

Anno Accademico 2006-2007

DIARIO DEL CORSO SSIS
Didattica della matematica per la scuola superiore 1

SILVANO DELLADIO

10 ottobre 2006

Costruzione di \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , dando per scontato \mathbb{N} .

Teoria ingenua, “fatta coi ceci”, dei numeri naturali: definizione di numero, addizione e moltiplicazione di numeri, proprietà algebriche.

TEOREMA: Il prodotto (della teoria ingenua) è commutativo.

Rappresentazione posizionale di un numero.

Assiomi di Peano: enunciato, discussione ed esempi di modelli. Enunciato del teorema di isomorfismo.

17 ottobre 2006

Dimostrazione del teorema di isomorfismo.

Definizione di somma di numeri naturali e proprietà fondamentali. L'elemento 0 è neutro per la somma. Ordinamento dei numeri naturali. Accenni alla definizione di prodotto di numeri naturali e alle proprietà fondamentali. L'elemento $1 := \sigma(0)$ è neutro per il prodotto. Esempi di dimostrazioni di fatti che risultano ovvi nella “teoria naive” dei numeri interi:

- (i) Non esistono numeri naturali che precedono 0;
- (ii) Lo 0 l'unico numero naturale che precede 1.

Il teorema dell' induzione. Dimostrazione “topologica” del teorema fondamentale dell'Algebra.

Rotazione di un angolo retto di un vettore. Applicazione: dimostrazione delle formule di addizione per le funzioni seno e coseno.

TEOREMA (di Pitagora): un triangolo è rettangolo se e soltanto se vale l' identità pitagorica.

24 ottobre 2006

Date: November 15, 2006.

PROPOSIZIONE: due dati vettori u e v sono fra loro ortogonali se e solo se $F(u, v) := u_1v_1 + u_2v_2 = 0$.

Proprietà della funzione F :

- (1) $F(u + v, w) = F(u, w) + F(v, w)$;
- (2) $F(cu, v) = cF(u, v)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$;
- (3) $F(u, v) = F(v, u)$ e quindi anche $F(w, u + v) = F(w, u) + F(w, v)$;
- (4) $F(u, u) = \|u\|^2$.

Notazione: $u \bullet v := F(u, v)$ (prodotto scalare). Questa notazione è importante in quanto, evocando il prodotto dei numeri, agevola l'implementazione delle proprietà (1-4).

OSSERVAZIONE: $u \bullet v = 0$ non implica $u = 0$ oppure $v = 0$.

PROPOSIZIONE: $u \bullet v = \|u\| \|v\| \cos \theta$ (θ è l'angolo compreso fra u e v).

Teoria analitica della retta. Esempi: condizione di parallelismo, condizione di ortogonalità, distanza di un punto da una retta. L'area di un triangolo, che si ricava immediatamente dal seguente risultato.

PROPOSIZIONE: $\text{area}(\mathbb{P}(u, v)) = |v \bullet Ru|$.

Applicazione alla dimostrazione della formula della distanza punto-retta.

Esercizi.

Confronto con la trattazione tradizionale.

31 ottobre 2006

Sistemi di equazioni lineari. Formulazione vettoriale del problema, interpretazione e risoluzione grafica. Il metodo di Cramer: dimostrazione algebrica e dimostrazione geometrica.

Definizione di determinante: $\det[u|v] := v \bullet Ru$.

Risoluzione grafica delle equazioni trigonometriche lineari.

Esercizi e applicazioni di geometria analitica 2D. Confronto con i metodi risolutivi tradizionali.

Sezioni coniche. Costruzione di Dandelin per l'ellisse.

Sia Γ il cono di apertura $\pi/2$ e con vertice in u . Allora P appartiene a Γ se e solo se

$$\|u - P\|^2 = 2|(u - P) \bullet u|^2.$$

Senza rimetterci nulla (in termini di generalità dell'argomento dimostrativo), possiamo supporre

$$u = (0, \cos \theta, \sin \theta).$$

Ora se $P = (x, y, 0)$ si ha

$$u - P = (-x, \cos \theta - y, \sin \theta), \quad (u - P) \bullet u = 1 - y \cos \theta$$

e quindi i punti $P = (x, y, 0)$ nell'intersezione di Γ col piano $z = 0$ soddisfano

$$x^2 - y^2 \cos(2\theta) + 2y \cos \theta = 1$$

che possiamo ovviamente interpretare come l'equazione di una curva nel piano xy . Indicando tale curva con γ_θ , ne segue che:

- (i) $\gamma_{\pi/2}$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$;
- (ii) $\gamma_{\pi/4}$ è la parabola $y = 2^{1/2} - 2^{1/2}x^2$;
- (iii) se $\theta \in (0, \pi/4)$, allora $\cos(2\theta) > 0$ e γ_θ è un'iperbole;
- (iv) se $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$, allora $\cos(2\theta) < 0$ e γ_θ è un'ellisse.

7 novembre 2006

Sia M una matrice 2×2 , $v \in \mathbf{R}^2$, $c \in \mathbf{R}$ e indichiamo con Γ la curva piana di equazione

$$MP \bullet P + v \bullet P = c, \quad P = (x, y).$$

Senza perdere in generalità, d'ora in poi si può supporre che M sia simmetrica. Vale la seguente

PROPOSIZIONE: Il vettore $2MP + v$ è ortogonale a Γ in P .

Questo segue immediatamente dal fatto che Γ è una curva di livello per la funzione

$$P \mapsto f(P) := MP \bullet P + v \bullet P$$

e che $\nabla f(P) = 2MP + v$. Una dimostrazione alternativa ed elementare è la seguente. Siano $P, Q \in \Gamma$, per cui

$$MP \bullet P + v \bullet P = MQ \bullet Q + v \bullet Q = c.$$

Ricordando che M è simmetrica, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= MP \bullet P + v \bullet P - MQ \bullet Q - v \bullet Q \\ &= MP \bullet P - MP \bullet Q + MP \bullet Q - MQ \bullet Q + v \bullet (P - Q) \\ &= MP \bullet (P - Q) + MQ \bullet (P - Q) + v \bullet (P - Q) \\ &= (MP + MQ + v) \bullet (P - Q). \end{aligned}$$

A questo punto si conclude dividendo per $\|P - Q\|$ e facendo tendere Q a P .
CVD

Osserviamo che la precedente Proposizione contempla anche il caso della retta, corrispondente alla scelta di M matrice nulla.

Applicazione a casi specifici di coniche (rette tangenti, normali).

Matrici come operatori sui vettori. Se α, β sono i vettori riga e u, v i vettori colonna di una matrice M , si definisce

$$MP = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} P := (\alpha \bullet P, \beta \bullet P), \quad P = (x, y)$$

che equivale a

$$MP = [u|v]P := xu + yv, \quad P = (x, y).$$

Proprietà:

- (i) $P \mapsto MP$ è lineare;

(ii) la matrice identità così definita

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verifica l'uguaglianza

$$IP = P$$

per ogni P .

Algebra delle matrici. Se

$$M = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad N = [u|v]$$

allora si ha

$$\begin{aligned} (M \circ N)P &= M(NP) = M(xu + yv) = xMu + yMv \\ &= x(\alpha \bullet u, \beta \bullet u) + y(\alpha \bullet v, \beta \bullet v) \\ &= ((\alpha \bullet u)x + (\alpha \bullet v)y, (\beta \bullet u)x + (\beta \bullet v)y) \end{aligned}$$

cioè

$$(M \circ N)P = \begin{bmatrix} \alpha \bullet u & \alpha \bullet v \\ \beta \bullet u & \beta \bullet v \end{bmatrix} P.$$

Sulla base di questo risultato, sembra ora naturale definire la matrice “prodotto” $M \times N$ come segue

$$M \times N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \times [u|v] := \begin{bmatrix} \alpha \bullet u & \alpha \bullet v \\ \beta \bullet u & \beta \bullet v \end{bmatrix}.$$

sicché

$$M(NP) = (M \times N)P \tag{0.1}$$

per ogni P .

Proprietà del prodotto fra matrici:

- (i) $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$;
- (ii) il prodotto di matrici non è commutativo (in generale);
- (iii) $M \times I = I \times M = M$;
- (iv) se $\det M \neq 0$ si può trovare una (ed una sola) matrice N tale che

$$N \times M = I. \tag{0.2}$$

Per provarlo, consideriamo la rappresentazione di M per colonne

$$M = [u|v]$$

e cerchiamo

$$N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

tale che

$$N \times M = \begin{bmatrix} \alpha \bullet u & \alpha \bullet v \\ \beta \bullet u & \beta \bullet v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ossia

$$\alpha \bullet v = \beta \bullet u = 0, \quad \alpha \bullet u = \beta \bullet v = 1.$$

La prima uguaglianza sarà verificata se (e solo se)

$$\alpha = c_1 Rv, \quad \beta = c_2 Ru \quad (c_i \in \mathbf{R}).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché valga la seconda uguaglianza è allora che si abbia

$$c_1 Rv \bullet u = c_2 Ru \bullet v = 1$$

che equivale a

$$-c_1 \det M = c_2 \det M = 1.$$

Concludendo: la matrice

$$N = \begin{bmatrix} -Rv/\det M \\ Ru/\det M \end{bmatrix} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} -Rv \\ Ru \end{bmatrix}$$

soddisfa l'uguaglianza (0.2).

- (vi) La matrice N del punto (v) commuta nel prodotto con M . Essa è quindi detta “matrice inversa di M ” ed è indicata con la notazione M^{-1} . Riepilogando: se $\det M \neq 0$, allora la matrice

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -Rv/\det M \\ Ru/\det M \end{bmatrix}$$

soddisfa le uguaglianze

$$M^{-1} \times M = M \times M^{-1} = I$$

ed è l'unica a godere di questa proprietà.

Applicazione: risoluzione di un sistema lineare. Sia

$$MP = P_0$$

un sistema lineare dato in notazione matriciale e supponiamo che $\det M \neq 0$. Allora esso equivale a

$$M^{-1}(MP) = M^{-1}P_0$$

cioè

$$P = M^{-1}P_0$$

per (0.1) e (vi).

14 novembre 2006

Esame di un manuale scolastico contenente un'esposizione approfondita di argomenti dell'algebra lineare (quali spazi vettoriali, trasformazioni lineari e affini, prodotto scalare) e applicazioni. Confronto dell'approccio proposto a lezione con quello contenuto nel manuale scolastico, in particolare in relazione all'interpretabilità delle “formule”, in ognuno di questi approcci.

L'esempio delle similitudini. Approccio attraverso l'algebra lineare.

- (i) DEFINIZIONE: Una trasformazione affine

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad P \mapsto MP + P_0$$

(M matrice, P_0 vettore traslazione) è detta “similitudine” se esiste $c > 0$ tale che

$$\|TP - TQ\| = c\|P - Q\|$$

per ogni $P, Q \in \mathbf{R}^2$. Tale uguaglianza equivale ovviamente alla seguente

$$\|MP\| = c\|P\| \tag{0.3}$$

per ogni $P \in \mathbf{R}^2$. Il numero c è detto “rapporto di similitudine”.

- (ii) OSSERVAZIONE: Una similitudine trasforma segmenti in segmenti. Infatti, se T è come in (i) e $P, Q \in \mathbf{R}^2$, allora si ha:

$$T(P + t(Q - P)) = P_0 + MP + t(MQ - MP) = TP + t(TQ - TP)$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Quindi il segmento PQ è trasformato da T nel segmento $T(P)T(Q)$.

- (iii) PROPOSIZIONE: Se T è una similitudine, con rapporto di similitudine c , allora

$$\|Me_1\| = \|Me_2\| = c, \quad Me_1 \bullet Me_2 = 0 \quad (0.4)$$

dove $e_1 := (1, 0)$ e $e_2 := (0, 1)$. Infatti (sorvolando sulla prima uguaglianza che è ovvia, per (0.3)) si ha

$$\begin{aligned} Me_1 \bullet Me_2 &= \frac{\|Me_1 + Me_2\|^2 - \|Me_1\|^2 - \|Me_2\|^2}{2} \\ &= \frac{\|M(e_1 + e_2)\|^2 - 2c^2}{2} \\ &= \frac{c^2(\|e_1 + e_2\|^2 - 2)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

per (0.3).

- (iv) OSSERVAZIONE: Lo stesso argomento usato in (ii) serve a provare che una similitudine “conserva gli angoli”.

- (v) PROPOSIZIONE (viceversa di (iii)): Se $T : P \mapsto MP + P_0$ è una trasformazione affine e valgono le (0.4), allora T è una similitudine con rapporto di similitudine c . Infatti, se $P = (x, y) = xe_1 + ye_2 \in \mathbf{R}^2$, si ha

$$\|MP\|^2 = \|xMe_1 + yMe_2\|^2 = c^2(x^2 + y^2) = c^2\|P\|^2$$

ossia (0.3).

- (vi) Relazione fra il rapporto di similitudine e $\det M$. Dalle uguaglianze (0.4) e ricordando la formula per l'area del parallelogramma dimostrata il 25 ottobre, si ottiene

$$|\det M| = \text{area}(\mathbb{P}(Me_1, Me_2)) = \|Me_1\| \|Me_2\| = c^2$$

e cioè

$$c = |\det M|^{1/2}.$$

Esercizi di riepilogo.