

Dimostrazioni che potrebbero essere chieste all'esame.

1. Sia $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ un insieme di automorfismi del campo E . Dimostrare che $|E : E^G| \geq n$.
2. Sia F un campo e $f \in F[x]$ un polinomio irriducibile con $\deg(f) \geq 1$. Assumiamo che f non è separabile. Provare che $f' = 0$ e che la caratteristica di F è un primo $p > 0$.
3. Sia E/F un'estensione di campi, di grado finito. Assumiamo che E/F sia di Galois; provare che E/F è un'estensione normale e separabile.
4. Sia E/F un'estensione di Galois con $|E : F|$ finito. Scriviamo $G = \text{Gal}(E/F)$, e sia H un sottogruppo di G . Supponiamo che H è un sottogruppo normale. Provare che K/F è un'estensione di Galois, dove $K = E^H$.
5. Sia E/\mathbb{Q} il campo di spezzamento di $x^n - 1$. Provare che $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
6. Sia n un intero positivo, e F un campo di caratteristica zero, che contiene una radice primitiva n -esima dell'unità. Sia E/F una estensione con $E = F(\alpha)$ per un certo $\alpha \in E$ con $\alpha^n \in F$, e supponiamo che n sia minimale con questa proprietà. Dimostrare che E/F è una estensione di Galois, e che $\text{Gal}(E/F)$ è un gruppo ciclico di ordine n .