Teoria di Galois: Esercizi 4

1. Sia $E = \mathbb{Q}(\zeta)$ il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di $x^5 - 1$, dove ζ è una radice primitiva 5-esima dell'unità. Scriviamo $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, con $\sigma_i(\zeta) = \zeta^i$. Allora $H = \{\sigma_1, \sigma_4\}$ è un sottogruppo di G e sia $K = E^H$.

   (a) Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(\zeta^2 + \zeta^3)$.

   (b) Descrivere gli elementi dei gruppi $\mathrm{Gal}(E/K)$, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ in termini degli elementi di G. (Uno è un sottogruppo, l'altro un quoziente di G.)

   (c) Scriviamo $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{1, \tau\}$ dove $\tau^2 = 1$. Dimostrare che per ogni $\beta \in K$ con $\tau(\beta) = -\beta$ abbiamo $\beta^2 \in \mathbb{Q}$ e $K = \mathbb{Q}(\beta)$. Trovare un tale β.

   (d) Scriviamo $\mathrm{Gal}(E/K) = \{1, \pi\}$ con $\pi^2 = 1$. Dimostrare che per ogni $\gamma \in E$ con $\pi(\gamma) = -\gamma$ abbiamo $\gamma^2 \in K$ e $E = K(\gamma)$. Trovare un tale γ.

   (e) Trovare un omomorfismo iniettivo $\psi : K \to \mathbb{C}$ (N.B.: un tale omomorfismo è completamente determinato da $\psi(\beta)$).

   (f) Trovare un omomorfismo iniettivo $\phi : E \to \mathbb{C}$ con $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ per ogni $\alpha \in K$. (N.B.: un tale omomorfismo è completamente determinato da $\phi(\gamma)$).

   (g) Trovare una espressione radicale (cioè usando operazioni aritmetiche e $\sqrt[n]{\ }$) per una 5-esima radice primitiva dell'unità in $\mathbb{C}$.