Dimostrazioni che potrebbero essere chieste all'esame.

1. Sia F un campo e $f \in F[x]$ un polinomio irriducibile. Assumiamo che f non è separabile. Provare che $f' = 0$ e che la caratteristica di F è un primo $p > 0$.

2. Sia E un campo, G un sottogruppo finito di $\mathrm{Aut}(E)$, e $F = E^G$.

   (a) Sia $\alpha \in E$ e $A_\alpha = \{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in G\}$; dimostrare che il polinomio minimo di α su F è
   $$\prod_{\beta \in A_\alpha} (x - \beta).$$

   (b) Dimostrare che E/F è di Galois e che $|E : F| = |G|$.

3. Sia E/F un'estensione di Galois con $|E : F|$ finito. Scriviamo $G = \mathrm{Gal}(E/F)$, a sia H un sottogruppo di G. Supponiamo che H è un sottogruppo normale e sia $K = E^H$.

   - Provare che K è stabile.
   - Provare che K/F è un'estensione di Galois.

4. Sia $E/\mathbb{Q}$ il campo di spezzamento di $x^n - 1$. Provare che $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. (Si può usare che $E = \mathbb{Q}(\zeta)$ dove ζ è una radice primitiva n-esima dell'unità, e che Φ_n è il polinomio minimo di ζ.)

5. Sia F un campo, e $f \in F[x]$ un polinomio irriducibile e separabile. Sia K/F un campo di spezzamento di f. Sia D il discriminante de f.

   - Dimostrare che $D \in F$.
   - Dimostrare che $\mathrm{Gal}(K/F)$ è isomorfo ad un sottogruppo di A_n se e solo se D è un quadrato in F.