la forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t) \\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (28)$$

e si tratta di una oscillazione in anti-fase delle due particelle, con uguale ampiezza A_2 . Una oscillazione di questo tipo produce una deformazione della molla centrale doppia di quelle laterali e questo rende il sistema equivalente a due oscillatori disaccoppiati ma con molle di costante elastica tripla.

È interessante notare a questo punto che i due vettori \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 sono ortogonali, dato che $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$, e costituiscono una base ortonormale di uno spazio vettoriale in due dimensioni. I vettori di tale spazio rappresentano l'insieme di tutte le possibili oscillazioni delle particelle. La forma generale delle oscillazioni possibili, soluzioni delle equazioni del moto di partenza, può essere scritta come combinazione lineare dei due vettori di base:

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t) \\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \quad (29)$$

Questa espressione contiene quattro costanti d'integrazione, A_1 , A_2 , θ_1 , θ_2 , come ci si aspetta per due equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine.

Per arrivare alla soluzione generale il formalismo dei vettori e delle matrici non era strettamente necessario, dato che si poteva fin dal principio ragionare in termini fisici individuando le due soluzioni corrispondenti alle oscillazioni delle particelle in fase e in anti-fase e verificando, per sostituzione nelle equazioni del moto, che si trattava di soluzioni buone. Tuttavia, come vedremo, il linguaggio dell'algebra lineare ci permette di comprendere meglio la fisica degli oscillatori accoppiati in generale e fornisce uno strumento potente per risolvere le equazioni nei casi più complicati di questo.

Rimanendo in questo caso semplice, ragioniamo sulla forma della matrice \mathcal{M} rispetto alla scelta dello spazio vettoriale. La forma (15) equivale alla rappresentazione delle equazioni del moto quando si usano come vettori di base i vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ identificati dalle oscillazioni di ciascuna delle due masse separatamente:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

In questa base, gli autovettori di \mathcal{M} sono

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Ora consideriamo la matrice \mathcal{U} costruita usando come colonne i due vettori \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Notiamo che si tratta di una matrice simmetrica, $\mathcal{U}^T = \mathcal{U}$, ma non solo, è anche ortogonale, dato che $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^T = \mathcal{U}$. Ricordiamo in proposito che l'inversa di una matrice si calcola in questo modo: se

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (33)$$

allora

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (34)$$

mentre la matrice trasposta è

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad (35)$$

e si vede facilmente che $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^T = \mathcal{U}$. Questa matrice ortogonale \mathcal{U} è la matrice che realizza il cambiamento di base. Applicata ad un vettore generico nella vecchia base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, fornirà lo stesso vettore ma nella nuova base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Allo stesso modo, trasforma le matrici. Ad esempio, se vogliamo rappresentare la matrice \mathcal{M} nella nuova base dobbiamo usare la matrice di cambiamento di base \mathcal{U} in questo modo:

$$\mathcal{M}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{U}, \quad (36)$$

ovvero

$$\mathcal{M}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

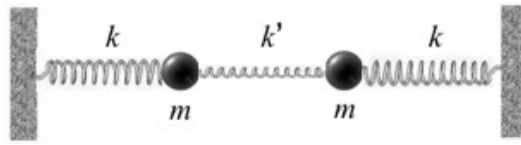
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Abbiamo così ottenuto la matrice diagonale, con gli autovalori sulla diagonale.

I due vettori che formano la base ortonormale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ sono detti *modi normali* di oscillazione del sistema e ogni oscillazione generica sarà combinazione lineare dei modi normali. Inoltre notiamo che, se le condizioni iniziali delle particelle sono tali da eccitare al tempo iniziale uno solo dei due modi normali, il moto rimarrà per sempre in quello stesso modo normale; la matrice in quella base è diagonale e i due modi normali rimangono disaccoppiati.

2 Due masse uguali e tre molle diverse



Ora consideriamo due particelle di massa m e tre molle come prima, ma stavolta la molla centrale abbia costante elastica k' diversa dalle altre. Partiamo dalle equazioni del moto per le oscillazioni delle due masse accoppiate e cerchiamo di ricavarci la matrice da diagonalizzare per trovare i modi normali.

Le equazioni del moto sono

$$m\ddot{\varphi}_a = -k\varphi_a + k'(\varphi_b - \varphi_a) = -(k + k')\varphi_a + k'\varphi_b \quad (40)$$

$$m\ddot{\varphi}_b = -k\varphi_b - k'(\varphi_b - \varphi_a) = -(k + k')\varphi_b + k'\varphi_a . \quad (41)$$

Chiamiamo $\omega_0^2 = k/m$ e $\epsilon = k'/k$. Allora le equazioni diventano

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2[(1 + \epsilon)\varphi_a - \epsilon\varphi_b] \quad (42)$$

$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2[-\epsilon\varphi_a + (1 + \epsilon)\varphi_b] . \quad (43)$$

Possiamo cercare soluzioni del tipo

$$\varphi_a = a \cos(\omega t + \theta) \quad (44)$$

$$\varphi_b = b \cos(\omega t + \theta) . \quad (45)$$

Inserendole nelle equazioni precedenti, queste ci danno

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (46)$$

e se chiamiamo $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$ possiamo scrivere l'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 1 + \epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \quad (47)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 - \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \lambda - 1 - \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0. \quad (48)$$

È lo stesso problema di prima, ma con una matrice un po' diversa. Ora c'è un parametro in più, ϵ , che misura il diverso effetto delle molle. Notiamo che per $\epsilon = 1$ tutto si riduce al caso precedente delle molle uguali.

Per determinare i modi normali dobbiamo annullare il determinante della matrice appena scritta qui sopra,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 - \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \lambda - 1 - \epsilon \end{pmatrix} = 0. \quad (49)$$

Si ottiene

$$(\lambda - 1 - \epsilon)^2 - \epsilon^2 = 0 \quad (50)$$

ovvero

$$[(\lambda - 1 - \epsilon) - \epsilon][(\lambda - 1 - \epsilon) + \epsilon] = 0 \quad (51)$$

da cui

$$(\lambda - 1 - 2\epsilon)(\lambda - 1) = 0 \quad (52)$$

che ha soluzioni per $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1 + 2\epsilon$. Questi sono i due autovalori e le pulsazioni corrispondenti sono $\omega_1 = \omega_0$ e $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\epsilon} \omega_0$. È facile vedere che gli autovettori sono gli stessi che nel caso precedente. Infatti, inserendo λ_1 nell'equazione (48) si ha

$$\begin{pmatrix} -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad (53)$$

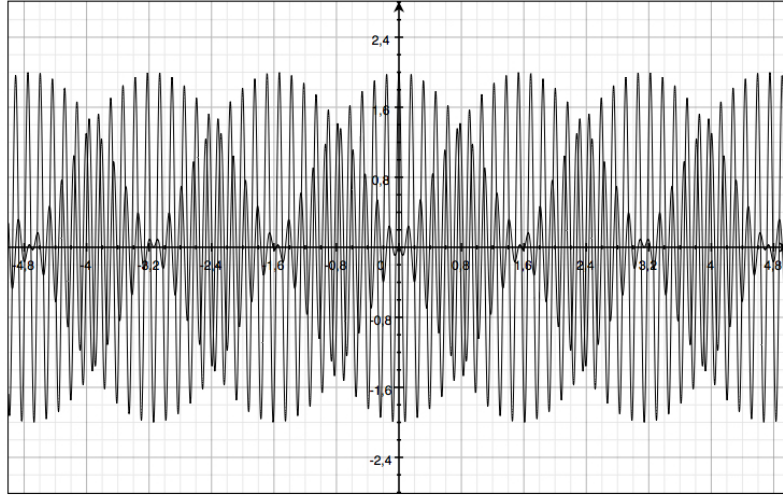
che implica $a = b$, ovvero l'oscillazione in fase delle masse, con la molla centrale non sollecitata. Invece inserendo λ_2 si ha

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad (54)$$

che implica $a = -b$, ovvero un'oscillazione in anti-fase. I due autovettori ortonormali sono gli stessi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ del caso precedente,

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

e, di conseguenza, anche la matrice di cambiamento di base, \mathcal{U} , rimane la stessa. Ciò che cambia è solo la pulsazione dell'oscillazione in anti-fase, che stavolta dipende dal rapporto tra le costanti elastiche ϵ .



La soluzione generale del problema è una combinazione lineare dei due modi normali:

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t) \\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (56)$$

con $\omega_1 = \omega_0$ e $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\epsilon} \omega_0$, e le solite quattro costanti d'integrazione da fissare con le condizioni iniziali.

Un caso particolare interessante è quello che si ottiene ponendo $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e $A_1 = A_2 = A$. In tal caso la soluzione diventa

$$\varphi_a(t) = A[\cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{1 + 2\epsilon} \omega_0 t)] \quad (57)$$

$$\varphi_b(t) = A[\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{1 + 2\epsilon} \omega_0 t)]. \quad (58)$$

Ora supponiamo che la molla centrale sia molto meno rigida di quelle laterali, in modo che $\epsilon = k'/k \ll 1$. In tal caso l'accoppiamento tra le due particelle è debole. In tale situazione possiamo espandere la radice quadrata al primo ordine in ϵ ,

$$\sqrt{1 + 2\epsilon} \simeq 1 + \epsilon, \quad (59)$$

e la soluzione di prima diventa

$$\varphi_a(t) = A\{\cos(\omega_0 t) + \cos[(1 + \epsilon)\omega_0 t]\} \quad (60)$$

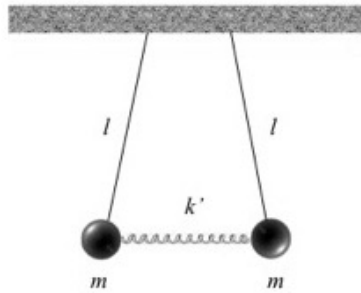
$$\varphi_b(t) = A\{\cos(\omega_0 t) - \cos[(1 + \epsilon)\omega_0 t]\} \quad (61)$$

che, usando le formule di prostaferesi, fornisce il risultato finale

$$\varphi_a(t) = 2A \cos(\omega_0 t) \cos(\epsilon\omega_0 t/2) \quad (62)$$

$$\varphi_b(t) = -2A \sin(\omega_0 t) \sin(\epsilon\omega_0 t/2). \quad (63)$$

Questa soluzione è interessante perché rappresenta il battimento tra due oscillatori debolmente accoppiati. Ciascuna delle due particelle compie oscillazioni con periodo $2\pi/\omega_0$, ma l'ampiezza delle oscillazioni è modulata da una funzione coseno per la prima particella e una funzione seno per la seconda, aventi periodo molto più lungo, $4\pi/(\epsilon\omega_0)$. Un esempio è mostrato nella figura precedente, dove abbiamo scelto $A = 1$, $\omega_0 = 40$ rad/s e $\epsilon = 1/20$. La curva di $\varphi_a(t)$ è quella che ha un massimo a $t = 0$, mentre quella di $\varphi_b(t)$ parte da zero nello stesso istante. Con i parametri scelti, ciascuna particella compie 20 oscillazioni complete di pulsazione ω_0 nell'intervallo di tempo compreso tra due nodi della funzione modulante. Si vede chiaramente che le due particelle si scambiano periodicamente il moto oscillatorio e, quindi, anche l'energia meccanica.

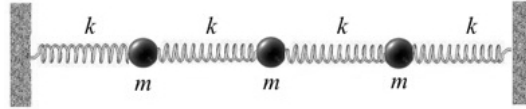


Lo stesso tipo di soluzione si ottiene anche per due pendoli accoppiati da una molla, come nella figura qui sopra. Infatti, se prendiamo come coordinate gli spostamenti delle due masse, misurati a partire dalla posizione verticale dei due pendoli, e ci mettiamo nel limite di piccole oscillazioni, le equazioni del moto avranno la stessa forma delle equazioni (40)-(41), avendo definito $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ e $\epsilon = kl/(mg)$, dove l è la lunghezza del filo e g l'accelerazione di gravità. Fatte queste sostituzioni, tutti i passaggi rimangono uguali a prima e nulla cambia nei risultati.

Infine, un ultimo commento interessante riguarda il fatto che la matrice \mathcal{M} in tutti i casi precedenti è reale e simmetrica. Che sia reale è ovvio dal fatto che tutte le quantità che entrano nelle equazioni del moto sono grandezze fisiche e come tali sono numeri reali (almeno in fisica classica). Che sia anche simmetrica è una conseguenza del principio di azione e reazione. Infatti, gli elementi fuori diagonale della matrice sono quelli che accoppiano le oscillazioni delle due particelle, ma l'accoppiamento avviene tramite la stessa molla, che agisce a destra e a sinistra in egual modo. Se anche considerassimo il caso di tre molle diverse, è facile vedere che la matrice \mathcal{M} sarebbe ancora simmetrica, anche se i due elementi sulla diagonale sono di-

versi. Quindi anche quel sistema ammette due autovalori distinti e due modi normali di oscillazione, salvo che il calcolo sarebbe più complicato e, inoltre, non sarebbe facile intuire la forma dei modi normali a priori sulla base di semplici argomenti fisici, come invece si poteva fare nei casi precedenti.

3 Tre masse e quattro molle uguali



A questo punto siamo in grado di affrontare anche casi più complessi. Ad esempio prendiamo tre oscillatori accoppiati come in figura. Le molle siano tutte uguali e definiamo la pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ora è più difficile intuire quali siano i modi normali di oscillazione. Uno in realtà lo si trova subito: è quello in cui le due particelle laterali oscillano in anti-fase e quella centrale sta ferma. Infatti, è facile convincersi che tale oscillazione è equivalente a quella di due oscillatori disaccoppiati identici, uno a destra e uno a sinistra della massa centrale, che si comporta come un muro, e i due oscillatori laterali corrispondono ciascuno ad una singola particella soggetta ad una molla con costante elastica $2k$. La pulsazione attesa per questo modo normale è $\omega = \sqrt{2k/m}$. Detto questo però, gli altri modi normali non sono così evidenti e bisogna per forza procedere con la soluzione formale del problema. Usiamo dunque l'algebra lineare come sappiamo fare.

Partiamo dalle equazioni del moto per i tre spostamenti delle masse

$$m\ddot{\varphi}_a = -k\varphi_a + k(\varphi_b - \varphi_a) \quad (64)$$

$$m\ddot{\varphi}_b = -k(\varphi_b - \varphi_a) + k(\varphi_c - \varphi_b) \quad (65)$$

$$m\ddot{\varphi}_c = -k(\varphi_c - \varphi_b) - k\varphi_c. \quad (66)$$

dove gli indici a, b, c identificano le particelle da sinistra a destra. Le stesse equazioni possono essere scritte in questa forma

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2(2\varphi_a - \varphi_b) \quad (67)$$

$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2(-\varphi_a + 2\varphi_b - \varphi_c) \quad (68)$$

$$\ddot{\varphi}_c = -\omega_0^2(-\varphi_b + 2\varphi_c). \quad (69)$$

Ora cerchiamo soluzioni della forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cos(\omega t + \theta). \quad (70)$$

Inserendole nelle equazioni sopra, si trova

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (71)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (72)$$

dove $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$. L'equazione ha la forma $\mathcal{M}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ e la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (73)$$

è simmetrica e reale e dunque ammette tre autovalori reali. I corrispondenti autovettori, che sono i modi normali del sistema, costituiranno la base dello spazio vettoriale, che stavolta è tridimensionale, dato che gli oscillatori sono tre.

L'equazione caratteristica $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{M}) = 0$ è

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0, \quad (74)$$

che risolta dà

$$(\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 1] - (\lambda - 2) = 0 \quad (75)$$

ovvero

$$(\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 2] = 0 \quad (76)$$

e ancora

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2 - \sqrt{2})(\lambda - 2 + \sqrt{2}) = 0 \quad (77)$$

ottenendo così i tre autovalori cercati:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2} \quad (78)$$

che corrispondono alle pulsazioni

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2} \omega_0, \quad \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0. \quad (79)$$

Notiamo che $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ è proprio la pulsazione prevista in base alle nostre considerazioni iniziali sulle oscillazioni in anti-fase delle particelle laterali

con quella centrale ferma. Verifichiamo che l'autovettore corrispondente sia proprio di questo tipo. Basta sostituire $\lambda = 2$ nell'equazione agli autovalori $(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{M})\mathbf{u} = 0$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad (80)$$

che implica $b = 0$ e $c = -a$, che è il risultato che ci aspettavamo. Sostituendo gli altri due autovalori si trova invece

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \mp\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad (81)$$

che implica $b = \pm\sqrt{2}a$ e $c = a$. Si tratta quindi di una oscillazione in fase delle particelle laterali, accompagnata da un'oscillazione di ampiezza maggiore della particella centrale, in fase con le altre per l'autovalore λ_1 e in anti-fase per l'autovalore λ_3 . Usando vettori normalizzati a 1, possiamo scrivere gli autovettori in questo modo:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

e si può verificare facilmente che si tratta di vettori ortogonali: $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = 0$. La matrice ortogonale e simmetrica di cambiamento di base è

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

e la matrice \mathcal{M}' che rappresenta gli oscillatori nella base dei modi normali diventa

$$\mathcal{M}' = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Potremmo ragionare in termini fisici sul perché il modo normale di oscillazione con frequenza più bassa sia quello con tutte tre le particelle in fase, ma con ampiezza maggiore per la centrale. La ragione è abbastanza semplice: si tratta del modo che deforma meno le molle, nel complesso, a parità

di ampiezza di oscillazione al centro. Ma su questo ci torneremo più avanti, dopo aver trattato il caso di una catena di N oscillatori.

Infine, suggerisco un esercizio: si tolgano di mezzo le pareti laterali e si riscrivano le equazioni del moto per le tre particelle. Dato che lo spostamento delle particelle laterali non sollecita più tali molle, ma solo quelle che le legano alla particella centrale, la nuova matrice \mathcal{M} sarà

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

ed è facile vedere che gli autovalori sono 0, 1, 3. Si ha quindi un autovalore nullo. Qual è il significato fisico di questo risultato?

4 Catena di N oscillatori, con N grande



Prendiamo N particelle di massa m collegate da molle uguali, di costante elastica k . Le molle laterali siano vincolate a pareti. Già sappiamo che il sistema ammetterà N modi normali, che possono essere visti come una base ortonormale di uno spazio vettoriale N -dimensionale. Per trovarli possiamo procedere come prima. Enumeriamo le particelle da sinistra a destra con un indice numerico $i = 1, 2, 3, \dots, N$ e indichiamo con $\psi_i(t)$ lo spostamento della particella i -esima. Poi cerchiamo soluzioni del tipo $\cos(\omega t)$, e definiamo $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$ con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. In questo modo arriviamo ad un'equazione agli autovalori, con una matrice $N \times N$ che rappresenta le equazioni del moto:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Il caso 3×3 l'abbiamo appena visto. Il caso con N generico sarà ovviamente più difficile da risolvere analiticamente, data il grado crescente dei polinomi da risolvere. Un'alternativa consiste nel dare la matrice in pasto ad un calcolatore, che sia dotato di algoritmi standard di diagonalizzazione, e aspettare

che ne escano gli autovalori e gli autovettori in forma numerica. Qui però facciamo una cosa diversa: cerchiamo di capire come sono fatti gli autovettori con frequenza più bassa nel limite di N molto grande.

Se la distanza tra le pareti laterali è L , ed è fissata, il fatto di prendere un numero di oscillatori che tende a infinito equivale a trasformare la catena discreta in un continuo, ovvero passare da una configurazione molla-massa-molla-ecc. ad una corda elastica. Chiamata x la coordinata spaziale nella direzione della catena, l'indice i di ciascuna particella identifica la coordinata x_i della particella i -esima e la grandezza $\varphi_i(t)$ sarà il suo spostamento dall'equilibrio al tempo t . Possiamo identificare $\varphi_i(t)$ come il valore di una funzione $\varphi(x, t)$ calcolato nel punto x_i nell'istante t , ovvero $\varphi(x_i, t)$. Questa funzione di due variabili contiene tutte le deformazioni delle molle lungo la catena o, equivalentemente, la deformazioni locali della corda, inclusa la loro dipendenza dal tempo.

Concentriamoci sull'equazione del moto della particella i -esima, che è

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x_i, t) = -k(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + k(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \quad (87)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x_i, t) &= -(k/m)[\varphi(x_i, t) - \varphi(x_{i-1}, t)] + (k/m)[\varphi(x_{i+1}, t) - \varphi(x_i, t)] \\ &= -\omega_0^2[-\varphi(x_{i-1}, t) + 2\varphi(x_i, t) - \varphi(x_{i+1}, t)] \end{aligned} \quad (88)$$

Dato che φ è una funzione di due variabili, x e t , abbiamo espresso la derivata temporale nella forma di derivata parziale. A questo punto ragioniamo su come ci aspettiamo che sia la funzione φ per i modi normali di bassa frequenza. Nel caso $N = 3$ abbiamo già visto che la frequenza più bassa corrisponde al moto in fase delle tre particelle, dato che questo corrisponde alla minor deformazione complessiva delle molle. Analogamente nel caso di N grande ci aspettiamo che, per i modi di bassa frequenza, le particelle vicine tendano ad oscillare in fase o, in altri termini, che gli spostamenti φ differiscano di poco tra particelle vicine. Se la distanza tra due particelle all'equilibrio è h , ciò che stiamo assumendo è che la funzione $\varphi(x, y)$ vari lentamente sulla scala di h . Dunque, dato il valore di $\varphi(x, y)$ nel punto x_i , i valori nei punti x_{i-1} e x_{i+1} possono essere ottenuti, in buona approssimazione, con una espansione in serie di potenze:

$$\varphi(x_{i-1}, t) = \varphi(x_i, t) - h \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_i, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x_i, t) + \dots \quad (89)$$

$$\varphi(x_{i+1}, t) = \varphi(x_i, t) + h \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_i, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x_i, t) + \dots \quad (90)$$

Inserendo queste espressioni nell'equazione del moto precedente, all'ordine più basso in h si trova

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x_i, t) = \omega_0^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x_i, t) \quad (91)$$

e questa deve valere per ogni particella lungo la catena, ovvero per ogni x compreso tra $x = 0$ a $x = L$. Il prodotto $\omega_0 h$ è una costante con le dimensioni di una velocità; lo chiamiamo v . Allora possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x, t) = 0 \quad (92)$$

che è l'equazione delle onde, o equazione d'onda classica, che gli studenti avranno già visto nelle lezioni di meccanica.

Per una catena infinita e aperta, senza vincoli ai bordi, l'equazione delle onde ammette soluzioni della forma $\varphi(x, t) = A \cos(qx - \omega t)$, che corrispondono a onde progressive, periodiche nel tempo e nello spazio, dove il numero d'onda q e la pulsazione ω sono legati dalla relazione $v = \omega/q$. La velocità v è detta velocità di fase. Invece, nel nostro caso della catena vincolata negli estremi, con condizioni al contorno $\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0$, la stessa equazione ha come soluzioni

$$\varphi_n(x, t) = A_n \sin(q_n x) \cos(\omega_n t + \vartheta_n) \quad (93)$$

con

$$q_n = n \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (94)$$

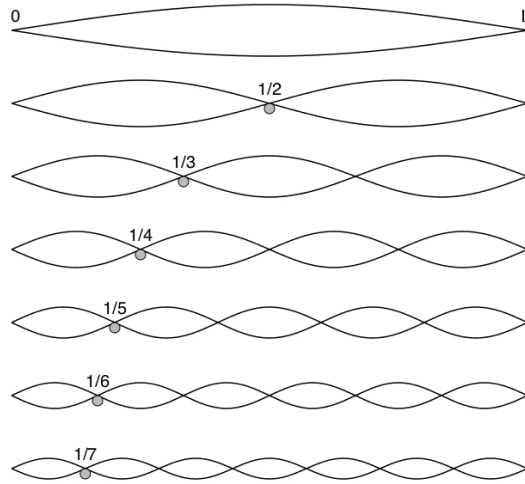
e

$$\omega_n = v q_n, \quad (95)$$

mentre l'ampiezza A_n e la fase ϑ_n sono costanti d'integrazione.

Queste oscillazioni, che non sono onde progressive ma bensì onde stazionarie, costituiscono l'insieme dei modi normali della corda. La funzione $\varphi_n(x, t)$ ha nodi e ventri fissi nel tempo. In particolare, la soluzione con frequenza più bassa, corrispondente a $n = 1$, ha nodi solo negli estremi della corda e il ventre al centro, mentre le soluzioni con $n > 1$ hanno $n - 1$ nodi all'interno dell'intervallo $(0, L)$, equispaziati, come in figura [il disegno è basato su una bitmap image Image:Overtone.jpg di pubblico dominio in <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4344186>].

Soluzioni della stessa forma le avremmo trovate se avessimo considerato spostamenti verticali delle particelle. In tal caso le onde stazionarie sarebbero state onde trasversali, come le vibrazioni di una coda di chitarra. La sequenza di soluzioni è anche nota come successione degli armonici naturali, dove $n = 1$



è la prima armonica, o tono fondamentale, e le altre sono armoniche superiori. Il numero $1/n$, come in figura, rappresenta la frazione di corda che separa due nodi. Nel linguaggio musicale, la differenza tra due armoniche successive è l'intervallo di ottava.

Torniamo alla definizione di velocità $v = \omega_0 h$ e cerchiamo di capirne il significato fisico. Per come entra nell'equazione delle onde è chiaro che si tratta della velocità di propagazione delle deformazioni lungo la corda. D'altra parte, eravamo partiti da masse e molle. Nel prendere il limite $N \rightarrow \infty$ con la distanza L fissata, dobbiamo tener conto che h tende a zero. Dunque, per capire come vanno le cose in questo limite, riscriviamo il quadrato della velocità in questo modo:

$$v^2 = \omega_0^2 h^2 = \frac{k}{m} h^2 = \frac{kh}{(m/h)}. \quad (96)$$

È facile convincersi che sia il numeratore che il denominatore di questa frazione tendono ad un valore finito nel passaggio da una catena discreta ad una corda continua. Tanto per cominciare, il denominatore $\mu = m/h$ non è altro che la densità lineare di massa della catena, ovvero la massa per unità di lunghezza. Nel passaggio al continuo questa quantità rimane finita, perché è come prendere particelle di massa sempre più piccola a distanze sempre più piccole, ma facendo in modo di convergere alla densità lineare propria della corda. In modo analogo, nello stesso limite il prodotto kh , che ha le dimensioni di una forza, tende ad una costante fissata dalla natura della corda elastica. In particolare, un tratto di corda elastica di lunghezza l , quando viene allungato di una lunghezza Δl , produce una forza di richiamo ai suoi

estremi pari in modulo a $|F| = ES\Delta l/l$, dove E è una caratteristica della corda detta modulo di Young e S è la sua sezione. Nel sistema fatto di molle e masse, la deformazione relativa è φ/h e la forza l'avevamo scritta come $|F| = k\varphi$. Se la forza deve essere la stessa, nel limite in cui la catena discreta diventa una corda continua, allora deve valere la relazione $k = ES/h$, e dunque il prodotto kh tende al valore ES , che ha un valore finito, determinato solo dalle proprietà della corda. Con questa definizione e tenendo conto che in una corda omogenea la massa per unità di volume, ρ , è legata alla densità lineare da $\rho = \mu/S$, otteniamo

$$v = \sqrt{E/\rho}, \quad (97)$$

che è l'espressione usuale per la velocità di propagazione delle onde in una corda elastica.

5 Modi normali e serie di Fourier

Dal punto di vista del nostro approccio algebrico, i modi normali di oscillazione della corda nel limite continuo corrispondono agli autovettori di una matrice $\infty \times \infty$. Quindi lo spazio vettoriale è infinito-dimensionale e i modi normali sono in numero infinito, con pulsazione crescente. Ma dal punto di vista fisico dobbiamo tener conto del fatto che esiste un limite naturale all'applicazione di questo modello ai modi ad alta frequenza: il modello infatti perde di significato quando la lunghezza d'onda delle deformazioni diventa confrontabile con la scala microscopica, a livello molecolare, e dobbiamo limitarci a considerare buone solo le soluzioni con lunghezze d'onda sufficientemente lunghe e pulsazioni basse (quanto basse dipende dalla natura della corda). Il problema non si pone nel caso della catena discreta di N particelle, dove i modi normali sono N ed esiste un valore massimo ben definito della pulsazione. È facile convincersi che il modo con pulsazione massima è quello in cui particelle vicine sono sempre in anti-fase, dato che si tratta dell'oscillazione che produce la massima deformazione complessiva delle molle a parità di ampiezza. In termini delle funzioni $\varphi_n(x, t)$ questo modo corrisponde a piazzare una particella per ogni ventre e, dato che il numero di ventri è uguale all'indice n dell'armonica, si avrà al massimo $n = N$, a cui corrisponde la massima pulsazione ω_N dell'ordine di $\pi\omega_0$, da confrontare con la pulsazione minima ω_1 che è dell'ordine di $\pi\omega_0/N$ ed è molto più piccola.

Per una catena di N oscillatori, con N grande, il generico autovettore che

rappresenta uno dei modi normali della catena può essere scritto così:

$$\mathbf{w}_n = C_n \begin{pmatrix} \sin(n\pi x_1/L) \\ \sin(n\pi x_2/L) \\ \sin(n\pi x_3/L) \\ \vdots \\ \sin(n\pi x_N/L) \end{pmatrix}, \quad (98)$$

dove $n = 1, 2, \dots, N$ indica il modo normale mentre x_1, x_2, \dots, x_N sono le posizioni delle masse lungo la catena all'equilibrio. La costante C_n è arbitraria e potrebbe essere fissata per normalizzare il vettore. Ricordiamo che il modulo quadro del vettore è la somma dei quadrati delle componenti. Nel nostro caso questa somma sarà dell'ordine di $N/2$, dato che i termini in \sin^2 hanno in media un valore $1/2$ e ne sommiamo N . Conviene quindi scrivere $C_n = \sqrt{2/N}C'_n$, dove C'_n è indipendente da N e, senza perdere di generalità, possiamo sceglierlo uguale a 1. Ora, se prendiamo $N \rightarrow \infty$ la variabile discreta x_i diventa una variabile continua x e le componenti del vettore, che diventano infinite, si trasformano nei valori della funzione continua $\sin(n\pi x/L)$. Invece di autovettori abbiamo autofunzioni. Il prodotto scalare tra due autovettori, che è la somma dei prodotti delle componenti

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n'} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sin(n\pi x_i/L) \sin(n'\pi x_i/L) \quad (99)$$

diventa un integrale del prodotto di autofunzioni

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n'} = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(n\pi x/L) \sin(n'\pi x/L) \quad (100)$$

dove l'intervallo infinitesimo dx non è altro che la distanza tra gli oscillatori $\Delta x = h = L/N$ nel limite di N infinito. L'intervallo $(0, L)$ contiene un numero intero di semi-lunghezze d'onda di entrambe le funzioni nell'integrando. È facile convincersi che se moltiplichiamo due funzioni a caso di quelle tracciate a pagina 15 e integriamo il loro prodotto tra 0 e L il risultato sarà sempre nullo a meno che non si abbia $n = n'$, nel qual caso si ottiene l'integrale della funzione $\sin^2(n\pi x/L)$ che dà $L/2$. Dunque

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n'} = \delta_{nn'} \quad (101)$$

dove $\delta_{nn'}$ vale 1 se $n = n'$ e vale 0 se $n \neq n'$. Questo simbolo è chiamato delta di Kronecker. Abbiamo così trovato che le autofunzioni sono ortonormali e costituiscono una base completa per lo spazio infinito-dimensionale degli oscillatori.

La conseguenza principale è che ogni deformazione $\varphi(x, t)$ assegnata in un istante t generico può essere decomposta nella base delle autofunzioni che rappresentano i modi normali, $\{\mathbf{w}_n\}$, o in altri termini, può essere scritta come somma delle funzioni $\sin(n\pi x/L)$, con $n = 1, 2, \dots, \infty$. Ad esempio, supponiamo che al tempo $t = 0$ la deformazione sia una funzione assegnata $\varphi_0(x) = \varphi(x, 0)$ e che ogni parte della corda sia ferma in quell'istante, ovvero sia $\dot{\varphi}(x, 0) = 0$. Vogliamo calcolare le componenti della $\varphi_0(x)$ nella base delle autofunzioni. Questo equivale a trovare i coefficienti A_n nella somma

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) . \quad (102)$$

Il trucco sta nel moltiplicare entrambi i membri per una funzione $\sin(n'\pi x/L)$ e integrare in x :

$$\int_0^L dx \varphi_0(x) \sin(n'\pi x/L) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L dx \sin(n\pi x/L) \sin(n'\pi x/L) . \quad (103)$$

Ma sappiamo che l'integrale a destra dà $L/2$ se $n' = n$ ed è nullo per tutti gli altri valori di n . Dunque la somma si riduce ad un singolo termine e il coefficiente A_n diventa

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \varphi_0(x) \sin(n\pi x/L) \quad (104)$$

e se questi integrali esistono vuol dire che possiamo calcolare tutti i coefficienti, ottenendo il vettore $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots)$ che rappresenta lo stato iniziale della corda nella base dei suoi modi normali.

Questa decomposizione di una funzione generica nella base dei modi normali passa sotto il nome di *analisi di Fourier* e, dal punto di vista matematico, fa parte della teoria più generale delle *trasformate di Fourier*, che si applica ad ampie classi di funzioni, sia reali che complesse. In tale contesto, la somma (102) è detta serie di Fourier della funzione $\varphi_0(x)$, oppure sviluppo di Fourier. Il termine *trasformata* viene dal fatto che, tramite le due relazioni (102) e (104), abbiamo stabilito una relazione biunivoca tra una funzione $\varphi_0(x)$, elemento dello spazio vettoriale infinito-dimensionale che rappresenta le deformazioni locali della corda, e un vettore \mathbf{A} in un altro spazio infinito-dimensionale che rappresenta le ampiezze dei modi normali. Nel nostro caso, nella serie di Fourier entrano solo funzioni seno per via delle condizioni al contorno per la corda, che è fissata agli estremi, e dunque $\varphi_0(0) = \varphi_0(L) = 0$. Per funzioni periodiche $f(x)$ di periodo λ e prive di questo vincolo, la serie di

Fourier conterrebbe anche un termine costante e termini con funzioni coseno, nella forma generale

$$f(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n2\pi x/\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n2\pi x/\lambda), \quad (105)$$

e si vede che la serie (102) è il caso particolare per $\lambda = 2L$ e $f(0) = f(L) = 0$.

Un risultato veramente interessante, a questo punto, si trova considerando anche la dipendenza temporale. Ogni modo normale, infatti, evolve nel tempo secondo la relazione (93), indipendentemente dagli altri. Notiamo anche che, se la corda è inizialmente ferma allora la derivata temporale di ogni modo normale

$$\dot{\varphi}_n(x, t) = -A_n \omega_n \sin(q_n x) \sin(\omega_n t + \vartheta_n) \quad (106)$$

dev'essere nulla per $t = 0$ per ogni x . Questo implica $\vartheta_n = 0$ per tutti i modi normali. Dunque, per ottenere la deformazione in qualsiasi istante t , basta prendere la serie di Fourier calcolata al tempo zero (102) e moltiplicare ogni modo normale per $\cos(\omega_n t)$. Si ottiene

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) \cos(\omega_n t), \quad (107)$$

e l'intero problema del moto è risolto!

Per capire meglio il risultato, facciamo qualche esempio. Cominciamo con il caso in cui la corda viene inizialmente preparata, a $t = 0$, in modo che la deformazione $\varphi(x, 0)$ è identica alla forma del tono fondamentale della corda, ovvero la funzione seno con zero nodi nell'intervallo $(0, L)$ nella figura di pagina 15. In questo caso, il calcolo dei coefficienti A_n della serie di Fourier è banale. L'unico integrale (104) non nullo è quello per $n = 1$ e l'intera serie di Fourier si riduce ad un unico termine. In qualsiasi istante rimane eccitato solo un modo normale, che oscilla con pulsazione ω_1 e corrisponde al vettore $\mathbf{A} = (1, 0, 0, \dots)$. Analogo risultato avremmo trovato preparando la corda in modo da eccitare inizialmente un altro modo normale generico n .

Come secondo esempio consideriamo una corda inizialmente deformata in questa forma

$$\varphi(x, 0) = C[1 - |1 - (2x/L)|], \quad (108)$$

che corrisponde ad una deformazione triangolare con massimo in $x = L/2$, dove vale C . Per trovare i coefficienti della serie di Fourier dobbiamo calcolare gli integrali

$$A_n = \frac{2C}{L} \int_0^L dx [1 - |1 - (2x/L)|] \sin(n\pi x/L), \quad (109)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2C}{L} \int_0^{L/2} dx \frac{2x}{L} \sin(n\pi x/L) \\
 &\quad + \frac{4C}{L} \int_{L/2}^L dx \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin(n\pi x/L) \\
 &= \frac{8C}{\pi^2 n^2} \sin(n\pi/2), \tag{110}
 \end{aligned}$$

che dà $A_n = 0$ per tutti gli n pari e

$$A_n = \frac{8C}{\pi^2 n^2} (-1)^{(n-1)/2}, \tag{111}$$

per gli n dispari. La serie di Fourier è quindi

$$\varphi(x, 0) = \frac{8C}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin(n\pi x/L). \tag{112}$$

Il risultato appare complicato e gli integrali pure (non pretendo che chi legge li sappia calcolare), ma la fisica è abbastanza semplice da capire. Una deformazione triangolare è facile da realizzare. Nel caso di una corda elastica fissata agli estremi, basta afferrarla con le dita nel punto di mezzo e spostare questo punto lateralmente di un po', tenendolo poi fermo. In questo modo la deformazione è in buona approssimazione quella scritta in (108). Poi si lascia andare la corda e quello che succede è che i modi normali presenti nella serie (112) iniziano ad oscillare ciascuno con la propria frequenza. Lo stesso accade se si considera la deformazione trasversa di una corda di chitarra, dove le equazioni sono le stesse a meno di una diversa definizione della velocità di propagazione delle onde. Deformare la corda di chitarra come nella (108) è banale: basta prendere il punto di mezzo della corda e tenerlo sollevato. Quando la corda viene lasciata andare produce un suono che contiene il tono fondamentale, $n = 1$, la terza armonica, $n = 3$, e tutte le altre armoniche dispari, con ampiezze fissate dai coefficienti A_n trovati sopra e con diverse frequenze, a due ottave di distanza l'una dall'altra, nel gergo musicale. Il nostro orecchio misura l'intensità del suono che è proporzionale al quadrato delle ampiezze e dunque scala come $1/n^4$. Il tono fondamentale sarà quindi molto intenso rispetto alle armoniche superiori, come ci si aspetta, ma la serie di Fourier (112) vi dice anche di quanto.

Un ultimo esempio è quello di una deformazione inizialmente localizzata nello spazio, come ad esempio quella rappresentata da questa funzione gaussiana:

$$\varphi(x, 0) = C \exp \left[-\frac{(x - L/2)^2}{2\sigma^2} \right]. \tag{113}$$

Si tratta di una deformazione a campana, con il massimo a metà corda, in $x = L/2$, e con una larghezza dell'ordine di σ , che possiamo prendere molto minore di L se vogliamo rappresentare una deformazione localizzata. I coefficienti della serie di Fourier si trovano, al solito, integrando la gaussiana moltiplicata per ciascun modo normale, come in (104). Qui tralascio i calcoli; lo studente curioso e che sappia come integrare funzioni gaussiane, può svolgerli come esercizio. Mi limito a commentare il risultato principale: i coefficienti di Fourier di una gaussiana seguono anch'essi una distribuzione gaussiana: la deformazione della corda si comporta come un *pacchetto d'onde* composto dal tono fondamentale e le sue armoniche dispari con coefficienti distribuiti secondo una gaussiana del tipo

$$A_n \propto \exp \left[-\frac{n^2 \pi^2 \sigma^2}{2L^2} \right], \quad (114)$$

che ha una larghezza proporzionale a $1/\sigma$. Dunque, più la deformazione è localizzata in una regione stretta dello spazio delle coordinate, più è delocalizzata nello spazio di modi normali, cioè coinvolge modi normali con n grande. In altri termini, se chiamiamo Δx l'ampiezza spaziale della zona interessata dalla deformazione e Δn l'ampiezza dell'intervallo dei valori di n dei modi normali coinvolti nella deformazione, allora vale $\Delta x \Delta n = \text{costante}$. Si tratta di una relazione interessante che lo studente avrà modo di apprezzare particolarmente quando, in un contesto diverso dagli oscillatori classici ma formalmente simile, si troverà ad affrontare il principio di indeterminazione di Heisenberg.

L'evoluzione temporale della deformazione gaussiana (113) è molto istruttiva. Se si prendono in coefficienti (114) e li si mette nell'espressione (107), si trova che, al passare del tempo, la gaussiana iniziale si separa in due gaussiane identiche di ampiezza $C/2$ che si muovono in direzioni opposte a velocità v e $-v$ senza modificare la loro forma. Raggiunto il bordo tornano indietro con segno opposto, raggiungono il bordo dall'altra parte, ricambiano il segno, e così via. Dopo un intervallo di tempo pari a $2L/v$ le due gaussiane si ritrovano nella stessa configurazione che avevano all'inizio per formare la gaussiana (113), e il tutto si ripete periodicamente. Il risultato non ci dovrebbe stupire. L'equazione delle onde, per costruzione, ammette soluzioni della forma $f(x - vt)$ che traslano con velocità v , e le oscillazioni stazionarie della corda possono essere viste come l'effetto dell'interferenza di due onde, con la stessa ω e lo stesso q , che traslano in verso opposto. Vale la pena tuttavia sottolineare quali sono le assunzioni cruciali per ottenere la traslazione rigida delle gaussiane (113): in primo luogo il sistema di oscillatori è lineare (l'equazione delle onde è lineare), così che ogni deformazione $\varphi(x, t)$ può essere scritta come combinazione lineare dei modi normali (autofunzioni

dell'equazione); in secondo luogo, la velocità di fase $v = \omega/q$ è la stessa per tutti i modi normali, ovvero $\omega(q) = vq$. Un sistema di oscillatori lineari di questo tipo è anche detto *non-dispersivo*, proprio perché un pacchetto d'onde mantiene la sua forma nel tempo. Se la pulsazione ω dipendesse da q in modo diverso, i modi normali che compongono un pacchetto, come quello gaussiano in (113), viaggerebbero con velocità diverse e il pacchetto, inizialmente localizzato, darebbe luogo, dopo un certo tempo, a oscillazioni estese su tutta la corda, disperdendosi. In tal caso, il sistema di oscillatori si direbbe *dispersivo*. Analogamente, ci si aspetta dispersione del pacchetto anche quando la dinamica è non-lineare, dato che non si potrà più rappresentare il sistema in termini di modi normali di oscillazione.

6 Sistemi con dinamica non-lineare

È importante sottolineare che in tutti i casi trattati fin qui la linearità delle equazioni differenziali che descrivono il moto degli oscillatori è essenziale per poter utilizzare l'apparato formale dell'algebra lineare in spazi finito-dimensionali (catene discrete) o infinito-dimensionali (corde continue). Se le particelle fossero soggette a forze di tipo diverso da quelle elastiche, ad esempio proporzionali a φ^2 o altre potenze, non avremmo potuto usare gli spazi vettoriali come abbiamo fatto fin qui. Sembrerebbe quindi che ci sia un limite forte alla applicabilità di questo approccio matematico ai casi di interesse fisico. Ma non è così. In realtà gli oscillatori armonici sono onnipresenti in fisica, dato che ogni sistema tende a manifestare moti armonici in risposta a piccole perturbazioni attorno a stati di equilibrio. Ma il linguaggio dell'algebra lineare e il concetto di modi normali trovano applicazioni in un contesto ancora più ampio al di fuori della fisica classica, nell'ambito della meccanica quantistica che, ai suoi albori, si chiamava *meccanica matriciale*, non certo a caso; ma questa è un'altra storia.

Possiamo chiederci però cosa succede se, invece, la dinamica è non-lineare. Per farlo, torniamo alla catena con N masse collegate da molle uguali come al capitolo 4. Supponiamo che le molle agiscano fuori dalle condizioni di applicabilità della legge di Hooke, in particolare, detta Δl la variazione di lunghezza della molla, la forza esercitata da questa sia per ipotesi $-k\Delta l(1 + \alpha\Delta l)$. In questo modo la risposta è armonica solo per piccolissime deformazioni, fintanto che $\alpha\Delta l \ll 1$, mentre per deformazioni finite la forza contiene un termine quadratico aggiuntivo. Possiamo ora studiare cosa succede alla catena con queste molle anarmoniche. Il punto di partenza sono le equazioni del moto delle particelle. Se prendiamo la particella i -esima lungo la catena,

questa interagisce solo con quelle accanto. La sua equazione del moto è

$$m\ddot{\varphi}_i = -k[1 + \alpha(\varphi_i - \varphi_{i-1})](\varphi_i - \varphi_{i-1}) + k[1 + \alpha(\varphi_{i+1} - \varphi_i)](\varphi_{i+1} - \varphi_i) \quad (115)$$

che, con un semplice riarrangiamento dei termini e definendo al solito $\omega_0^2 = k/m$, può essere scritta nella forma

$$\ddot{\varphi}_i = -\omega_0^2(-\varphi_{i-1} + 2\varphi_i - \varphi_{i+1})[1 + \alpha(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})]. \quad (116)$$

Questa equazione è molto simile alla (88), ma la fisica che ne risulta è assai diversa. In effetti, questa equazione corrisponde ad un modello ben noto e, potremmo dire, storico: è il modello di Fermi-Pasta-Ulam (FPU), sviluppato da Enrico Fermi, John Pasta, e Stanislaw Ulam tra il 1953 e il 1954 (anno della morte di Fermi, tra l'altro). Si trattò in pratica della prima simulazione numerica nella storia della fisica, e il computer utilizzato era il pionieristico MANIAC I, un calcolatore elettronico a disposizione dei laboratori nazionali di Los Alamos. Fu Fermi ad avere l'idea di testare un modello fisico facendo eseguire i calcoli ad un computer, inventando così il concetto di esperimento numerico, e l'equazione qui sopra fu la prima ad essere usata in questo modo. Lo scopo era quello di verificare come l'energia associata ad una eccitazione, inizialmente prodotta in una certa regione limitata della catena, si disperdesse poi in tutta la catena negli istanti successivi, e in quanto tempo ciò avvenisse. Il risultato però fu diverso e inatteso: esistevano forme particolari dell'eccitazione iniziale che rimanevano localizzate anche a tempi lunghi, oppure si disperdevano nella catena per poi tornare a localizzarsi. Il modello quindi, non permetteva di "termalizzare" l'energia inizialmente impressa, come invece Fermi si sarebbe aspettato.

Si può capire meglio perché il modello FPU ammette soluzioni localizzate che non si disperdono se si guarda al limite del continuo dell'equazione (116). Come avevamo fatto per l'equazione (88), dobbiamo assumere che la funzione $\varphi(x, t)$ vari lentamente sulla scala della distanza h tra le masse, in modo da scrivere le φ_{i-1} e la φ_{i+1} tramite uno sviluppo in serie di potenze, ma stavolta dobbiamo andare ad ordini superiori:

$$\varphi_{i\pm 1} = \varphi_i \pm h \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4}. \quad (117)$$

Inserendo queste espressioni nella (116) si ottiene

$$\ddot{\varphi}_i = \omega_0^2 \left(h^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4} \right) \left[1 + \alpha \left(2h \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3} \right) \right]. \quad (118)$$

Nel limite della corda continua, la lunghezza delle molle h tende a zero. Come abbiamo fatto nel capitolo 4, possiamo definire $v^2 = \omega_0^2 h^2 = kh^2/m$ che tende

a una costante; assumiamo invece che α tenda a zero, in modo che h/α tenda ad una costante. L'indice discreto i si trasforma nella variabile continua x e la deformazione locale della corda diventa la funzione $\varphi(x, t)$. Prendiamo l'espressione precedente, svolgiamo i prodotti ed eliminiamo tutti i termini in h^3 o in αh^2 e ordini superiori. Il risultato è

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -2h\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}. \quad (119)$$

Se α fosse zero, il primo termine a destra sarebbe nullo, ma potremmo trascurare anche il secondo nel limite del continuo, $h \rightarrow 0$. In questo modo otterremmo l'usuale equazione delle onde (92) per la catena infinita di oscillatori lineari. I due termini al secondo membro dell'equazione precedente rappresentano la correzione all'equazione delle onde nel caso anarmonico del modello FPU. Dobbiamo tenerli entrambi, anche se il secondo non contiene α , perché sono dello stesso ordine, entrambi quadratici, nei due parametri piccoli α e h . Se introduciamo le nuove variabili $\xi = x - vt$ e $\tau = \alpha hvt$, e definiamo $\delta = \sqrt{h/(24\alpha)}$, possiamo riscrivere l'equazione precedente in termini di una nuova funzione $f(\xi, \tau) = \partial\varphi(\xi, \tau)/\partial\xi$ in questo modo:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \delta^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + f \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad (120)$$

che è nota come equazione di Korteweg - de Vries (KdV). Qui ho omesso i passaggi per non appesantire la trattazione, e non ritengo nemmeno necessario che lo studente li sappia svolgere. È sufficiente cogliere l'idea di fondo, cioè il fatto che un modello di oscillatori non-lineari, come il modello FPU, porta in modo diretto ad equazioni del moto, come l'equazione KdV, che ammettono soluzioni localizzate nello spazio e che non si disperdono durante la successiva evoluzione temporale. La forma di queste soluzioni non è rappresentabile come combinazione di oscillazioni stazionarie e la velocità con cui la deformazione si muove lungo la corda non è la velocità di fase v che entra nel membro di sinistra della (119). Inoltre, possiamo anche produrre due deformazioni locali di questo tipo che si propagano in direzioni opposte: si incontreranno e si separeranno mantenendo ciascuna la propria forma. Soluzioni di questo tipo si chiamano *solitoni* e l'equazione KdV è una delle equazioni fondamentali della fisica dei solitoni, con applicazioni in diversi campi della fisica. Tra questi vale la pena citare la propagazione delle onde di superficie in acque poco profonde; la prima osservazione di onde solitarie di questo tipo, infatti, fu quella effettuata da John Scott Russell nell'agosto del 1834 nello Union Canal in Scozia. Ciò che lega le onde solitarie viste da Russell sull'acqua del canale, dietro una barca trainata da cavalli, e la catena di oscillatori anarmonici delle simulazioni numeriche di Fermi, Pasta e Ulam, è il ruolo dei termini non-lineari nelle equazioni del moto.

7 Sistemi non-lineari e caos

Il fatto di ammettere soluzioni solitoniche non è l'unica caratteristica interessante della catena anarmonica del modello FPU descritto nel capitolo precedente. Accanto a tali soluzioni, infatti, il modello ammette anche soluzioni caotiche. Per capire il senso di questa affermazione, cercheremo ora di caratterizzare il comportamento caotico di un sistema fisico.

Per iniziare ricordiamo che la fisica classica newtoniana è deterministica per costruzione. Con questo intendiamo che, se un sistema è descrivibile tramite N grandezze che variano nel tempo, come le coordinate di un sistema di particelle ad esempio, ci basta conoscere il valore di $2N$ grandezze in un dato istante, ad esempio le coordinate e le rispettive componenti delle velocità delle particelle, per conoscere tutta l'evoluzione futura del sistema. Un'esposizione elegante di questo determinismo delle leggi classiche è quella data sinteticamente in un celebre passaggio dell'*Essai philosophique sur les probabilités* di Pierre-Simon Laplace (1749-1827):

Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro, proprio come il passato, sarebbe evidente davanti ai suoi occhi.

Ciò in effetti è meraviglioso, ma non funziona. Il punto debole sta nelle premesse: per realizzare il sogno di Laplace bisogna conoscere le condizioni iniziali, ma con quale precisione? In linea di principio con infinita precisione, ma questo non è realizzabile, perchè la conoscenza delle coordinate e le velocità delle particelle richiede misure, e gli strumenti di misura non hanno precisione infinita. Il determinismo della teoria è innegabile, ma l'uso della teoria per fare previsioni sul futuro, date le condizioni iniziali, è soggetto inevitabilmente a incertezze legate ai limiti nella conoscenza delle condizioni iniziali stesse. Lo stesso Laplace ne era consapevole e, infatti, nella stessa opera scriveva:

ma l'ignoranza delle diverse cause che concorrono alla formazione degli eventi come pure la loro complessità, insieme con l'imperfezione dell'analisi, ci impediscono di conseguire la stessa certezza

rispetto alla grande maggioranza dei fenomeni. Vi sono quindi cose che per noi sono incerte, cose più o meno probabili, e noi cerchiamo di rimediare all'impossibilità di conoscerle determinando i loro diversi gradi di verosimiglianza.

Il problema è aggirabile se si dimostra che, migliorando la precisione degli strumenti di misura, l'incertezza sulle condizioni iniziali è sufficientemente piccola da dare effetti piccoli nelle predizioni sul comportamento futuro del sistema; è come prendere la bella affermazione di Laplace e tradurla nell'affermazione, più prosaica, "se il presente è all'incirca questo, allora il futuro sarà all'incirca questo", avendo la possibilità di migliorare a piacere i margini di imprevedibilità. È meno elegante, ma può essere molto efficace nella pratica. Peccato che anche questo non funziona, o almeno non funziona sempre. Ci sono sistemi che si ostinano a darci risultati molto incerti nel futuro anche quando riduciamo al massimo l'incertezza sul presente. Di questo ci si è resi conto già alla fine dell'ottocento. In *Scienza e metodo*, Henri Poincaré (1854-1912) diceva:

Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non è così, può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un enorme errore nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

Ecco dunque ciò che definiamo come sistema caotico: un sistema che manifesta forte dipendenza dalle condizioni iniziali, talmente forte da rendere praticamente imprevedibile l'evoluzione futura del sistema a partire da condizioni iniziali note con precisione a piacere. Questa in realtà è una delle varie definizioni adottate dalla comunità dei fisici. Ve ne sono altre analoghe, ma questa per il momento ci basta.

Per ritornare al nostro punto di partenza, è chiaro a questo punto cosa significa che il modello FPU, descritto dall'equazione (116), è caotico. Tramite simulazioni numeriche si dimostra facilmente che, se la condizione di partenza non è una di quelle che hanno natura solitonica, la soluzione evolve in modo da essere estremamente sensibile alle condizioni iniziali: due simulazioni che partano da valori iniziali che differiscono di poco, anche di molto

poco, dopo un certo tempo danno luogo a soluzioni completamente diverse: si tratta di traiettorie non periodiche e molto complicate nello spazio delle configurazioni di un sistema deterministico classico. Visto ad un tempo t generico, il comportamento del sistema appare completamente casuale, anche se le condizioni iniziali erano apparentemente sotto controllo e malgrado le leggi deterministiche che lo governano. Questo, in fisica, è il caos.

Invece di analizzare la caoticità del modello FPU, preferisco illustrare un altro esempio che, pur non avendo attinenza diretta con la fisica degli oscillatori meccanici, ha però il vantaggio di far apprezzare la generalità del problema e, inoltre, permette di cogliere la fisica del caos nel momento della sua nascita: il modello di Lorenz.

Edward N. Lorenz era un giovane meteorologo del Massachusetts Institute of Technology, che nel 1961 stava lavorando ad alcune equazioni che erano intese a descrivere, entro opportuni modelli, la circolazione convettiva delle masse d'aria in un'atmosfera soggetta a gradienti di temperatura. Il suo primo passo fu quello di sfrondate i modelli esistenti da tutti i dettagli che, a suo modo di vedere, potevano essere superflui, mantenendo però intatte le caratteristiche essenziali del sistema da descrivere. Il suo modello semplificato descriveva il moto di un fluido quando la circolazione avveniva in celle convettive contenute tra due termostati planari, uno sotto e uno sopra, a temperature diverse, in un campo di gravità. Il tutto si riduceva a tre equazioni differenziali accoppiate di questo tipo:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{121}$$

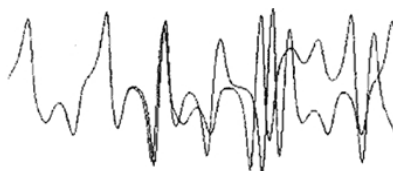
$$\dot{y} = -xz + rx - y \tag{122}$$

$$\dot{z} = -bz + xy, \tag{123}$$

dove x , y e z sono funzioni del tempo incognite, mentre σ , r e b sono costanti. Qui non importa sapere quale sia il significato delle funzioni incognite, che sono legate al campo di velocità dell'aria e alla temperatura, nè quello delle costanti. Ci basta sapere qual è la struttura delle equazioni, in particolare che si tratta di equazioni differenziali del primo ordine accoppiate e non-lineari, dove la non-linearità appare nei termini xz e xy .

Il secondo passo fu quello di dare in pasto queste equazioni ad un calcolatore. Nel 1963 l'idea di usare i calcolatori elettronici per effettuare simulazioni numeriche non era nuova. Il calcolatore a valvole e circuiti elettrici a disposizione di Lorenz faceva ben sessanta (!) operazioni al secondo: bastava inserire le condizioni iniziali e lasciare che risolvesse le equazioni con una sequenza di passi temporali, registrando ad ogni passo i valori ottenuti per le funzioni incognite. La novità fu la scoperta, peraltro del tutto accidentale, della estrema sensibilità alle condizioni iniziali. In breve, un giorno,

vedendo che una simulazione, appena conclusa, mostrava un comportamento non-periodico diverso da quello che si aspettava, Lorenz decise di rifare la stessa simulazione per verificare cosa succedeva a tempi più lunghi. Invece di rimettere i dati iniziali e ripetere la simulazione da capo, ma per un durata maggiore, decise di farla partire ad un tempo intermedio \tilde{t} tra quello iniziale $t = 0$ e quello finale t_f della simulazione precedente, inserendo a mano, come nuovi valori iniziali, i valori di $x(\tilde{t})$, $y(\tilde{t})$ e $z(\tilde{t})$ che stavano nel tabulato, stampato su carta, già fornito dal calcolatore. Poi fece partire la simulazione da \tilde{t} e uscì per una pausa. Al ritorno rimase colpito dal fatto che la soluzione, anche nella parte tra \tilde{t} e t_f era completamente diversa dalla precedente, come nella figura. Dato che si trattava pur sempre di un modello perfettamente deterministico, l'unica differenza ammissibile tra i due casi stava in un possibile errore nell'immissione dei valori iniziali, ma non c'era alcun errore apparente. L'inghippo era ben più subdolo: il calcolatore lavorava con numeri a sei cifre significative, in tutte le operazioni, ma i valori venivano stampati su carta solo a tre cifre, per comodità. Dunque Lorenz, invece di inserire il valore esatto calcolato nella prima simulazione al tempo \tilde{t} , ad esempio 0.506127, aveva inserito il valore troncato 0.506, modificando di meno di un millesimo il valore delle variabili tra le due simulazioni nello stesso istante. Questa piccola variazione aveva indotto traiettorie totalmente diverse.

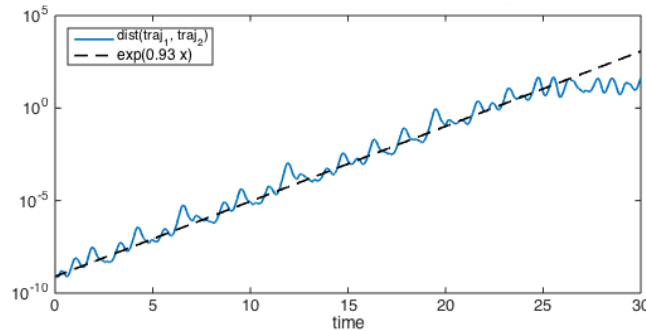


La figura è interessante, ma dà un'informazione solo qualitativa e non dice molto più di quanto abbiamo appena affermato: il modello fornisce risultati estremamente sensibili alle condizioni iniziali. Possiamo essere più quantitativi? Un metodo efficace consiste nel definire la distanza tra le soluzioni ottenute a partire da diversi valori delle variabili a $t = 0$. Dato che le variabili sono solo tre, x , y e z , e sono funzioni del tempo, possiamo considerare la terna $(x(t), y(t), z(t))$ come un vettore che rappresenta lo stato del sistema governato dalle equazioni (123) istante per istante. Se i vettori $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ sono le soluzioni delle equazioni (123) ottenute a partire da due diverse terne di valori iniziali, possiamo definire la distanza tra le due traiettorie come $\delta(t) = |(x_2(t) - x_1(t), y_2(t) - y_1(t), z_2(t) - z_1(t))|$. Se tracciamo la funzione $\delta(t)$ per soluzioni sensibili alle condizioni iniziali, troveremo che questa diverge, ma sapremo anche in quale modo. Un esempio è mostrato qui sot-

to, nel caso $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, che sono gli stessi valori usati da Lorenz nella simulazione citata in precedenza (il grafico è tratto da University of Oxford and the Chebfun Developers, <http://www.chebfun.org/examples/ode-nonlin/LyapunovExponents.html>). La distanza tra le condizioni iniziali è 10^{-9} . La scala verticale è logaritmica. La curva continua che rappresenta la distanza $\delta(t)$ mostra delle piccole oscillazioni quasi periodiche sovrapposte ad una crescita esponenziale. La crescita si ferma a tempi lunghi ad un valore finito compreso tra 1 e 10. Questo valore massimo si comprende dal fatto che le funzioni $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ del modello non assumono valori illimitati, e per tempi lunghi oscillano tra valori dell'ordine di 1. La distanza tra le traiettorie non può quindi crescere all'infinito. L'informazione più significativa che viene dal grafico è l'andamento esponenziale

$$\delta(t) \simeq \delta(0)e^{\lambda t} \quad (124)$$

che è una delle caratteristiche fondamentali dei sistemi dinamici caotici. L'esponente λ è detto esponente di Lyapunov e, nel caso del modello di Lorenz vale circa 0.9 (curva tratteggiata in figura).



Il fatto che traiettorie inizialmente vicine si allontanino esponenzialmente è uno dei modi per dire che un sistema dinamico è caotico. Ogni sistema caotico avrà equazioni diverse per variabili diverse e sarà caratterizzato da propri esponenti di Lyapunov. Ciò che li accomuna è l'impossibilità di fare predizioni affidabili sul valore futuro delle incognite a partire dai valori iniziali. Infatti, per quanto sia accurata la misura delle condizioni a $t = 0$, anche la minima incertezza iniziale crescerà in modo da rendere l'incertezza sui valori finali tanto grande da far sembrare la dinamica del tutto casuale, pur essendo il sistema deterministico. Lo sforzo per migliorare ulteriormente la precisione delle condizioni iniziali non paga, perché il tempo tipico entro il quale la dinamica diventa imprevedibile è comunque fissato dall'inverso dell'esponente di Lyapunov. Infatti, supponiamo che l'incertezza iniziale sia

$\delta(0) = \epsilon$ e che per rendere utile la predizione al tempo t non si possa tollerare un'incertezza sul valore finale superiore ad un certo valore Δ ; usando la (124), la condizione $\delta(t) \leq \Delta$ diventa $\epsilon \exp(\lambda t) \leq \Delta$, ovvero

$$t \leq t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta}{\epsilon} . \quad (125)$$

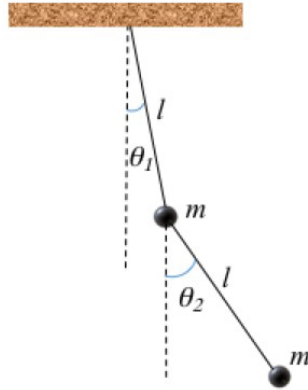
Il tempo t^* è il tempo oltre al quale qualsiasi previsione è inaffidabile. Ora, dato che λ è fissato dalla natura del sistema, l'unica quantità che possiamo variare al fine di aumentare t^* è ϵ , che va preso il più piccolo possibile. Tuttavia la dipendenza da ϵ è logaritmica e questo significa che anche grandi variazioni di ϵ danno piccole variazioni di t^* . Ad esempio, se volessimo aumentare t^* di un fattore 20 dovremmo diminuire ϵ di un fattore $e^{20} \sim 10^9$. Sarebbe uno sforzo enorme per un risultato ben magro. Di fatto, il tempo utile per le previsioni, come si diceva, è fissato da $1/\lambda$, ovvero dalla natura stessa del sistema.

Quello di Lorenz è un modello meteorologico e il fatto di aver scoperto che si tratta di un modello caotico forse non ci sorprende. Siamo pronti a accettare che la dinamica dell'atmosfera sia complicata perché coinvolge un sacco di variabili e fattori incontrollabili. Ma questo ragionamento ci porta fuori strada per almeno due motivi. Il primo è che il modello di Lorenz ha soltanto tre gradi di libertà e, in questo senso, è un modello molto semplice, le variabili sono tre e non c'è nulla di incontrollabile. Il fatto che sia caotico non è quindi legato alla complessità dell'atmosfera che descrive, ma alla struttura delle equazioni differenziali su cui si basa; ad esempio al fatto che le equazioni contengono due termini non-lineari, quadratici nelle funzioni incognite. Il secondo è che esistono sistemi ancora più semplici che sono anch'essi caotici.

Per fare un esempio, torniamo agli oscillatori, e prendiamo un pendolo doppio con due masse uguali m e due aste sottili di lunghezza uguale l , come quello in figura. Si tratta di un sistema effettivamente semplice, con due soli gradi di libertà. Mostra un comportamento dinamico semplice? No, è un sistema caotico. Le equazioni che lo descrivono non le ricaviamo qui, perché la derivazione non è immediata, ma sono queste:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{2g}{l} \sin \theta_1 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin \theta_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (126)$$

Sono equazioni differenziali del secondo ordine e accoppiate. Sono non-lineari perché contengono termini con funzioni seno e coseno degli angoli $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ e termini quadratici nelle rispettive velocità angolari. Anche in questo caso la dinamica è estremamente sensibile alle condizioni iniziali. Facendo una



ricerca in rete con le parole “double pendulum” si trovano facilmente simulazioni di traiettorie e anche dimostrazioni sperimentali, che mostrano l’estrema sensibilità alle condizioni iniziali (chi vuole divertirsi provi ad esempio le simulazioni nel sito <http://complexity.stanford.edu/blog/double-pendulum-simulation>).

8 Bacini di attrazione e frattali

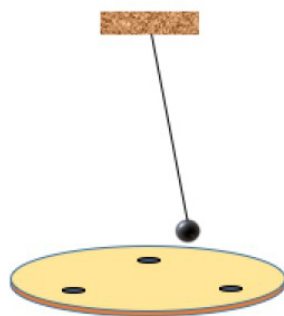
La non-linearità delle equazioni del moto non è sufficiente a garantire il comportamento caotico. Nel caso precedente, se togliamo il secondo pendolo e ci limitiamo al pendolo semplice con una sola massa appesa al soffitto, sappiamo che l’equazione del moto è

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \sin \theta_1 \quad (127)$$

che è un’equazione non-lineare, dato che la funzione incognita $\theta_1(t)$ entra come argomento della funzione seno. Tuttavia il sistema non è caotico. Le soluzioni infatti possono essere ricavate in modo analitico (si veda ad esempio il testo *Elements of Newtonian Mechanics* di Knudsen e Hjørth) e sono tali da garantire incertezze piccole nelle predizioni future per piccole incertezze nelle condizioni iniziali.

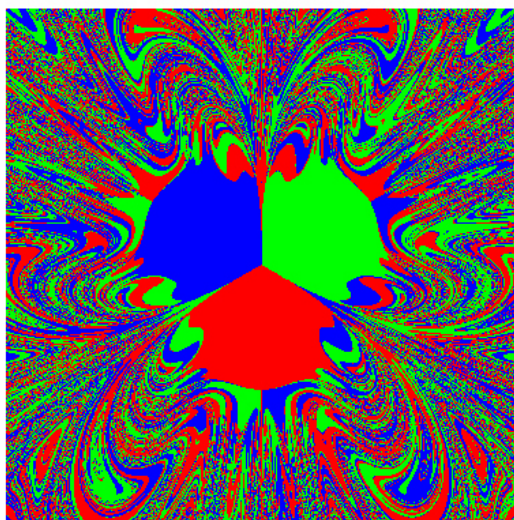
Supponiamo ora di aggiungere ai pendoli anche un termine di attrito, che prima avevamo ignorato, ad esempio proporzionale alla velocità come l’attrito tra la particella appesa e l’aria circostante. Nel caso del pendolo singolo sappiamo che, qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione per tempi lunghi è banale: la particella alla fine si troverà in quiete nel punto più basso. La stessa cosa accade per il doppio pendolo. La posizione verticale è dunque la condizione asintotica per pendoli con attrito. Possiamo chiamare questa posizione *punto fisso stabile* del sistema.

L'esistenza di un punto fisso stabile non ci dice nulla sulla caoticità del sistema, ma è interessante esplorare cosa succede se un sistema ammette più di un punto fisso stabile. Come esempio prendiamo un “pendolo magnetico” così fatto: si prende un pendolo semplice composto da un'asta rigida sottile e da una sferetta di un materiale sensibile a campi magnetici. Sul piano orizzontale sottostante sono fissate tre piccole calamite identiche disposte ai vertici di un triangolo equilatero in modo che la verticale del pendolo cada al centro del triangolo. Ogni calamita ha la polarità orientata in modo da attrarre la sferetta. Se il lato del triangolo è grande, la forza di gravità domina, il punto di minima energia potenziale resta quello sulla verticale, mentre le calamite producono un effetto anarmonico e anisotropo per grandi oscillazioni. Se invece il triangolo è relativamente piccolo e la forza magnetica sufficientemente intensa, i minimi dell'energia potenziale diventano tre e si trovano in corrispondenza dei punti alla minima distanza da ciascuna calamita, mentre sulla verticale l'energia potenziale avrà un massimo locale. Nel primo caso il sistema ha un unico punto fisso stabile, nel secondo ne ha tre.



Consideriamo la situazione in cui i punti fissi sono tre e facciamo oscillare la sferetta a partire da un punto generico, da ferma. A seconda del punto di partenza la traiettoria può essere più o meno complicata. Il caso più ovvio è quando il punto di rilascio è vicino al punto di minima distanza da una delle calamite. In tal caso, ci aspettiamo piccole oscillazioni armoniche smorzate, con pulsazione fissata dalla curvatura locale dell'energia potenziale attorno al punto fisso. Meno ovvio invece è quanto succede se il punto di rilascio è lontano dai punti fissi, o si trova in una zona intermedia tra essi. Un esperimento che possiamo immaginare di fare, oppure possiamo simulare al computer, consiste nel ripetere l'operazione di rilascio della sferetta per ogni punto nello spazio delle coordinate. Tale spazio è bidimensionale e può essere rappresentato dalla coppia di angoli (ϕ, θ) , dove θ è la deviazione dalla verticale e ϕ è l'angolo associato alla rotazione della sferetta in

un piano orizzontale. In alternativa si possono prendere le coordinate del punto (x, y) corrispondente alla proiezione della posizione della sferetta sul piano delle calamite. Essendo il sistema deterministico, data una coppia (x, y) la traiettoria sarà una e una sola e terminerà in uno solo dei punti fissi dopo aver effettuato una serie più o meno complicata di oscillazioni. Dunque, ad ogni punto di partenza possiamo associare una calamita di arrivo. Possiamo identificare ciascuna calamita con un colore, verde, rosso, o blu, e possiamo disegnare una figura in cui il pixel nella posizione (x, y) viene colorato con il colore della calamita su cui termina la traiettoria a partire da (x, y) . La dimensione del pixel può rappresentare l'incertezza sulla posizione iniziale nell'esperimento, oppure il passo di griglia tra i punti nella simulazione numerica. Il risultato di questa sequenza sarà una mappa colorata come quella in figura (l'immagine è tratta da Harvey Mudd College, <https://www.math.hmc.edu/~jacobsen/demolab/magneticpendulum.html>).



La figura corrisponde ad una scelta particolare dei parametri che fissano l'intensità relativa del campo magnetico e della gravità e il valore del coefficiente di attrito, ma scelte diverse non cambiano gli elementi essenziali dell'immagine. Chiamiamo *bacino di attrazione* le zone di un colore assegnato. In questa immagine ci sono tre bacini di attrazione perché le calamite sono tre. Possiamo figurarci i bacini come i bacini idrografici in una geografia complicata: data una conformazione di creste e valli, un corso d'acqua segue una traiettoria unica che identifica il bacino. Se la cresta montuosa è tortuosa, il bordo tra i bacini è anch'esso tortuoso. In modo simile, i bacini del pendolo magnetico sono molto evidenti nelle regioni prossime ai punti

fissi stabili, ma diventano tortuosi nelle zone di bordo e nelle zone lontane. Una proprietà peculiare e importante di questi bacini è che, se facciamo uno zoom in una delle zone di bordo, la distribuzione dei colori non si semplifica ma, al contrario, mantiene la stessa frammentazione e complessità ad ogni scala: colori diversi si alternano tra pixel vicini anche se facciamo tendere la dimensione dei pixel a zero, mantenendo traccia di strutture regolari a tutti i livelli di zoom, ma impedendo di identificare in modo univoco il bordo tra i bacini. Una struttura complessa di questo tipo, con caratteristiche di self-similarità a tutte le scale, si chiama struttura *frattale*, e nel caso del pendolo magnetico si dirà che il sistema ammette bacini con bordi frattali (fractal basin boundaries). L'esistenza di bacini con bordo frattale è un'altra delle caratteristiche peculiari dei sistemi caotici.

La conseguenza diretta della struttura frattale dei bacini di attrazione del pendolo magnetico è che, una volta scelto il punto (x, y) di partenza del moto, che non sia vicino a una delle calamite, la predizione su quale sarà la calamita di arrivo della traiettoria non può essere affidabile, e rimane inaffidabile anche quando l'incertezza su x e y viene ridotta a piacere. Se poi aggiungiamo anche l'incertezza sulla velocità iniziale della sferetta, allora l'esito del lancio, ovvero su quale calamita la sferetta si arresta, diventa ancor meno predicibile e, anzi, apparirà del tutto casuale.

A questo punto, lo studente attento si sarà chiesto quali siano le equazioni del moto del pendolo e da quale caratteristica di queste equazioni derivi il comportamento caotico. Per scrivere le equazioni basta sapere che l'attrazione tra una sferetta di metallo e una calamita è rappresentabile tramite una forza $F_{\text{mag}} \propto \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, dove \mathbf{r} è la posizione relativa. Se la lunghezza dell'asta è molto maggiore della distanza tra la sferetta e il piano delle calamite, possiamo anche applicare l'approssimazione di piccoli angoli e il moto della sferetta è approssimabile con un moto su un piano orizzontale a distanza fissa d dal piano delle calamite. Questo ci permette di usare il teorema di Pitagora nell'espressione della distanza dalle calamite. Se il punto $(0, 0)$ è il centro del triangolo, sulla verticale del pendolo, e le calamite si trovano in (x_i, y_i) con $i = 1, 2, 3$, allora l'equazione del moto per $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ diventa

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \beta \sum_{i=1}^3 \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{g}{l}x &= 0 \\ \ddot{y} + \gamma\dot{y} + \beta \sum_{i=1}^3 \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{g}{l}y &= 0, \end{aligned} \quad (128)$$

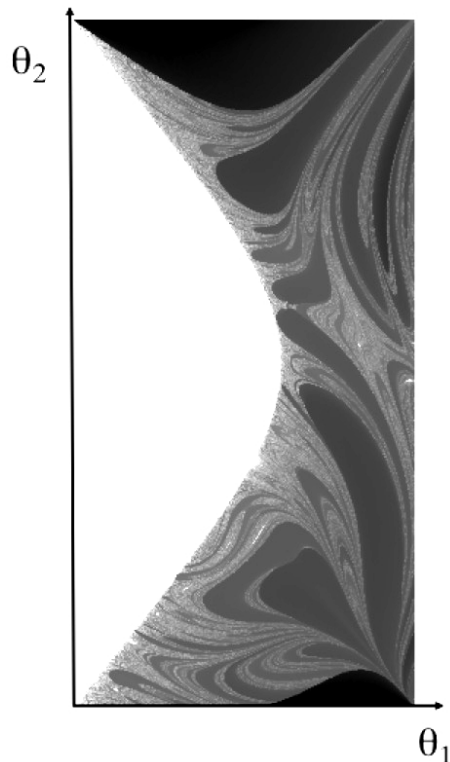
con β e γ sono costanti. Si vede così che le equazioni sono accoppiate e non-lineari, la non-linearità essendo dovuta alla forza magnetica. Senza le

calamite il moto sarebbe la combinazione lineare di due oscillatori smorzati indipendenti, uno lungo x l'altro lungo y .

Strutture frattali si trovano un po' ovunque nei sistemi caotici, e non necessariamente ai bordi di bacini di attrazione. Ad esempio, possiamo tornare al doppio pendolo descritto dalle equazioni (126) e immaginare di compiere un esperimento ideale come quello descritto precedentemente: lasciamo andare il pendolo da fermo a partire da una posizione iniziale individuata da due angoli (θ_1, θ_2) assegnati, e vediamo cosa succede. Le equazioni però non contengono termini dissipativi e, quindi, l'energia meccanica si conserva e il pendolo non si ferma mai. Ciò significa che non possiamo usare i punti fissi per caratterizzare le diverse traiettorie; dobbiamo trovare qualche alternativa. Ad esempio, notiamo che la massa 2 ogni tanto compie un giro completo. Contare i giri completi non aiuta, dato che il moto prosegue all'infinito. Possiamo invece misurare il tempo che passa dall'inizio del moto fino all'istante t^* al quale l'angolo θ_2 assume il valore $\pm\pi$ per la prima volta. Facciamo la stessa cosa per ogni coppia di angoli (θ_1, θ_2) iniziali e poi disegniamo la funzione $t^*(\theta_1, \theta_2)$ così ottenuta. Il risultato è mostrato nella figura seguente (la figura è tratta da un testo disponibile in rete di Alex Small, *Sample Final Project: One Signature of Chaos in the Double Pendulum*, 2013). L'angolo θ_1 va da 0 a $\pi - 0.01$, mentre θ_2 va da $-\pi + 0.01$ a $\pi - 0.01$. Il tempo di attesa t^* è rappresentato dalla scala di grigi, in modo che il bianco indica un tempo t^* superiore al tempo di simulazione (nessun giro completo osservato), mentre il nero rappresenta un tempo t^* molto breve. Nella figura la scala del tempo è logaritmica, in base 10, e va da t^* dell'ordine di $0.02T$ a circa $500T$, dove $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ è il tempo caratteristico di un singolo pendolo.

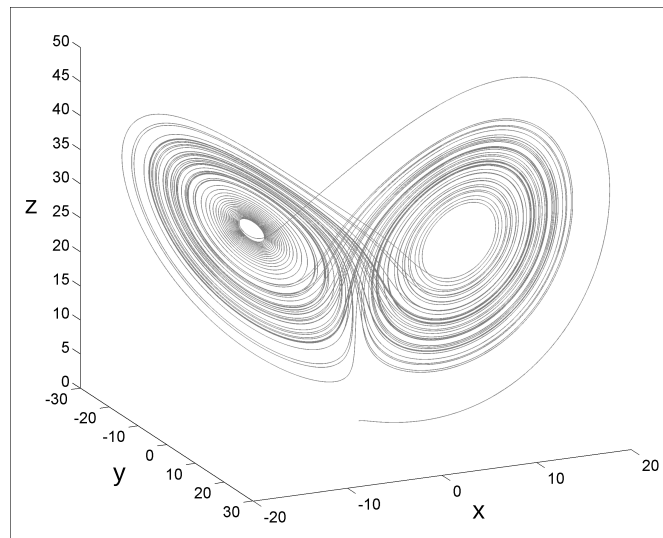
La zona uniformemente bianca corrisponde ad angoli iniziali per i quali il pendolo non compie mai giri completi. Questa zona, ovviamente, è più ampia attorno alla configurazione verticale $\theta_1 = \theta_2 = 0$; la sua forma è determinata dalla conservazione dell'energia meccanica e può essere ricavata in modo analitico. Anche le due zone nere in alto e in basso sono facili da capire: la massa 2 si trova fin dall'inizio molto vicina all'angolo $\theta_2 = \pm\pi$ e può oltrepassarlo rapidamente, senza compiere un giro completo. Ma la caratteristica principale della figura è piuttosto la parte esterna alle regioni bianche e nere, che ha una struttura frattale. Partendo da un punto (θ_1, θ_2) appartenente a questa regione non è praticamente possibile predire quando avverrà il primo giro completo, perché anche una variazione infinitesima della posizione iniziale può portare ad una grande variazione del tempo di attesa.

Una struttura frattale può emergere dall'osservazione diretta delle orbite seguite da un sistema a tempi lunghi. Questo è il caso, ad esempio, del modello di Lorenz descritto all'inizio di questo capitolo. Infatti, indipendentemente dai valori iniziali delle variabili (x, y, z) , le traiettorie dopo un



transiente relativamente breve finiscono per concentrarsi in due strutture vagamente circolari, collegate tra loro e disposte ad un angolo particolare nello spazio tridimensionale, come in figura. Questa zona dove le traiettorie si concentrano è detta *attrattore* e, se l'attrattore ha una struttura frattale, come nel modello di Lorenz, allora viene detto *attrattore strano*. Individuare gli attrattori strani è un altro modo per caratterizzare i sistemi dinamici caotici.

Qui ci fermiamo, perché l'approfondimento della teoria del caos va oltre lo scopo di queste lezioni. Quanto fatto dovrebbe però essere sufficiente per capire che sistemi apparentemente semplici e con pochi gradi di libertà possono esibire un comportamento anche molto complicato. Una conseguenza è che l'osservazione empirica dei fenomeni, per quanto accurata, spesso non basta a comprendere le cause di ciò che vediamo, dato che manca una connessione semplice tra l'evoluzione osservata e le cause iniziali che l'hanno prodotta. Un'altra conseguenza, complementare alla prima, è che non basta avere a disposizione le equazioni classiche e deterministiche che descrivono un sistema per essere certi di poter fare predizioni efficaci e utili riguardo alla sua evoluzione futura. Questo vale per meteorologo che, malgrado gli sforzi e i modelli raffinati, non può fornire predizioni accurate oltre pochi giorni da



oggi, perché la natura stessa glielo impedisce, ma vale anche per chi vuole semplicemente predire le oscillazioni di pendoli o le deformazioni di catene di oscillatori non-lineari come quelle che abbiamo discusso in queste pagine.

Scopo di queste lezioni era quello di mettere in connessione la meccanica newtoniana appresa al primo anno di università con alcune nozioni matematiche apprese nei corsi di analisi e geometria svolti in parallelo. In particolare, ho usato gli oscillatori lineari e non-lineari come filo conduttore di un discorso in cui intervengono, di volta in volta, l'algebra dei vettori e delle matrici in spazi N -dimensionali, le serie di Fourier e le equazioni differenziali alle derivate parziali. Nei corsi degli anni successivi, lo studente avrà modo di ritrovare lo stesso formalismo in altri contesti, ma penso sia utile cogliere fin dall'inizio l'importanza di mettere in relazione le nozioni acquisite in matematica e in fisica, non solo perché questo semplifica la soluzione dei problemi fisici una volta trovato un modello che descrive la natura, ma anche perché la scelta stessa dello strumento matematico da utilizzare nell'affrontare i problemi può migliorare notevolmente la nostra capacità di intuire nuove soluzioni, mettendo la natura stessa sotto una nuova luce.