

Diario del corso  
Analisi matematica IV unità didattica (compatta)  
a.a. 02/03

Silvano Delladio

**24/9/02, 2 ore.**

Introduzione agli integrali (di tutti i tipi). Notazione e interpretazione fisica (massa, lavoro, flusso) e geometrica (misura). La massa di un filo di cui sia assegnato il luogo geometrico occupato e la densità. Funzioni di due e tre variabili. Grafico di una funzione. Esempi relativi a grafici e proprietà di funzioni. Curve e parametrizzazioni. Esempi di parametrizzazione. Curve semplici, continue, derivabili, aperte, chiuse. Esempi ed esercizi.

**26/9/02, 2 ore.**

Parametrizzazioni diverse di una curva assegnata. Parametrizzazione del grafico di una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Derivata di una parametrizzazione derivabile:  $\dot{\gamma} := (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$ . Interpretazione fisica (velocità) e geometrica (vettore tangente). La miglior approssimazione del tipo  $h \mapsto \gamma(t) + hv$  ( $v$  vettore) della curva  $\gamma$ , vicino a  $\gamma(t)$ , si ha per  $v = \dot{\gamma}(t)$  (“parallelo” col caso delle funzioni derivabili). Retta tangente ad una curva derivabile parametrizzata da  $\gamma$ , in un suo punto  $\gamma(t)$  nell’ipotesi di regolarità  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ . Per parametrizzazioni regolari, tale definizione non dipende dalla parametrizzazione. Esempio di punto in cui la condizione di regolarità è verificata rispetto ad una parametrizzazione, ma non lo è rispetto ad altre parametrizzazioni. Definizione intrinseca di retta tangente ad una curva (in un punto). Approfondimento sulla massa del filo di cui siano assegnate la funzione densità  $f$  e la parametrizzazione  $\gamma$  del luogo geometrico occupato:

$$\text{massa del filo} \approx \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Esempi ed esercizi.

**30/9/02, 2 ore.**

Indipendenza di  $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$  dalla parametrizzazione, per parametrizzazioni equivalenti (cioè tali per cui esiste un cambiamento di variabile biiettivo e  $C^1$ ). Il caso particolare delle parametrizzazioni iniettive e  $C^1$ . Definizione di integrale di linea: se  $C$  è assegnata attraverso una parametrizzazione  $\gamma$  di classe  $C^1$ , allora:

$$\int_C f := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad \text{mis}(C) := \int_C 1 = \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Equazione di una superficie (in particolare, il grafico di una funzione  $f(x, y)$ ). Curve di livello. Introduzione ai campi vettoriali. Esempi ed esercizi.

**1/10/02, 2 ore.**

Esempi di campo vettoriale (in particolare: campo tangente a una curva, campo elettrico). Curva orientata (notazione  $\overline{C} = (C, \tau)$ ). Integrale lungo una curva orientata di un campo di vettori e sua interpretazione fisica (lavoro). Integrale d'area (o doppio) di una funzione  $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , in un "dominio di integrazione"  $D \subset \Omega$ , e sua interpretazione geometrica (volume del sottografico):

- mesh dicotomica nel piano, approssimazione interna  $A_i^{(k)}$  ("rossa") ed esterna  $A_e^{(k)}$  ("blu") del dominio  $D$ ;
- multiparallelepipedi approssimanti il sottografico di  $f$  dall'interno ("costruzione Lego rossa") e dall'esterno ("costruzione Lego blu"). I corrispondenti volumi costituiscono due successioni numeriche monotone  $\{\Sigma_i^{(k)}\}$  e  $\{\Sigma_e^{(k)}\}$  convergenti ai numeri  $V_i$  e  $V_e$ , rispettivamente;
- Definizione: la funzione  $f$  si dice integrabile in  $D$  se  $V_i = V_e$ . In tal caso si pone  $\int_D f := V_i = V_e$ .

Esempi ed esercizi.

**3/10/02, 2 ore.**

Proprietà dell'integrale doppio: additività nel dominio e linearità. Significato intuitivo, discussione dell'enunciato e dimostrazione della prima parte del seguente risultato.

**Teorema.** Supponiamo che la funzione  $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  e l'insieme  $D \subset \mathbf{R}^2$  soddisfino le seguenti ipotesi:

- $f$  è continua;
- esiste  $k$  tale che  $D \subset A_e^{(k)} \subset \Omega$ ;
- $\text{mis}(A_e^{(k)} \setminus A_i^{(k)}) \rightarrow 0$ , per  $k \rightarrow \infty$ .

Allora  $f$  è integrabile in  $D$ . Inoltre se

- per ogni  $y$ , la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $D_y$  e la funzione  $y \mapsto \int_{D_y} f(x, y) dx$  è integrabile in  $\mathbf{R}$

vale la formula

$$\int_D f = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{D_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Analogamente, se

- per ogni  $x$ , la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $D_x$  e la funzione  $x \mapsto \int_{D_x} f(x, y) dy$  è integrabile in  $\mathbf{R}$

si ha

$$\int_D f = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{D_x} f(x, y) dy \right) dx.$$

Integrale di volume (o triplo) di una funzione  $f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , in un “dominio di integrazione”  $D \subset \Omega$ , e sua interpretazione fisica (massa). Enunciato del risultato analogo a Teorema, per integrali tripli. Esempi ed esercizi.

### 7/10/02, 2 ore.

Dato un insieme  $D \subset \mathbf{R}^3$ , si definiscano

$$E := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y, z) \in D \text{ per qualche } z\} \quad (\text{“ombra di } D\text{”})$$

e

$$D_{(x,y)} := \{z \in \mathbf{R} \mid (x, y, z) \in D\}.$$

Allora, nelle ipotesi del teorema per integrali tripli enunciato nella lezione precedente, vale anche il seguente risultato:

- se per ogni  $(x, y)$  la funzione  $z \mapsto f(x, y, z)$  è integrabile in  $D_{(x,y)}$  e la funzione  $(x, y) \mapsto \int_{D_{(x,y)}} f(x, y, z) dz$  è integrabile in  $E$ , si ha

$$\int_D f = \int_E \left( \int_{D_{(x,y)}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Conclusione della dimostrazione di Teorema (3/10/02). Parametrizzazione di una superficie: introduzione ed esempi (in particolare: parametrizzazione del grafico di una funzione  $D \ni (x, y) \mapsto f(x, y)$ ). Esempi ed esercizi.

### 8/10/02, 2 ore.

Presentazione di tre situazioni interessanti in cui sia assegnata una mappa

$$\varphi : A \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (A \text{ aperto, } \varphi \text{ iniettiva e di classe } C^1),$$

e cioè:

- $k = 2, n = 3$  (parametrizzazione di una superficie);
- $k = 2, n = 2$  (trasformazione del piano, “cambiamento di variabili”);
- $k = 3, n = 3$  (trasformazione dello spazio, “cambiamento di variabili”).

Esempi (in particolare: coordinate polari, sferiche, cilindriche). Fattore di trasformazione  $J\varphi(P)$  della misura in un punto  $P \in A$ . Approssimazione discreta dell'integrale

$$\int_A f \circ \varphi J\varphi \quad (f : \varphi(A) \rightarrow \mathbf{R})$$

nelle tre situazioni precedenti. Conseguente "derivazione" e discussione (partendo dall'interpretazione dell'integrale, nella fattispecie di superficie, come massa) della seguente

Definizione ( $k=2, n=3$ ):  $\int_{\varphi(A)} f dS := \int_A f \circ \varphi J\varphi$ .

Dimostrazione (sketch), in base allo stesso argomento, del seguente risultato (cambiamento di variabile per gli integrali doppi e tripli).

**Teorema ( $k=n=2, k=n=3$ ).**  $\int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi J\varphi$ .

Verso il calcolo di  $J\varphi(P)$ : indicati con  $\mathbf{P}(\xi, \eta)$  e  $\mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta)$ , rispettivamente, il parallelogramma generato da  $\xi, \eta$  ( $\in \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ ) e il prisma generato da  $\xi, \eta, \zeta$  ( $\in \mathbf{R}^3$ ), si ha

- se  $\xi, \eta \in \mathbf{R}^3$  allora  $\text{mis}(\mathbf{P}(\xi, \eta)) = \|\xi \times \eta\|$ ;
- se  $\xi, \eta \in \mathbf{R}^2$  allora  $\text{mis}(\mathbf{P}(\xi, \eta)) = |\det [\xi \mid \eta]|$ ;
- se  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{R}^3$  allora  $\text{mis}(\mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta)) = \|\zeta \bullet (\xi \times \eta)\| = |\det [\xi \mid \eta \mid \zeta]|$ .

Conseguente dimostrazione (sketch) del

**Teorema.** Si ha

$$J\varphi(P) = \begin{cases} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(P) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(P) \right\| & (\text{per } k=2, n=3) \\ |\det D\varphi(P)| & (\text{per } k=n=2 \text{ e } k=n=3) \end{cases}$$

Esempi ed esercizi.

### 10/10/02, 2 ore.

Ulteriore discussione delle ipotesi richieste nella definizione di integrale di una funzione su una superficie e nel teorema di cambiamento delle variabili per integrali doppi e tripli. Misura di una superficie  $\Sigma$  di cui sia data una parametrizzazione  $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$  (iniettiva, regolare, eccetera):

$$\text{mis}(\Sigma) := \int_{\Sigma} 1 dS = \int_A J\varphi.$$

Discussione di tale definizione:

- “test di coerenza” rispetto a fatti noti: misura del rettangolo, misura del cilindro, misura della sfera;
- il numero  $\text{mis}(\Sigma)$  non coincide con l'estremo superiore delle aree delle superfici poliedrali inscritte in  $\Sigma$  che vale quasi sempre  $+\infty$ : esempio di Schwarz.

Calcolo del fattore di trasformazione  $J\varphi(P)$  della misura in qualche caso notevole. Esempi ed esercizi.

**14/10/02, 2 ore.**

Complementi su integrali di superficie:

- fattore di trasformazione per una superficie parametrizzata come grafico di una funzione  $f$  ( $J\varphi = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$ );
- estensione dell'integrale di superficie al caso di una superficie liscia a pezzi.

Introduzione alle superfici orientabili e non orientabili. Nastro di Möbius. Superfici orientate (notazione:  $(\Sigma, N)$ ). Integrale di un campo vettoriale su una superficie orientata e sua interpretazione fisica (come flusso):

$$\int_{(\Sigma, N)} \overline{F} \bullet \overline{dS} := \int_{\Sigma} F \bullet N \, dS.$$

Calcolo della normale ad una superficie parametrizzata da  $\varphi$ :

$$N(\varphi(u_0, v_0)) = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)}{J\varphi(u_0, v_0)}$$

e conseguente formula per l'integrale di un campo su una superficie orientata parametrizzata da  $\varphi$ :

$$\int_{(\Sigma, N)} \overline{F} \bullet \overline{dS} = \pm \int_A (F \circ \varphi) \bullet \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Commenti e precisazioni sulla nozione di “campo normale” ad una superficie. Vettori tangenti ad una superficie. Esempi ed esercizi.

**15/10/02, 2 ore.**

Enunciato “impreciso” del teorema di Gauss della divergenza in  $\mathbf{R}^3$ . Esempio di verifica dell'uguaglianza. Insiemi semplici: un insieme  $D \subset \mathbf{R}^3$  si dice

“semplice” se nelle direzioni degli assi coordinati esso è compreso fra grafici di funzioni lisce a pezzi, cioè

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a(x, y) \leq z \leq b(x, y), (x, y) \in \Omega_D'''\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid c(x, z) \leq y \leq d(x, z), (x, z) \in \Omega_D''\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid e(y, z) \leq x \leq f(y, z), (y, z) \in \Omega_D'\} \end{aligned}$$

dove  $\Omega_D'$ ,  $\Omega_D''$ ,  $\Omega_D'''$  sono le “ombre” di  $D$ , rispettivamente nei piani coordinati  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  mentre  $a, b : \Omega_D''' \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $c, d : \Omega_D'' \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $e, f : \Omega_D' \rightarrow \mathbf{R}$  sono funzioni lisce a pezzi. Precisazione dell’enunciato del teorema della divergenza:

**Teorema.** Se  $D$  è unione finita di insiemi semplici ed  $F$  è un campo di classe  $C^1$  in  $\overline{D}$ , allora

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \bullet N \, dS$$

dove  $N$  è il campo normale “esterno” a  $\partial D$ .

Note sulla dimostrazione:

Step 1. Per  $D$  semplice;

Step 2. Per  $D$  unione di insiemi semplici.

QED

Lo stesso teorema (con la stessa dimostrazione) vale nel piano.

**21/10/02, 2 ore.**

Orientazione positiva della frontiera (se sufficientemente regolare) di un aperto del piano.

**Teorema (Green).** Nelle ipotesi del Teorema di Gauss 2D vale l’uguaglianza

$$\int_{\partial D} F \bullet ds = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dx \, dy$$

dove l’orientazione scelta per  $\partial D$  è quella positiva.

Orientazioni compatibili di una superficie e della sua frontiera.

**Teorema (Stokes).** Siano dati una superficie orientabile  $\Sigma$ , le cui ulteriori proprietà verranno specificate in seguito (vedasi Step 3, qui sotto), e un campo  $F$  di classe  $C^1(\overline{\Sigma})$ . Allora vale la seguente identità

$$\int_{(\partial\Sigma, \tau)} F \bullet ds = \int_{(\Sigma, N)} \operatorname{rot} F \bullet dS \quad (1)$$

dove le orientazioni scelte sono compatibili.

Note sulla dimostrazione:

Step 1. Sia  $\Sigma$  il grafico di una funzione  $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  di classe  $C^1(\overline{D})$ , dove  $D$  è un aperto con frontiera  $C^1$  a tratti orientata positivamente. Applicando il Teorema di Green, si trova che

$$\int_{(\partial\Sigma, \tau)} (iF_1) \bullet ds = \int_{(\Sigma, N)} \text{rot}(iF_1) \bullet dS$$

e analogamente

$$\int_{(\partial\Sigma, \tau)} (jF_2) \bullet ds = \int_{(\Sigma, N)} \text{rot}(jF_2) \bullet dS$$
$$\int_{(\partial\Sigma, \tau)} (kF_3) \bullet ds = \int_{(\Sigma, N)} \text{rot}(kF_3) \bullet dS.$$

Sommando si ottiene allora l'uguaglianza (1). Si utilizza qui il seguente fatto (che sarà dimostrato in una delle lezioni successive): se  $\alpha : (a, b) \rightarrow \overline{D}$  è derivabile, allora anche  $f \circ \alpha$  è derivabile e si ha  $(f \circ \alpha)' = (\nabla f \circ \alpha) \bullet \dot{\alpha}$ .

Step 2. Siano  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  superfici soddisfacenti all'ipotesi di Step 1. Allora la (1) vale anche per  $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$ .

Step 3. (Conclusione) L'uguaglianza (1) vale per ogni superficie del tipo  $\Sigma = \bigcup_{n=1}^N \Sigma_n$ , dove le  $\Sigma_n$  sono come in Step 1 e hanno in comune, al più, pezzi di frontiera.

QED

Esempio di applicazione del Teorema di Stokes. Relazione fra conservazione dell'energia e irrotazionalità di un campo: qualche anticipazione.

**22/10/02, 2 ore.**

Interpretazione fisica della divergenza (di un campo) come "densità di flusso" e del rotore (di un campo) come "densità di energia". Esempi di applicazione dei teoremi di Gauss, Green e Stokes. Definizione di funzione differenziabile:  $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  si dice "differenziabile" in  $P_0$  (in  $D$  e di accumulazione per  $D$ ) se esiste  $v \in \mathbf{R}^n$  tale che

$$f(P) - f(P_0) = v \bullet (P - P_0) + o(\|P - P_0\|).$$

**Proposizione.** Se  $P_0$  è un punto interno di  $D$  e se  $f$  è differenziabile in  $P_0$ , allora esiste  $\nabla f(P_0)$  e si ha  $v = \nabla f(P_0)$ .

Osservazione: in generale, l'esistenza di  $\nabla f(P_0)$  non è condizione sufficiente per la differenziabilità di  $f$  in  $P_0$ . Tuttavia vale il seguente risultato.

**Teorema (del differenziale totale).** Se  $\nabla f$  esiste in un intorno di  $P_0$  ed è continuo in  $P_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $P_0$ .

**Corollario.** Se  $D$  è aperto e  $f \in C^1(D)$  allora  $f$  è differenziabile in tutti i punti di  $D$ .

**24/10/02, 2 ore.**

**Proposizione.** Sia  $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  differenziabile in  $P_0$  e sia  $\alpha : (a, b) \rightarrow D$  derivabile in  $t_0 \in (a, b)$ , con  $\alpha(t_0) = P_0$ . Allora  $f \circ \alpha$  è derivabile in  $t_0$  e si ha  $(f \circ \alpha)'(t_0) = \nabla f(\alpha(t_0)) \bullet \dot{\alpha}(t_0)$ .

Vale il seguente risultato (solo enunciato):

**Teorema (Schwarz).** Sia  $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  e sia  $P_0$  un punto interno di  $D$ . Se, fissati  $i$  e  $j$ , le derivate seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  esistono in un intorno di  $P_0$  e sono continue in  $P_0$ , allora esse coincidono in  $P_0$ .

Osservazione: se le ipotesi del teorema di Schwarz non sono soddisfatte, l'uguaglianza delle derivate miste può essere falsa (esempio di Peano).

Elementi di topologia. Definizione: un insieme aperto è detto "connesso" se esso non può essere dato come unione di due aperti, disgiunti e non vuoti. Esempi.

**Proposizione.** Per ogni coppia di punti in un (qualsiasi) aperto connesso, esiste una curva  $C^1$  a tratti che li congiunge.

Definizione: un insieme aperto  $\Omega$  è detto "semplicemente connesso" se ogni curva semplice e chiusa contenuta in esso può venir trasformata con continuità in un punto di  $\Omega$ , senza mai uscire da  $\Omega$  (accenno al concetto di omotopia). Esempi.

Campi conservativi (il campo  $F$  coinvolto avrà per dominio un aperto  $\Omega$  e sarà di classe  $C^1$ ). Definizione: una funzione  $\varphi \in C^2(\Omega)$  è detta "potenziale" di  $F$  se vale l'uguaglianza  $\nabla \varphi = F$  in  $\Omega$ .

Definizione: si dice che  $F$  "soddisfa la condizione delle derivate incrociate (CDI)" se

- nel caso di un campo in  $\mathbf{R}^2$ :  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$  (in  $\Omega$ );
- nel caso di un campo in  $\mathbf{R}^3$ :  $\text{rot} F = 0$  (in  $\Omega$ ).

Definizione: si dice che  $F$  "soddisfa la condizione dell'indipendenza dal percorso (CIP)" se il funzionale

$$C \mapsto \int_C F \bullet ds \quad (C \subset \Omega, \text{ curva } C^1 \text{ a tratti})$$

dipende soltanto dagli estremi  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , essendo  $\gamma$  la parametrizzazione di  $C$  e  $(a, b)$  l'intervallo dei parametri.

Presentazione del “quadro generale” dei risultati da provare sui campi conservativi (figura 1).

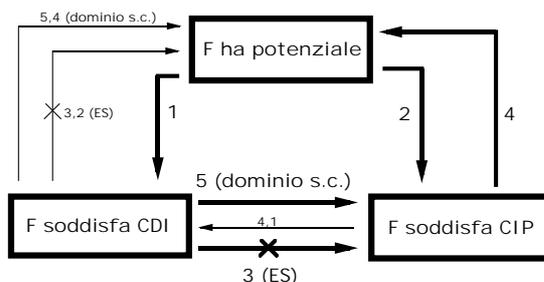


Figura 1: Qualche risultato sui campi conservativi (quadro generale)

Dimostrazione dei risultati “annunciati” nel quadro generale:

**Proposizione (1).** Se  $F$  ha un potenziale, vale CDI.

**Proposizione (ES 3).** CDI non implica, in generale, CIP (esempio:  $F(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$ ).

**28/10/02, 2 ore.**

Osservazione: l'implicazione (1) del quadro generale (vedasi lezione del 24/10/02) mostra “quanto sia facile” produrre campi non dotati di un potenziale (e.g.  $F(x, y) := (x, x)$ ).

**Proposizione.** Se  $\varphi$  è un potenziale di  $F$  (anche solo continuo) e  $C$  è una curva orientata qualsiasi in  $\Omega$  (parametrizzata da  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ), allora si ha

$$\int_C F \bullet ds = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Interpretazione fisica: il lavoro compiuto da un campo dotato di potenziale, lungo una qualsiasi curva, uguaglia la differenza di potenziale.

Osservazione: in virtù della precedente proposizione, i campi dotati di potenziale vengono detti “conservativi”.

Conseguenze:

- vale l'implicazione (2) del quadro generale;

- su ogni componente connessa di  $\Omega$ , il potenziale è unico a meno di una costante arbitraria (che può cambiare da componente a componente).

Si è così ottenuto il seguente risultato.

**Proposizione.** Sia  $\Omega$  connesso. Se  $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$  soddisfano  $\nabla\varphi \equiv \nabla\psi$ , allora si ha  $\varphi - \psi \equiv \text{costante}$ . In particolare: una funzione in  $C^1(\Omega)$  con gradiente nullo è costante.

**Proposizione (4).** Se  $F$  (anche solo continuo) soddisfa CIP allora  $F$  ha potenziale. Esso è dato, su ogni componente connessa  $\Omega^*$  di  $\Omega$ , da

$$\varphi(P) = \int_C F \bullet ds \text{ (+ costante arbitraria)}$$

dove  $C \subset \Omega^*$  è una qualsiasi curva congiungente un punto fissato  $P_0$  a  $P$ .

**Proposizione (5).** Sia  $\Omega$  semplicemente connesso. Se  $F$  soddisfa CDI, allora esso soddisfa anche CIP.

Note sulla dimostrazione:

Step 1. Nel piano, per curve non intrecciate (si usa il Teorema di Green).

Step 2. Nel piano, per curve intrecciate (considerando gli archi di curva fra i punti di intersezione, ci si riporta facilmente a Step 1).

Per ottenere il risultato nello spazio, si replica la dimostrazione precedente usando il Teorema di Stokes al posto del Teorema di Green.

QED

**29/10/02, 2 ore.**

Esempi ed esercizi su campi conservativi.

**31/10/02, 2 ore.**

Richiami su numeri complessi, funzioni complesse, limiti di funzioni complesse. Ora e nel seguito  $f = u + iv$  è una funzione complessa avente come dominio un insieme aperto  $\Omega$ . Definizione:  $f$  si dice “derivabile” (oppure “olomorfa”) in  $z_0 \in \Omega$  se esiste il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

indicato in tal caso con  $f'(z_0)$ . Se  $f$  è derivabile in tutti i punti di  $\Omega$ , si dice che  $f$  è derivabile (oppure olomorfa) in  $\Omega$ .

**Proposizione I.** Sia  $f$  è derivabile in  $z_0 \in \Omega$ . Allora  $u, v$  sono derivabili parzialmente in  $z_0$  e vale la condizione di Cauchy-Riemann

$$(CCR) \quad \nabla v(z_0) = R \nabla u(z_0)$$

dove  $R$  indica l'operatore di rotazione di  $+\pi/2$ , cioè  $R(a, b) = (-b, a)$ . Inoltre si ha  $f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$ .

Viceversa le (CCR) implicano la derivabilità, purché  $u$  e  $v$  siano differenziabili. Vale infatti il seguente risultato (solo enunciato).

**Proposizione II.** Siano  $u, v$  sono differenziabili in  $z_0 \in \Omega$  (ciò è vero, per esempio, se  $\nabla u, \nabla v$  esistono in un intorno di  $z_0$  e sono continui in  $z_0$ . Vedasi lezione del 22/10/02) e supponiamo che valga (CCR) in  $z_0$ . Allora  $f$  è derivabile in  $z_0$ .

**Teorema.** Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- (A1)  $f$  è derivabile in  $\Omega$ ;
- (A2)  $f$  è derivabile infinite volte in  $\Omega$ ;
- (A3)  $u, v \in C^\infty(\Omega)$  e vale (CCR) in ogni punto di  $\Omega$ .

Note sulla dimostrazione:

(A1) $\Rightarrow$ (A2). Si può usare la formula di rappresentazione di Cauchy (descrizione sommaria).

(A2) $\Rightarrow$ (A3). Conseguenza di Proposizione I.

(A3) $\Rightarrow$ (A1). Conseguenza di Proposizione II.

QED

Complementi di calcolo differenziale: curve e superfici di livello. Sia  $\Omega$  un insieme aperto di  $\mathbf{R}^n$  ( $n = 1, 2$ ) e  $g \in C^1(\Omega)$ . Allora l'“insieme di livello  $C$ ” ( $C \in \mathbf{R}$ ) della funzione  $g$  è definito come segue:

$$I_C := \{P \in \Omega \mid g(P) = C\}.$$

Osservazione:  $I_C$  non è necessariamente una curva (nel caso  $n = 2$ ) oppure una superficie (nel caso  $n = 3$ ). Esempio ( $g \equiv 0$ ). Una condizione sufficiente affinché  $I_C$  sia una curva (se  $n = 2$ , ma un analogo risultato vale per  $n = 3$ ) è fornita dal seguente teorema.

**Teorema (della funzione implicita).** Supponiamo che si abbia

$$\nabla g(z_0) \neq 0, \quad z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$$

e poniamo  $C := g(z_0)$ . Allora esiste  $\gamma : (a, b) \rightarrow \Omega$  di classe  $C^1$  tale che:

- (1)  $z_0 = \gamma(d)$ , per un certo  $d \in (a, b)$ ;
- (2) in un intorno di  $z_0$ , l'insieme  $I_C$  è una curva parametrizzata da  $\gamma$ ;
- (3)  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  per ogni  $t \in (a, b)$ .

Note sulla dimostrazione (sketch):

Supponiamo che

$$\frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intervallo  $J \subset \mathbf{R}$  di centro  $x_0$  e una funzione  $\varphi \in C^1(J)$  tali che l'insieme di livello  $I_C$ , in un intorno di  $z_0$ , coincide col grafico di  $\varphi$ . Dunque in questo caso  $\gamma$  può venir definita come segue

$$\gamma : J \rightarrow \Omega, \quad t \mapsto (t, \varphi(t)).$$

Analogamente si procede se  $\frac{\partial g(z_0)}{\partial x} \neq 0$ .

QED

Come corollario si ottiene la seguente

**Proposizione.** Se  $\nabla g(z_0) \neq 0$  allora  $\nabla g(z_0)$  è ortogonale alla curva  $I_C$ , dove  $C = g(z_0)$ .

Note sulla dimostrazione:

facile conseguenza del teorema precedente e della formula di derivazione generalizzata per le funzioni composte (vedasi lezione del 24/10/02).

QED

Osservazione: un analogo risultato vale per le superfici di livello (nel caso  $n = 3$ ). Interpretazione fisica: ortogonalità del campo alle superfici equipotenziali. Interpretazione geometrica delle condizioni di Cauchy-Riemann: le curve di livello di  $u$  sono ortogonali alle curve di livello di  $v$ .

**4/11/02, 2 ore.**

Definizione:  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  ( $\Omega$  sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^2$ ) si dice "armonica" se  $u \in C^2(\Omega)$  e vale  $\Delta u \equiv 0$ .

**Proposizione.** Se  $f = u + iv$  è derivabile, allora  $u$  e  $v$  sono funzioni armoniche.

**Proposizione.** Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  ( $\Omega$  sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^2$ ) è armonica e se inoltre  $\Omega$  è semplicemente connesso, allora esiste  $v \in C^\infty(\Omega)$  tale che  $u + iv$

è derivabile. Tale funzione (armonica, per la proposizione precedente) è detta “coniugata” a  $u$  ed è potenziale di  $R\nabla u$ .

**Corollario.** Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  ( $\Omega$  sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^2$ ) è armonica, allora  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

Definizione (motivata mediante il consueto argomento della discretizzazione) dell’integrale complesso: se  $f = u + iv : \Omega \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  è una funzione complessa (anche solo continua) e  $C$  è una curva (in  $\Omega$ , con parametrizzazione  $C^1$  a tratti), si pone

$$\int_C f(z) dz := \int_C (u, -v) \bullet ds + i \int_C (v, u) \bullet ds.$$

Presentazione del “quadro generale” dei risultati da provare sulle funzioni olo- morfe (figura 2).

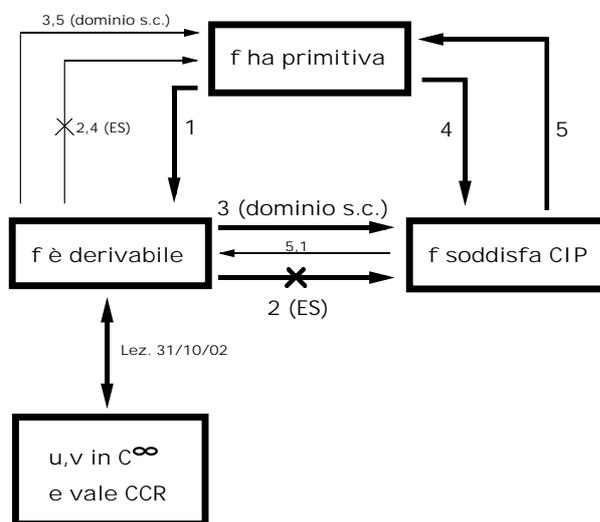


Figura 2: Qualche risultato sulle funzioni olomorfe (quadro generale)

Dimostrazione dei risultati “annunciati” nel quadro generale:

**Proposizione (1).** Se  $f$  ha primitiva allora essa è anche derivabile.

Note sulla dimostrazione: conseguenza immediata del teorema enunciato (e solo parzialmente dimostrato) nella lezione del 31/10/02.

QED

**Proposizione (ES 2).** La derivabilità di  $f$  non implica necessariamente che  $f$  soddisfi anche CIP.

Note sulla dimostrazione: la funzione

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad z \neq 0$$

è un esempio di funzione derivabile ma non soddisfacente a CIP. Infatti il campo  $(v, u)$ , integrando della parte immaginaria di  $\int_C f dz$  è proprio il campo presentato come ES. 3 nel contesto dei campi conservativi (lezione del 24/10/02). In particolare  $\int_C f dz \neq 0$  per ogni circonferenza centrata nell'origine.

QED

Tuttavia vale il seguente risultato.

**Proposizione (3).** Se  $\Omega$  è semplicemente connesso e  $f$  è derivabile, allora  $f$  soddisfa CIP.

Note sulla dimostrazione:

Grazie alla CCR soddisfatta da  $f$ , i campi  $(u, -v)$  e  $(v, u)$  soddisfano CDI e quindi (essendo  $\Omega$  semplicemente connesso) anche CIP.

QED

**Proposizione.** Se  $F = U + iV$  è una primitiva di  $f = u + iv$  e  $C$  è una curva in  $\Omega$  (parametrizzata da  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $C^1$  a tratti), allora si ha

$$\int_C f(z) dz = F(B) - F(A); \quad A := \gamma(a), B := \gamma(b).$$

Note sulla dimostrazione:

Si ha

$$(u, v) = (U_x, V_x)$$

per l'ipotesi di derivabilità e

$$(V_x, V_y) = (-U_y, U_x)$$

per la CCR. Quindi i campi integrandi in  $\int_C f dz$  sono  $(u, -v) = (U_x, U_y) = \nabla U$  e  $(v, u) = (V_x, V_y) = \nabla V$ . Da qui la tesi segue immediatamente ricordando una proposizione dimostrata il 28/10/02.

QED

Come conseguenza si ottiene subito l'implicazione 4 del quadro generale.

**Proposizione (4).** Se  $f$  ha primitiva, allora  $f$  soddisfa CIP.

Osservazione: se vale CIP, la notazione  $\int_C f(z) dz$  può venir sostituita da  $\int_A^B f(z) dz$ . Un uso "suggestivo" di questa notazione si ha nel seguente risultato (null'altro che una riformulazione di Proposizione) che, per ovvia analogia col caso reale, verrà riferito come il "Teorema fondamentale del calcolo in  $\mathbf{C}$ ":

Se  $F$  è derivabile, allora vale l'uguaglianza  $\int_A^B F'(z) dz = F(B) - F(A)$ .

**Proposizione (5).** Se  $f$  soddisfa CIP, allora  $f$  ha primitiva.

Note sulla dimostrazione:

I campi  $(u, -v)$  e  $(v, u)$  soddisfano CIP e quindi sono conservativi. Siano rispettivamente  $\varphi$  e  $\psi$  i potenziali. Allora  $F := \varphi + i\psi$  è derivabile (Proposizione II del 31/10/02) e si ha  $F' = \varphi_x + i\psi_x = f$ .

QED

Si ha il seguente risultato (lasciato per esercizio).

**Proposizione.** Sia  $f$  (anche solo continua) e sia  $C$  una curva in  $\Omega$  parametrizzata da  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  ( $C^1$  a tratti). Allora si ha

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

dove si sottintende la seguente definizione di integrale di  $\alpha + i\beta : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  ( $\alpha, \beta$  continue):

$$\int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t)) dt := \int_a^b \alpha(t) dt + i \int_a^b \beta(t) dt.$$

Esempi ed esercizi.

**5/11/02, 2 ore.**

Esempi ed esercizi su funzioni olomorfe.

**Teorema (Taylor).** Siano  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^2(\Omega)$  e  $P_0 \in \Omega$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} f(P) - \left\{ f(P_0) + \nabla f(P_0) \bullet (P - P_0) + \frac{1}{2} [H_f(P_0)(P - P_0)] \bullet (P - P_0) \right\} = \\ = o(\|P - P_0\|^2) \end{aligned}$$

dove  $H_f$  è l'Hessiano associato ad  $f$ , e cioè il campo di matrici simmetriche

$$Q \mapsto \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1}(Q) & f_{x_1 x_2}(Q) & \cdots \\ f_{x_2 x_1}(Q) & f_{x_2 x_2}(Q) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Note sulla dimostrazione:

Consideriamo un disco  $D \subset \Omega$  centrato in  $P_0$  (sia  $r$  il suo raggio). Fissato  $P \in D$ , definiamo

$$g(t) := f\left(P_0 + t \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|}\right), \quad t \in (-r, r).$$

Ricordando il teorema di derivazione delle funzioni composte, dimostrato nella lezione del 24/10/02, si vede facilmente che  $g \in C^2(-r, r)$  e anzi valgono le seguenti formule ( $t \in (-r, r)$ ):

$$g'(t) = \nabla f\left(P_0 + t \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|}\right) \bullet \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|}$$

$$g''(t) = \left[ H_f\left(P_0 + t \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|}\right) \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \right] \bullet \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|}.$$

Tenendo conto di queste e sostituendo  $t = \|P - P_0\|$  (osserviamo che  $\|P - P_0\| < r$ ) nella ben nota formula di Taylor unidimensionale

$$g(t) - \left[ g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 \right] = o(t^2)$$

si conclude.

QED

Osservazione: la funzione  $P \mapsto f(P_0) + \nabla f(P_0) \bullet (P - P_0)$  ha come grafico (lo spazio affine ottenuto traslando del vettore  $(P_0, f(P_0))$ ) lo spazio tangente a  $G_f$  in  $(P_0, f(P_0))$ . Infatti, supponendo per fissare le idee  $n = 2$  (ma il ragionamento rimane valido in generale!), si ha che  $G_f$  è l'insieme di livello 0 della funzione  $F(x, y, z) := f(x, y) - z$ . Ricordando quanto provato nella lezione del 31/10/02, si ottiene l'equazione del piano tangente a  $G_f$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] \bullet \nabla F(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = 0$$

e cioè proprio

$$z = f(P_0) + \nabla f(P_0) \bullet (P - P_0).$$

**6/11/02, 2 ore.**

Se  $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  è un operatore lineare, allora la funzione

$$Q_L(v) := (Lv) \bullet v, \quad v \in \mathbf{R}^n$$

è detta “forma quadratica associata a  $L$ ”. Osservazione:  $Q_L$  è continua e omogenea di grado 2 (e cioè, se  $c \in \mathbf{R}$ , si ha  $Q_L(cv) = c^2 Q_L(v)$  per ogni  $v$ ). Vale il seguente risultato.

**Teorema.** Se  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  è un operatore lineare simmetrico e

$$m := \min_{S^1} Q_L, \quad M := \max_{S^1} Q_L,$$

allora:

- (1) Se  $u_m$  e  $u_M$  sono rispettivamente un punto di minimo e un punto di massimo (per  $Q_L|_{S^1}$ ), si ha

$$Lu_m = mu_m, \quad Lu_M = Mu_M;$$

- (2) Esistono  $e_1$  e  $e_2$ , rispettivamente di minimo e di massimo (per  $Q_L|_{S^1}$ ), ortonormali.

Note sulla dimostrazione:

- (1) Se  $\tau$  è ortogonale a  $u_m$  con  $\|\tau\| = 1$ , allora la funzione

$$f(t) := Q_L\left(\frac{u_m + t\tau}{\|u_m + t\tau\|}\right) = \frac{Q_L(u_m) + 2t(Lu_m) \bullet \tau + t^2 Q_L(\tau)}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbf{R}$$

è derivabile e ha un minimo in 0. Quindi  $f'(0) = 0$ , cioè  $(Lu_m) \bullet \tau = 0$ . Esiste pertanto  $\lambda \in \mathbf{R}$  tale che  $Lu_m = \lambda u_m$ . Ma allora

$$\lambda = (\lambda u_m) \bullet u_m = (Lu_m) \bullet u_m = Q_L(u_m) = m.$$

Lo stesso ragionamento si applica al punto di massimo  $u_M$ .

- (2) Si distingue il caso  $m < M$  dal caso  $m = M$ .

Nel primo caso: si sceglie come  $e_1$  un punto di minimo e come  $e_2$  un punto di massimo (per  $Q_L|_{S^1}$ ). Ricordando (1), si ottiene facilmente l'ortogonalità  $e_1 \bullet e_2 = 0$ . Infatti:

$$m(e_1 \bullet e_2) = (Le_1) \bullet e_2 = e_1 \bullet (Le_2) = M(e_1 \bullet e_2).$$

Nel secondo caso: ogni  $u \in S^1$  è contemporaneamente di minimo e di massimo. Come  $\{e_1, e_2\}$  basta quindi scegliere una qualsiasi coppia di vettori ortonormali.

QED

Osservazione: l'argomento dimostrativo utilizzato in (1) permette di provare lo stesso risultato in dimensione qualsiasi.

Osservazione: nella base  $\{e_1, e_2\}$ , l'operatore  $L$  è rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}$$

da cui ricaviamo subito il determinante e la traccia di  $L$ :

$$\det L = mM, \quad \text{tr } L = m + M.$$

Inoltre

$$Q_L(xe_1 + ye_2) = mx^2 + My^2.$$

Si vede così che:

- $\det L < 0 \Leftrightarrow m < 0 < M \Leftrightarrow$  esistono  $u, v \neq 0$  tali che  $Q_L(u) < 0$  e  $Q_L(v) > 0$  (e in tal caso  $Q_L$  è detta “indefinita”);
- $\det L > 0$  e  $\text{tr } L > 0 \Leftrightarrow M > m > 0 \Leftrightarrow Q_L(v) > 0$  per ogni  $v \neq 0$  (e si dice che  $Q_L$  è “definita positiva”);
- $\det L > 0$  e  $\text{tr } L < 0 \Leftrightarrow m < M < 0 \Leftrightarrow Q_L(v) < 0$  per ogni  $v \neq 0$  (e si dice che  $Q_L$  è “definita negativa”);
- $\det L = 0$  e  $\text{tr } L > 0 \Leftrightarrow m = 0$  e  $M > 0 \Leftrightarrow Q_L(v)$ , per  $v \neq 0$ , assume sia il valore zero che i valori positivi, non quelli negativi (e si dice che  $Q_L$  è “semidefinita positiva”);
- $\det L = 0$  e  $\text{tr } L < 0 \Leftrightarrow m < 0$  e  $M = 0 \Leftrightarrow Q_L(v)$ , per  $v \neq 0$ , assume sia il valore zero che i valori negativi, non quelli positivi (e si dice che  $Q_L$  è “semidefinita negativa”).
- (caso banale)  $\det L = \text{tr } L = 0 \Leftrightarrow m = M = 0 \Leftrightarrow Q_L(v) = 0$  per ogni  $v$  (e si dice che  $Q_L$  è “nulla”).

Applicazione allo studio della forma di  $G_f$ , vicino al punto  $(P_0, f(P_0))$  (dove  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto in  $\mathbf{R}^2$ ,  $P_0 \in \Omega$ ). Posto

$$T_{P_0}(P) := f(P_0) + \nabla f(P_0) \bullet (P - P_0)$$

vale la seguente (lezione del 5/11/02):

$$f(P) - T_{P_0}(P) = \|P - P_0\|^2 \left[ \frac{1}{2} Q_{H_f(P_0)} \left( \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \right) + \frac{o(\|P - P_0\|^2)}{\|P - P_0\|^2} \right].$$

Ne consegue che:

- Se  $Q_{H_f(P_0)}$  è definita positiva ( $M \geq m > 0$ ), poiché

$$f(P) - T_{P_0}(P) \geq \|P - P_0\|^2 \left[ \frac{m}{2} + \frac{o(\|P - P_0\|^2)}{\|P - P_0\|^2} \right]$$

si ha  $f(P) > T_{P_0}(P)$ , per ogni  $P$  in un intorno di  $P_0$  (diremo in tal caso che “ $G_f$  in  $(P_0, f(P_0))$  è convesso verso l’alto”).

- Se  $Q_{H_f(P_0)}$  è definita negativa ( $m \leq M < 0$ ), poiché

$$f(P) - T_{P_0}(P) \leq \|P - P_0\|^2 \left[ \frac{M}{2} + \frac{o(\|P - P_0\|^2)}{\|P - P_0\|^2} \right]$$

si ha  $f(P) < T_{P_0}(P)$ , per ogni  $P$  in un intorno di  $P_0$  (diremo in tal caso che “ $G_f$  in  $(P_0, f(P_0))$  è convesso verso il basso”).

- Se  $Q_{H_f(P_0)}$  è indefinita ( $m < 0 < M$ ), poiché

$$f(P_0 + te_1) - T_{P_0}(P_0 + te_1) = t^2 \left[ \frac{m}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2} \right] \quad (2)$$

e analogamente

$$f(P_0 + te_2) - T_{P_0}(P_0 + te_2) = t^2 \left[ \frac{M}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2} \right], \quad (3)$$

si ha che, in ogni intorno di  $P_0$ , esistono punti  $P$  in cui  $f(P) < T_{P_0}(P)$  e punti  $P$  in cui  $f(P) > T_{P_0}(P)$  (diremo in tal caso che “ $G_f$  in  $(P_0, f(P_0))$  è una sella”).

## 7/11/02, 2 ore.

Completamento della discussione iniziata il 6/11/02:

- Se  $Q_{H_f(P_0)}$  è semidefinita positiva ( $m = 0, M > 0$ ), allora dall’uguaglianza (3) del 6/11/02 si ricava che

$$f(P_0 + te_2) - T_{P_0}(P_0 + te_2) > 0, \quad \text{per } |t| \text{ piccolo.}$$

Pertanto

$G_f$  non può essere convesso verso il basso nel punto  $(P_0, f(P_0))$ .

Gli esempi seguenti mostrano che si possono invece presentare le altre situazioni:

- (convessità verso l'alto)  $f(x, y) := x^2 + y^4$ ,  $P_0 = (0, 0)$ ;
- (sella)  $f(x, y) := x^2 - y^4$ ,  $P_0 = (0, 0)$ .
- Se  $Q_{H_f(P_0)}$  è semidefinita negativa ( $m < 0$ ,  $M = 0$ ), allora dall'uguaglianza (2) del 6/11/02 si ricava che

$$f(P_0 + te_2) - T_{P_0}(P_0 + te_2) < 0, \quad \text{per } |t| \text{ piccolo.}$$

Pertanto

$G_f$  non può essere convesso verso l'alto nel punto  $(P_0, f(P_0))$ .

Gli esempi seguenti mostrano che si possono invece presentare le altre situazioni:

- (convessità verso il basso)  $f(x, y) := -x^2 - y^4$ ,  $P_0 := (0, 0)$ ;
- (sella)  $f(x, y) := -x^2 + y^4$ ,  $P_0 := (0, 0)$ .
- Se  $Q_{H_f(P_0)}$  è nulla ( $m = M = 0$ ), allora si possono presentare tutte le situazioni, come illustrano i seguenti esempi:
  - (convessità verso l'alto)  $f(x, y) := x^4$ ,  $P_0 := (0, 0)$ ;
  - (convessità verso il basso)  $f(x, y) := -x^4$ ,  $P_0 := (0, 0)$ ;
  - (sella)  $f(x, y) := x^3$ ,  $P_0 := (0, 0)$ ;

Esempi ed esercizi.