Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)

30 giugno 2003

1. Si consideri la seguente curva in $\mathbf{R}^3$

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = 0, \ y > 0, \ y^2 - z^2 = 1\},$$

e sia S la superficie ottenuta ruotando la curva γ attorno all'asse z. Chiamiamo E la regione semplicemente connessa dello spazio delimitata da S. Posto

$$A = \{(x, y, z) \in E \ : \ xy \geq 0, \ 0 \leq z \leq 1\},$$

si calcoli

$$\int_A \frac{1}{1+z^2} \, dxdydz.$$

2. Sia $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definito da

$$F(x, y) := (x \arctan y, x), \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

e sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Si calcoli

$$\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dxdy.$$

3. Dimostrare che il campo di vettori

$$(x, y) \mapsto \left(\ln y - \frac{y}{x} \, , \, \frac{x}{y} - \ln x \right), \qquad (x, y) \in (0, +\infty)^2$$

soddisfa CIP. Determinarne il potenziale φ tale che $\varphi(1, 1) = 0$ e verificare che $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$.

4. Considerata la funzione

$$(x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x^2 + 2xy + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

verificare che si ha

$$\min_{S^1} f + \max_{S^1} f = 1.$$