Teoria di Galois: Esercizi 3

1. Sia E/F una estensione di Galois e scriviamo $G = \mathrm{Gal}(E/F)$. Siano K_1, K_2 campi intermedi (cioè $F \subset K_1, K_2 \subset E$) che corrispondono a sottogruppi H_1, H_2 di G. Quini per $i = 1, 2$ abbiamo

$$K_i = E^{H_i} \text{ e } H_i = \mathrm{Gal}(E/K_i).$$

Sia $\sigma \in G$. Vogliamo dimostrare che $\sigma(K_1) = K_2$ se e solo se $\sigma H_1 \sigma^{-1} = H_2$.

   (a) Assumiamo che $\sigma(K_1) = K_2$.

      i. Sia $\tau \in H_1$, $\alpha \in K_2$. Dimostrare che $\tau\sigma^{-1}(\alpha) = \sigma^{-1}(\alpha)$. Concludere che $\sigma H_1 \sigma^{-1} \subset H_2$.

      ii. Osservare che $\sigma^{-1}(K_2) = K_1$. Concludere che $\sigma^{-1} H_2 \sigma \subset H_1$.

      iii. Dimostrare che $\sigma H_1 \sigma^{-1} = H_2$.

   (b) Assumiamo che $\sigma H_1 \sigma^{-1} = H_2$.

      i. Sia $\alpha \in K_1$ e $\tau \in H_2$. Osservare che si può scrivere $\tau = \sigma\pi\sigma^{-1}$ per un certo $\pi \in H_1$ e dimostrare che quindi $\tau\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha)$. Concludere che $\sigma(K_1) \subset K_2$.

      ii. Dimostrare che $\sigma^{-1} H_2 \sigma = H_1$ e che quindi $\sigma^{-1}(K_2) \subset K_1$.

      iii. Dimostrare che $\sigma(K_1) = K_2$.

2. Sia E/F una estensione di Galois di grado finito e $G = \mathrm{Gal}(E/F)$. Siano H_1, H_2 due sottogruppi di G. Sia $K \subset E$ il più piccolo sottocampo di E che contiene E^{H_1} e E^{H_2} (in altre parole, K è l'intersezione di tutti i campi in E che contengono E^{H_1} e E^{H_2}).

   (a) Provare che $K \subset E^{H_1 \cap H_2}$.

   (b) Provare che $\mathrm{Gal}(E/K) \subset H_1 \cap H_2$.

   (c) Provare che $K = E^{H_1 \cap H_2}$.

3. Sia E/F una estensione di Galois di grado finito e $G = \mathrm{Gal}(E/F)$. Siano H_1, H_2 due sottogruppi di G. Sia H il più piccolo sottogruppo di G che contiene H_1, H_2 (in altre parole, H è l'intersezione di tutti i sottogruppi di G che contengono H_1 e H_2).

   (a) Provare che $E^H \subset E^{H^1} \cap E^{H_2}$.

   (b) Sia $K = E^{H_1} \cap E^{H_2}$. Provare che $H_i \subset \mathrm{Gal}(E/K)$ per $i = 1, 2$.

   (c) Concludere che $H \subset \mathrm{Gal}(E/K)$.

   (d) Provare che $E^H = E^{H_1} \cap E^{H_2}$.

4. Per $n = 5, 8, 9$ sia E_n il campo di spezzamento di $x^n - 1$ su $\mathbb{Q}$. Sappiamo che $E_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ dove ζ_n è una radice primitiva n-esima dell'unità. Sappiamo che il suo polinomio minimo è Φ_n.

   (a) Calcolare Φ_n.

   (b) Calcolare una tavola di moltiplicazione di $\mathrm{Gal}(E_n/\mathbb{Q})$.

   (c) Trovare tutti i sottogruppi di $\mathrm{Gal}(E_n/\mathbb{Q})$ e i campi intermedi corrispondenti.