DIARIO DEL CORSO
"TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA"
A.A. 08/09

SILVANO DELLADIO

18/02/09 (1-1). Presentazione generale del corso. Richiami di teoria astratta della misura. Definizione di misura. Monotonia di una misura. Esempi. La "misura" di Riemann non è una misura.

Riferimenti bibliografici: [3, §1.1]

25/02/09 (2-3). Richiami di teoria astratta della misura. La classe degli insiemi misurabili forma una σ-algebra [3, §1.1, Theorem 1]. Misure regolari, di Borel, Borel-regolari, di Radon.

Riferimenti bibliografici: [3, §1.1]

27/02/09 (2-5). Criterio di Caratheodory [3, §1.1, Theorem 5]. Definizione di misura di Hausdorff. La misura di Hausdorff è una misura di Borel [3, §2.1, Theorem 1].

Riferimenti bibliografici: [3, §1.1, §2.1]

03/03/09 (1-6). La misura di Hausdorff è Borel regolare [3, §2.1, Theorem 1]. Proprietà elementari della misura di Hausdorff [3, §2.1, Theorem 2]:

- $\mathcal{H}^0$ coincide con la misura del conteggio;
- $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ in $\mathbb{R}$;
- se $s > n$ allora $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$;
- $\mathcal{H}^s$ è omogenea di ordine s e invariante rispetto alle isometria affini.

Riferimenti bibliografici: [3, §2.1]

04/03/09 (2-8). Se $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ per un certo δ, allora $\mathcal{H}^s(A) = 0$ [3, §2.1, Lemma1]. Se $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ allora $\mathcal{H}^t(A) = 0$ per ogni $t > s$ [3, §2.1, Lemma 2]. Dimensione di Hausdorff di un insieme. Simmetrizzazione di Steiner [3, §2.2, Lemma 2]:

- $\mathrm{diam} S_a(A) \leq \mathrm{diam} A$;
- se A è $\mathcal{L}^n$-misurabile, allora $S_a(A)$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile e si ha $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$.

Disuguaglianza isodiametrica [3, §2.2, Thorem 1]: sketch della dimostrazione.

Riferimenti bibliografici: [3, §2.1, §2.2]

10/03/09 (1-9). Disuguaglianza isodiametrica [3, §2.2, Thorem 1]: dimostrazione rigorosa. In $\mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ [3, §2.2, Theorem 2].

Riferimenti bibliografici: [3, §2.2]

11/03/09 (2-11). Teorema del ricoprimento di Vitali [3, §1.5, Theorem 1] e primo corollario [3, §1.5, Corollary 2]. Enunciato e discussione del teorema della densità per la misura di Hausdorff [3, §2.3, Theorem 1, Theorem 2]. Accenni ad insiemi patologici rispetto alla densità: insiemi porosi [5, §4.12].

Riferimenti bibliografici: [3, §1.5, §2.3], [5, §4.12].

17/03/09 (2-13). Secondo corollario del Teorema di Vitali [3, §1.5, Corollary 1]. Dimostrazione del teorema della densità per la misura di Hausdorff [3, §2.3, Theorem 1, Theorem 2], [5, Theorem 6.2].

Riferimenti bibliografici: [3, §1.5, §2.3], [5, §6].

18/03/09 (2-15). Funzioni Lipschitziane. Teorema di estensione [3, §3.1, Theorem 1]. $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq (\mathrm{Lip}\, f)^s \mathcal{H}^s(A)$ [3, §2.4, Theorem 1]. Teorema di Rademacher [3, §3.1, Theorem 2].

Riferimenti bibliografici: [3, §2.4, §3.1].

24/03/09 (2-17). Funzioni di Sobolev. Definizione e proprietà elementari [3, §4.1]. Approssimazione mediante funzioni liscie [3, §4.2.1]. Enunciato di [3, §4.2.1, Theorem 1].

Riferimenti bibliografici: [3, §4.1, §4.2.1].

31/03/09 (2-19). Dimostrazione di [3, §4.2.1, Theorem 1]. Approssimazione locale mediante funzioni lisce, Teorema di Meyers-Serrin [3, §4.2.1, Theorem 2] (solo enunciato). Approssimazione globale mediante funzioni lisce [3, §4.2.1, Theorem 3] (solo enunciato).

Riferimenti bibliografici: [3, §4.2.1].

01/04/09 (1-20). Dimostrazione del Teorema di approssimazione di Meyers-Serrin [3, §4.2.1, Theorem 2]. Definizione di funzione BV e BV_{loc}.

Riferimenti bibliografici: [3, §4.2.1, §5.1].

07/04/09 (2-22). Esempi notevoli di funzioni BV: funzioni di classe C^1 con gradiente in L^1, funzioni di classe $W^{1,1}$. Notazioni per la variazione di $f \in BV(U)$:

$$\|Df\|(U), \quad \int_U |Df|.$$

Insiemi di perimetro finito (e localmente finito). Notazioni per il perimetro di E in U:

$$\|\partial E\|(U), \quad P(E, U), \quad P_U(E).$$

Se E è di classe C^2 allora si ha $\|\partial E\|(U) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$. Proprietà elementari del perimetro. Teorema di semicontinuità inferiore per la variazione delle funzioni BV [4, §1, Theorem 1.9], [3, §5.2.1, Theorem 1].

Riferimenti bibliografici: [3, §5.1], [4, §1.1, §1.2, §1.4, §1.6, §1.7, §1.9].

08/04/09 (2-24). Esempio di successione di funzioni per cui vale la disuguaglianza stretta nella formula della sci per le variazioni: $[0, 2\pi] \ni x \mapsto f_k(x) := \sin(kx)/k$. Esempio di insieme E in $\mathbb{R}^2$ tale che $\mathcal{L}^2(\overline{E} - E) = +\infty$ e $P(E, \mathbb{R}^2) < +\infty$. La funzione $BV(U) \ni f \mapsto \|f\|_{BV(U)} := \|f\|_{L^1(U)} + \|Df\|(U)$ è una norma in $BV(U)$. Lo spazio normato $(BV(U), \|\cdot\|_{BV(U)})$ è uno spazio di Banach [4, Remark 1.12]. Approssimazione di una funzione BV mediante funzioni lisce, Teorema di Anzellotti-Giaquinta [3, §5.2.2, Theorem 2]: enunciato e prima parte della dimostrazione.

Riferimenti bibliografici: [3, §5.2.2], [4, §1.10, §1.11, §1.12, §1.17].

15/04/09 (2-26). Teorema di Anzellotti-Giaquinta [3, §5.2.2, Theorem 2]: ultima parte della dimostrazione. Teorema di rappresentazione di Riesz (solo enunciato) [3, §1.8, Theorem 1]. Teorema di struttura per funzioni BV: il gradiente distribuzionale di una funzione BV è una misura di Radón [3, §5.1, Theorem 1].

Riferimenti bibliografici: [3, §1.8, §5.2.2, §5.1], [4, §1.5, §1.17].

21/04/09 (2-28). Coerenza fra la notazione scelta per la misura variazione (cioè $\|Df\|$) e la notazione scelta per la variazione di f (cioè $\|Df\|(U)$). Esempio di funzione in $BV(U) - W^{1,1}(U)$. Disuguaglianze di tipo-Poincaré. Disuguaglianza di Gagliardo-Niremberg-Sobolev [3, §4.5.1, Theorem 1] (solo enunciato e osservazioni). Disuguaglianza di Poincaré [3, §4.5.1, Theorem 2] (solo enunciato). Disuguaglianza di Sobolev per funzioni $BV(\mathbb{R}^n)$ [3, §5.6.1, Theorem 1(i)].

Riferimenti bibliografici: [3, §1.8, §4.5.1, §5.6.1], [4, §1.28].

22/04/09 (2-30).

Disuguaglianza di Poincaré per funzioni $BV(\mathbb{R}^n)$ [3, §5.6.1, Theorem 1(ii)]. Disuguaglianze isoperimetriche (globale e locale) per insiemi di perimetro finito [3, §5.6.2, Theorem 2].

Riferimenti bibliografici: [3, §5.6.1, §5.6.2], [4, §1.29].

28/04/09 (2-32).

La frontiera ridotta di un insieme di perimetro finito. Osservazione: la misura variazione $\|\partial E\|$ è concentrata nella frontiera ridotta di E. Versione involuta del teorema della divergenza per un insieme di perimetro finito [3, §5.7.1, Lemma 1]. Stime di densità nei punti della frontiera ridotta (enunciato)[3, §5.7.1, Lemma 2].

Riferimenti bibliografici: [3, §5.7.1], [4, Ch.3].

29/04/09 (2-34).

Dimostrazione delle stime di densità nei punti della frontiera ridotta [3, §5.7.1, Lemma 2]. Blow-up di un insieme di perimetro finito in un punto della frontiera ridotta, considerazioni introduttive. Teorema di Rellich-Kondrachov (solo enunciato) [2, Teorema IX.16], [3, §4.6, Theorem 1]. Teorema di compattezza per funzioni BV [3, §5.2.3, Theorem 4].

Riferimenti bibliografici: [2, Cap.9], [3, §4.6, §5.7.1], [4, §1.19 and Ch.3].

05/05/09 (2-36).

Richiami sulla convergenza debole delle misure di Radón [1, Proposition 1.62]. Teorema di blow-up della frontiera ridotta [3, §5.7.2, Theorem 1]: enunciato e prima parte della dimostrazione.

Riferimenti bibliografici: [3, §5.7.2], [4, Theorem 3.7].

06/05/09 (1-37).

Teorema di blow-up della frontiera ridotta [3, §5.7.2, Theorem 1]: seconda parte della dimostrazione.

Riferimenti bibliografici: [3, §5.7.2], [4, Theorem 3.7].

12/05/09 (1-39).

Teorema di blow-up della frontiera ridotta [3, §5.7.2, Theorem 1]: ultima parte della dimostrazione. Risultati sharp sulla densità di un insieme di perimetro finito in un punto della frontiera ridotta [3, §5.7.2, Corollary 1]. Coercività della misura variazione rispetto ad $\mathcal{H}^{n-1}$ ristretta alla frontiera ridotta (per un insieme di perimetro localmente finito) [3, §5.7.3, Lemma 3].

Riferimenti bibliografici: [3, §5.7.2, §5.7.3], [4, Theorem 3.7].

13/05/09 (2-41).

Teorema di Ennio De Giorgi sulla rettificabilità della frontiera ridotta di un insieme di perimetro localmente finito [3, §5.7.3, Theorem 2], [4, Theorem 4.4].

Riferimenti bibliografici: [3, §5.7.3], [4, Ch.4].

References

[1] L.Ambrosio, N.Fusco, D.Pallara: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* Oxford Science Publications (2000).

[2] H.Brezis: *Analisi funzionale, teoria e applicazioni.* Liguori Editore (1986).

[3] L.C.Evans, R.F.Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in advanced mathematics, CRC Press (1992).

[4] E.Giusti: *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Monographs in Mathematics, Birkhäuser (1984).

[5] P.Mattila: *Geometry of sets and measures in euclidean spaces.* Cambridge studies in advanced mathematics 44, Cambridge Univ. Press (1995).