Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA IV UNITA' DIDATTICA (COMPATTA)

10 settembre 2007

1. Posto

$$S := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq (1+xy)^{1/2}\Big\}$$

provare che

$$\int_S (x+y)z\,dxdydz = 0.$$

2. Utilizzare l'uguaglianza provata nel Problema 1 e il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare il flusso (ascendente) del campo vettoriale

$$(x,y,z) \mapsto \big(z(x^2+y^2-1), z(x^2+y^2-1), xy\big)\,; \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso il grafico della funzione

$$(x,y) \mapsto (1+xy)^{1/2}; \qquad 0 \leq x^2+y^2 \leq 1.$$

3. Si consideri la famiglia di funzioni complesse di variabile complessa

$$f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z = x+iy \mapsto (\alpha+i)x - y$$

parametrizzata da $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare i valori del parametro α per cui è nullo l'integrale di f_α lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Verificare che per tali valori di α la funzione f_α è derivabile in $\mathbb{C}$.