Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)

10 febbraio 2003

1. Calcolare l'integrale

$$\int_{C\cup S} (x^2+y^2)\, dxdydz$$

dove

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 + \sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le 2\}$$

e $S \subset \mathbf{R}^3$ è la sfera di raggio unitario centrata nel punto $(0,0,1)$.

2. Si consideri la superficie

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 2,\ y < 1\}$$

orientata in modo tale che il suo vettore normale nel punto $(0,0,\sqrt{2})$ coincida con $(0,0,1)$. Posto

$$F(x,y,z) := (xy, (y-1)e^{z^2}\cosh x, yz), \qquad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$$

si calcoli

$$\int_S \operatorname{rot} F \bullet dS.$$

Quanto vale tale integrale se si sceglie per S l'altra possibile orientazione?

3. Determinare $f(y)$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$ e

$$u(x,y) := f(y) - x^2 y$$

sia armonica. In seguito, determinare una funzione armonica coniugata ad u.

4. Data la funzione

$$f(x,y) := \ln(1+x^2+y^2), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado con "punto iniziale" in $(1,1)$. Calcolare il valore di tale polinomio in $(0,0)$.