Anno Accademico 2006-2007

CORSO ABILITANTE 600 ORE - SSIS
Diario

SILVANO DELLADIO

11 ottobre 2006

Teoria ingenua, "fatta coi ceci", dei numeri naturali: definizione di numero, addizione e moltiplicazione di numeri, proprietà algebriche.
TEOREMA: Il prodotto (della teoria ingenua) è commutativo.
Rappresentazione posizionale di un numero.

Costruzione di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, dando per scontata la teoria ingenua di $\mathbb{N}$.

18 ottobre 2006

Assiomi di Peano: enunciato, discussione ed esempi di modelli. Enunciato del teorema di isomorfismo.
Dimostrazione del teorema di isomorfismo, fatta eccezione per l'iniettività.

Accenni alla definizione di somma di numeri naturali e alle sue proprietà. L'elemento 0 è neutro per la somma.
Ordinamento dei numeri naturali.
Considerazioni sui seguenti risultati, ovvi nella "teoria ingenua" dei numeri naturali:

(i) Non esistono numeri naturali che precedono 0;
(ii) Lo 0 l'unico numero naturale che precede 1.

Il principio di induzione matematica. Esempio.
Rotazione di un angolo retto di un vettore. Applicazione: dimostrazione delle formule di addizione per le funzioni seno e coseno.

TEOREMA (di Pitagora). Un triangolo è rettangolo se e soltanto se vale l' identità pitagorica.

25 ottobre 2006

Esame dei contenuti di un manuale scolastico per il triennio dell'Istituto Tecnico Commerciale.

PROPOSIZIONE: due dati vettori u e v sono fra loro ortogonali se e solo se $F(u,v) := u_1v_1 + u_2v_2 = 0$.

Date: January 9, 2007.

Proprietà della funzione F:

(1) $F(u+v,w) = F(u,w) + F(v,w)$;
(2) $F(cu,v) = cF(u,v)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$;
(3) $F(u,v) = F(v,u)$ e quindi anche $F(w,u+v) = F(w,u) + F(w,v)$;
(4) $F(u,u) = \|u\|^2$.

Notazione: $u \bullet v := F(u,v)$ (prodotto scalare). Questa notazione è importante in quanto, evocando il prodotto dei numeri, agevola l'implementazione delle proprietà (1-4), che infatti assumono la seguente forma:

(1) $(u+v) \bullet w = u \bullet w + v \bullet w$;
(2) $(cu) \bullet v = c(u \bullet v)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$;
(3) $u \bullet v = v \bullet u$ e quindi anche $w \bullet (u+v) = w \bullet u + w \bullet v$;
(4) $u \bullet u = \|u\|^2$.

OSSERVAZIONE: $u \bullet v = 0$ non implica $u = 0$ oppure $v = 0$.

La seguente proposizione prova il carattere intrinseco del prodotto scalare.

PROPOSIZIONE: $u \bullet v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$ (θ è l'angolo compreso fra u e v).

Teoria analitica della retta. Confronto con la trattazione tradizionale.

Esempi: condizioni di parallelismo e di ortogonalità, distanza di un punto da una retta. Esercizi.

4 novembre 2006

PROPOSIZIONE: $\mathrm{area}(\mathbb{P}(u,v)) = |v \bullet Ru|$.

Definizione di determinante: $\det[u|v] := v \bullet Ru$.

Sistemi di equazioni lineari. Formulazione vettoriale del problema. Dimostrazione algebrica del Teorema di Cramer. Interpretazione e risoluzione grafica di un sistema di equazioni lineari in forma vettoriale. Dimostrazione geometrica del Teorema di Cramer.

Esercizi e applicazioni di geometria analitica 2D. Confronto con i metodi risolutivi tradizionali.

8 novembre 2006

Sezioni coniche. Costruzione di Dandelin per l'ellisse.

Sia Γ il cono di apertura $\pi/2$ e con vertice in u. Allora P appartiene a Γ se e solo se

$$\|u - P\|^2 = 2|(u-P) \bullet u|^2.$$

Senza rimetterci nulla (in termini di generalità dell'argomento dimostrativo), possiamo supporre

$$u = (0, \cos\theta, \sin\theta).$$

Ora se $P = (x, y, 0)$ si ha

$$u - P = (-x, \cos\theta - y, \sin\theta), \qquad (u-P) \bullet u = 1 - y\cos\theta$$

e quindi i punti $P = (x, y, 0)$ nell'intersezione di Γ col piano $z = 0$ soddisfano

$$x^2 - y^2 \cos(2\theta) + 2y \cos\theta = 1$$

che possiamo ovviamente interpretare come l'equazione di una curva nel piano xy. Indicando tale curva con γ_θ, ne segue che:

(i) $\gamma_{\pi/2}$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$;
(ii) $\gamma_{\pi/4}$ è la parabola $y = 2^{1/2} - 2^{1/2}x^2$;
(iii) se $\theta \in (0, \pi/4)$, allora $\cos(2\theta) > 0$ e γ_θ è un'iperbole;
(iv) se $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$, allora $\cos(2\theta) < 0$ e γ_θ è un'ellisse.

Matrici come operatori sui vettori. Se α, β sono i vettori riga e u, v i vettori colonna di una matrice M (di tipo 2×2), si definisce

$$MP = \begin{bmatrix} \alpha \\ \hline \beta \end{bmatrix} P := (\alpha \bullet P, \beta \bullet P), \qquad P = (x, y)$$

che equivale a

$$MP = \big[u|v\big]P := xu + yv, \qquad P = (x, y).$$

Sia ora M una matrice 2×2, $v \in \mathbf{R}^2$, $c \in \mathbf{R}$ e indichiamo con Γ la curva piana di equazione

$$MP \bullet P + v \bullet P = C, \qquad P = (x, y).$$

OSSERVAZIONE: Se

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad v = (e, f)$$

l'equazione precedente equivale a

$$ax^2 + dy^2 + (b + c)xy + ex + fy = C.$$

Quindi, senza perdere in generalità, d'ora in poi si può supporre che M sia simmetrica e cioè che $b = c$.

Vale la seguente

PROPOSIZIONE: Il vettore $2MP + v$ è ortogonale a Γ in P.

Questo segue immediatamente dal fatto che Γ è una curva di livello per la funzione

$$P \mapsto f(P) := MP \bullet P + v \bullet P$$

e che $\nabla f(P) = 2MP+v$. Una dimostrazione alternativa ed elementare è la seguente. Siano $P, Q \in \Gamma$, per cui

$$MP \bullet P + v \bullet P = MQ \bullet Q + v \bullet Q = c.$$

Ricordando che M è simmetrica, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= MP \bullet P + v \bullet P - MQ \bullet Q - v \bullet Q \\ &= MP \bullet P - MP \bullet Q + MP \bullet Q - MQ \bullet Q + v \bullet (P - Q) \\ &= MP \bullet (P - Q) + MQ \bullet (P - Q) + v \bullet (P - Q) \\ &= (MP + MQ + v) \bullet (P - Q). \end{aligned}$$

A questo punto si conclude dividendo per $\|P - Q\|$ e facendo tendere Q a P.
CVD

Osserviamo che la precedente Proposizione contempla anche il caso della retta, corrispondente alla scelta di M matrice nulla.

Applicazione a casi specifici di coniche (rette tangenti, normali).

15 novembre 2006

Esame di un manuale scolastico contenente un'esposizione approfondita di argomenti dell'algebra lineare (quali spazi vettoriali, trasformazioni lineari e affini, prodotto scalare) e applicazioni. Confronto dell'approccio proposto a lezione con quello contenuto nel manuale scolastico, in particolare in relazione all'interpretabilità delle "formule", in ognuno di questi approcci.

L'esempio delle similitudini. Approccio attraverso l'algebra lineare.

(i) DEFINIZIONE: Una trasformazione affine

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad P \mapsto MP + P_0$$

(M matrice, P_0 vettore traslazione) è detta "similitudine" se esiste $c > 0$ tale che

$$\|TP - TQ\| = c\|P - Q\|$$

per ogni $P, Q \in \mathbf{R}^2$. Tale uguaglianza equivale ovviamente alla seguente

$$\|MP\| = c\|P\| \tag{0.1}$$

per ogni $P \in \mathbf{R}^2$. Il numero c è detto "rapporto di similitudine".

(ii) OSSERVAZIONE: Una similitudine trasforma segmenti in segmenti. Infatti, se T è come in (i) e $P, Q \in \mathbf{R}^2$, allora si ha:

$$T(P + t(Q - P)) = P_0 + MP + t(MQ - MP) = TP + t(TQ - TP)$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Quindi il segmento PQ è trasformato da T nel segmento $T(P)T(Q)$.

(iii) PROPOSIZIONE: Se T è una similitudine, con rapporto di similitudine c, allora

$$\|Me_1\| = \|Me_2\| = c, \qquad Me_1 \bullet Me_2 = 0 \tag{0.2}$$

dove $e_1 := (1, 0)$ e $e_2 := (0, 1)$. Infatti (sorvolando sulla prima uguaglianza che è ovvia, per (0.1)) si ha

$$\begin{aligned} Me_1 \bullet Me_2 &= \frac{\|Me_1 + Me_2\|^2 - \|Me_1\|^2 - \|Me_2\|^2}{2} \\ &= \frac{\|M(e_1 + e_2)\|^2 - 2c^2}{2} \\ &= \frac{c^2(\|e_1 + e_2\|^2 - 2)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

per (0.1).

(iv) OSSERVAZIONE: Lo stesso argomento usato in (ii) serve a provare che una similitudine "conserva gli angoli".

(v) PROPOSIZIONE (viceversa di (iii)): Se $T : P \mapsto MP + P_0$ è una trasformazione affine e valgono le (0.2), allora T è una similitudine con rapporto di similitudine c. Infatti, se $P = (x, y) = xe_1 + ye_1 \in \mathbf{R}^2$, si ha

$$\|MP\|^2 \;=\; \|xMe_1 + yMe_2\|^2 = c^2(x^2 + y^2) = c^2\|P\|^2$$

ossia (0.1).

(vi) Relazione fra il rapporto di similitudine e $\det M$. Dalle uguaglianze (0.2) e ricordando la formula per l'area del parallelogramma dimostrata il 25 ottbre, si ottiene

$$|\det M| = \text{area}(\mathbb{P}(Me_1, Me_2)) = \|Me_1\|\,\|Me_2\| = c^2$$

e cioè

$$c = |\det M|^{1/2}.$$

Esercizi di riepilogo.

22 novembre 2006

Richiami su progressioni e serie geometriche. Dimostrazione della formula della somma con l'agglomerato di quadrati. Dimostrazione della finitezza della cardinalità dell'insieme dei numeri primi, via finitezza della serie geometrica di ragione q con $|q| < 1$.

PROPOSIZIONE: $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j! = \lim_{n\to+\infty}(1 + 1/n)^n$.

Il numero uguale ai due membri nell'uguaglianza della precedente proposizione è detto “numero di Nepero”e si indica con e.

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ possiamo definire la funzione $E(x) := \sum_{j=0}^{\infty} x^j/j!$. Osserviamo che $E(0) = 1$ e $E(1) = e$. Inoltre, si può provare che vale la seguente uguaglianza

$$E(x + y) = E(x)E(y) \tag{0.3}$$

per ogni $x, y \in \mathbf{R}$. In particolare

$$E(x)E(-x) = 1 \tag{0.4}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$, da cui segue subito che $E(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Da questo e da (0.3) si deduce facilmente che E è strettamente crescente e cioè che se $x < y$ allora $E(x) < E(y)$.

PROPOSIZIONE: Per ogni $x \in \mathbf{Q}$ si ha $E(x) = e^x$.

DIMOSTRAZIONE: In virtù di (0.4), basterà provare che $E(x) = e^x$ per ogni razionale positivo x. Basterà cioè provare che

$$E(p/q)^q = e^p$$

per ogni coppia p, q di interi positivi. Infatti, da (0.3) si ricava subito che

$$E\left(\frac{p}{q}\right)^q = E\left(\frac{p}{q}q\right) = E(p) = E(1)^p = e^p.$$

□

Dalla definizione di E segue anche facilmente che E è derivabile in $\mathbf{R}$ e si ha $E' = E$ (in particolare E è continua. A questo punto risulta naturale estendere la definizione della funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ come segue:

DEFINIZIONE: $e^x := E(x)$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Dalla monotonia di E, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Pertanto la funzione $E : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ è invertibile. La funzione inversa di questa è detta logaritmo in base e (o anche logaritmo neperiano) e si indica con ln.

Possiamo ora definire la funzione esponenziale di base a.

DEFINIZIONE: Se $a > 0$, si pone

$$a^x := e^{x \ln a} = E(x \ln a)$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

OSSERVAZIONE: Si vede subito che la funzione esponenziale di base a coincide con E se $a = e$. Inoltre

$$a^0 = 1, \qquad a^1 = a$$

e

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

per ogni $x, y \in \mathbf{R}$. Ancora dalle definizioni è facile provare che $(a^x)^y = a^{xy}$, per ogni $x, y \in \mathbf{R}$.

Esame di un manuale di matematica finanziaria per gli istituti tecnici commerciali, [1]. Interesse semplice e composto. Confronto fra diversi regimi di maturazione dell'interesse. Sulla frazione di periodo (a parità di tasso di interesse) l'interesse semplice prevale su quello composto.

6 dicembre 2006

Completamento esame del manuale [1]. Equivalenza finanziaria. Rendite.
Esempi ed esercizi.

13 dicembre 2006

Analisi matematica per funzioni reali di una variabile reale. Un quadro teorico con alcuni spunti didattici.

8 gennaio 2007

Esercizi di riepilogo.

References

[1] M. Trovato: *Matematica generale e applicata, Volume 1.* Ghisetti e Corvi Editori, Milano.