Note di
ANALISI MATEMATICA III
(per il Corso di Laurea in Fisica)
A.A. 2009/2010

Silvano Delladio

CHAPTER 1

Integrali di funzioni e campi

1. Introduzione

Presentazione generale del corso. Rassegna di "situazioni problematiche" relative al calcolo di:

(1.1) lunghezza di una curva (nel piano o nello spazio);
(1.2) massa di un filo;
(1.3) lavoro compiuto da un campo lungo una curva orientata;
(2.1) area di una superficie;
(2.2) massa di una lamina;
(2.3) flusso di un campo attraverso una supeficie orientata;
(3.1) volume di un sottoinsieme dello spazio;
(3.2) massa di un corpo;
(4.1) area di un sottoinsieme del piano;
(4.2) volume del sottografico di una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

In tutti i casi elencati il numero da calcolare si approssima mediante somme finite del tipo

$$\sum_i f(P_i)m(E_i) \tag{1}$$

dove $\{E_i\}$ è una partizione del luogo geometrico E coinvolto nella formulazione del problema (una curva per (1.1-3), una superficie per (2.1-3), eccetera), $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, $P_i \in E_i$ ed m è la misura naturale per gli E_i (lunghezza per 1.1-3, area per 2.1-3, eccetera). La partizione è scelta così fitta che le funzioni $f|E_i$ "si possono considerare costanti".

In particolare:

- $f \equiv 1$ in (1.1), (2.1), (3.1) e (4.1);
- f è la densità di massa in (1.2), (2.2) e (3.2);
- $f \equiv F \bullet \tau$ in (1.3), dove F è il campo che compie lavoro mentre τ è il campo di vettori unitari tangenti che orienta la curva;
- $f \equiv F \bullet \nu$ in (2.3), dove F è il campo di cui calcolare il flusso mentre ν è il campo di vettori normali continuo che orienta la superficie.

2. Integrale su una curva

Terminologie alternative: curva come mappa e sua immagine, oppure curva e sua parametrizzazione. Orientazione indotta dalla parametrizzazione.

Una curva ammette infinite parametrizzazioni. Esempi. Ogni curva liscia ammette parametrizzazioni non liscie. Inoltre esistono curve non liscie con parametrizzazioni liscie (esempio: $\gamma(t) := (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$).

Esempi di parametrizzazioni di curve (segmento, grafico di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, elica, ...). Definizioni di curva chiusa, curva semplice.

Proposizione 1.1. *Sia data una mappa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e sia $t_0 \in [a, b]$. Allora il limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

esiste in $\mathbb{R}^n$ se e solo se le componenti γ_i sono derivabili in t_0. In tal caso si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots).$$

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che si ha

$$\left| \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} - v_i \right| \le \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v \right\| \le \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0} - v_j \right|$$

per ogni $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e per $i = 1, \dots, n$. □

Definizione 1.1. *Sia γ come in Proposizione 1.1. Diremo che γ è <u>derivabile</u> in $t_0 \in [a, b]$ se esiste*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Tale limite verrà indicato con $\gamma'(t_0)$.

Ora Proposizione 1.1 può essere riformulata come segue:

Proposizione 1.2. *Sia data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e sia $t_0 \in [a, b]$. Allora γ è derivabile in t_0 se e solo se tutte le componenti γ_i sono derivabili in t_0. In tal caso si ha*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots).$$

Proposizione 1.3. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una mappa derivabile in t_0, con $\gamma'(t_0) \neq 0$, e consideriamo la seguente parametrizzazione della retta per $\gamma(t_0)$ avente direzione $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:*

$$\lambda_v(t) := \gamma(t_0) + (t - t_0)v, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si ha allora che $\gamma(t) - \lambda_v(t)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $t - t_0$, per $t \to t_0$, se e soltanto se $v = \gamma'(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti

$$\frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v.$$

Ne segue che

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = 0$$

se e soltanto se $v = \gamma'(0)$. $\square$

La precedente proposizione ci mostra che, fra tutte le λ_v, ce n'è una (e una sola) che meglio approssima γ vicino a t_0. Essa si ottiene prendendo $v = \gamma'(t_0)$. Risulta pertanto naturale dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.2. *Nelle ipotesi di Proposizione 1.3, la retta*

$$t \mapsto \lambda_{\gamma'(t_0)}(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$$

è detta retta tangente (affine) alla curva γ in t_0.

DEFINIZIONE 1.3. *Una mappa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è detta parametrizzazione regolare a tratti (di curva) se essa è semplice, continua e se si può trovare una suddivisione*

$$a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N := b$$

tale che, per ogni j, la mappa $\gamma|(a_j, a_{j+1})$ sia di classe C^1 e

$$t \mapsto \gamma'(t), \qquad t \in (a_j, a_{j+1})$$

sia limitata e sempre diversa da zero. Nel caso in cui le precedenti condizioni possano essere verificate con $N = 1$, si dice che γ è una parametrizzazione regolare. Una curva regolare (risp. curva regolare a tratti) è un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ per cui esiste una parametrizzazione regolare (risp. regolare a tratti) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tale che $C = \gamma([a, b])$.

PROPOSIZIONE 1.4. *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è una parametrizzazione regolare (di curva) allora $\gamma((a, b))$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1.*

La dimostrazione di Proposizione 1.4 seguirà facilmente dal seguente lemma.

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia $\varphi : (c, d) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e supponiamo che per un certo $t_* \in (c, d)$ si abbia $\varphi'(t_*) \neq 0$. Allora esiste un intervallo aperto I tale che*

- *$\overline{I} \subset (c, d)$ e $t_* \in I$;*
- *la funzione $\varphi|\overline{I}$ è strettamente monotona. In particolare $J := \varphi(I)$ è un intervallo aperto e*

  $$\varphi|I : I \to J$$

  è invertibile. Inoltre

  $$(\varphi|I)^{-1} : J \to I$$

  è una funzione di classe C^1.

DIMOSTRAZIONE: Senza intaccare la generalità della prova, possiamo supporre che $\varphi'(t_*) > 0$. Poiché φ' è continua, esiste allora (per il teorema della permanenza del segno) un intervallo aperto I tale che

$$t_* \in I, \qquad \overline{I} \subset (c, d), \qquad \varphi'|\overline{I} > 0.$$

Per verificare che $(\varphi|I)^{-1}$ è derivabile, consideriamo

$$x \in J, \qquad \{x_h\} \subset J \backslash \{x\}$$

tali che $x_h \to x$ e siano

$$t \in I, \qquad \{t_h\} \subset I$$

tali che

$$\varphi(t) = x, \qquad \varphi(t_h) = x_h.$$

Osserviamo che, ovviamente, si ha $t_h \neq t$ per ogni h. Proviamo che

$$t_h \to t. \tag{2}$$

Se non fosse così esisterebbero $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione $\{t_{h_i}\}$ tali che

$$|t - t_{h_i}| \geq \varepsilon \tag{3}$$

per ogni i. Poiché $\{t_{h_i}\}$ è limitata, esisterebbe una sottosuccessione $\{t_{h_{i_j}}\}$ convergente a un certo $\bar{t} \in \bar{I}$. Si avrebbe che

$$x_{h_{i_j}} = \varphi(t_{h_{i_j}}) \to \varphi(\bar{t}) \qquad (j \to +\infty)$$

e quindi $\varphi(\bar{t}) = x = \varphi(t)$. Ne seguirebbe che $\bar{t} = t$, mentre (3) implica che $|t - \bar{t}| \geq \varepsilon$. Questa conclusione assurda prova che vale (2).

Ne segue che

$$\frac{(\varphi|I)^{-1}(x_h) - (\varphi|I)^{-1}(x)}{x_h - x} = \frac{t_h - t}{\varphi(t_h) - \varphi(t)} = \left(\frac{\varphi(t_h) - \varphi(t)}{t_h - t}\right)^{-1}.$$

Quindi $(\varphi|I)^{-1}$ è derivabile in x e si ha

$$D(\varphi|I)^{-1}(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\varphi'((\varphi|I)^{-1}(x))} \tag{4}$$

per ogni $x \in J$. In particolare $(\varphi|I)^{-1}$ è continua in J, per cui la stessa formula (4) mostra che $(\varphi|I)^{-1} \in C^1(J)$.

Osservazione 1.1. *La mappa $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, non è una parametrizzazione regolare in quanto $\gamma'(0) = (0, 0)$ (ma è regolare a tratti). Pertanto: il fatto che $\gamma((-1, 1))$ non possa coincidere, intorno al punto $\gamma(0) = (0, 0)$, col grafico di una funzione di classe C^1 non contrasta con Proposizione 1.4.*

Ulteriore commento al problema (1.2), discusso in Sez. . Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ parametrizza il luogo C occupato dal filo ed f indica la densità di massa del filo medesimo, allora le somme finite (1) approssimano il numero

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt. \tag{5}$$

Questa espressione diviene pertanto il "naturale candidato per la definizione di $\int_C f$". Prima però essa andrà oppotunamente "testata": più precisamente verificheremo che la formula (5) non dipende dalla scelta della parametrizzazione e che inoltre essa produce una nozione di misura coerente, nei casi elementari (segmento, circonferenza, ...), con quella classica.

Proposizione 1.6. *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ parametrizzazioni regolari e iniettive tali che*

$$\gamma([a, b]) = \lambda([c, d]) =: C.$$

Allora, se $f : C \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_c^d f(\lambda(s))\|\lambda'(s)\|\,ds.$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione

$$\sigma := \lambda^{-1} \circ \gamma : [a, b] \to [c, d].$$

Osserviamo che σ è iniettiva, oltre che (ovviamente) suriettiva. Infatti, se $t_1, t_2 \in [a, b]$ e $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, allora si ha

$$\gamma(t_1) = \lambda \circ \sigma(t_1) = \lambda \circ \sigma(t_2) = \gamma(t_2)$$

e quindi $t_1 = t_2$, per l'iniettività di γ.

Verifichiamo che σ è continua. Se non lo fosse, esisterebbero $t_0 \in [a, b]$ e $\varepsilon_0 > 0$ tali che

$$|\sigma(t_i) - \sigma(t_0)| \geq \varepsilon_0 \tag{6}$$

per una certa successione di $t_i \in [a, b]$, $i = 1.2, \ldots$, con $t_i \to t_0$ $(i \to \infty)$. Poiché $[c, d]$ è un insieme compatto e $\sigma(t_i) \in [c, d]$, potremmo trovare una sottosuccessione $\{t_{i_j}\}$ e $s_0 \in [c, d]$ tali che

$$\sigma(t_{i_j}) \to s_0 \qquad (j \to \infty). \tag{7}$$

Ne seguirebbe che

$$\lambda(s_0) = \lim_j \lambda(\sigma(t_{i_j})) = \lim_j \gamma(t_{i_j}) = \gamma(t_0) = \lambda(\sigma(t_0))$$

e quindi $s_0 = \sigma(t_0)$, per l'iniettività di λ. Ma questo risultato contraddice evidentemente (6) e (7) e prova pertanto la continuità di σ.

Dimostriamo ora che $\sigma \in C^1(a, b)$. Fissato arbitrariamente $t_0 \in (a, b)$ e ricordando che σ è iniettiva, si trova

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} &= \frac{\lambda(\sigma(t_0 + h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{h} \\ &= \frac{\lambda(\sigma(t_0 + h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)} \cdot \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h} \end{aligned} \tag{8}$$

per ogni $h \neq 0$ sufficientemente prossimo a zero (affinché $t_0 + h \in (a, b)$). Osserviamo che, grazie alla continuità di σ, si ha

$$R(h) := \frac{\lambda(\sigma(t_0 + h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)} \to \lambda'(\sigma(t_0)) \neq 0 \tag{9}$$

per $h \to 0$. In particolare, per $|h|$ sufficientemente piccolo, vale

$$R(h) \neq 0$$

e dunque da (8) otteniamo subito (per $|h|$ sufficientemente piccolo)

$$\frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h} = \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \bullet \frac{R(h)}{\|R(h)\|^2}.$$

Ricordando anche (9), ne segue che σ è derivabile in t_0 e si ha

$$\sigma'(t_0) = \frac{\gamma'(t_0) \bullet \lambda'(\sigma(t_0))}{\|\lambda'(\sigma(t_0))\|^2}.$$

Rimane così provato che $\sigma \in C^1(a, b)$.

Osserviamo che, a questo punto, sempre da (8) si deduce l'uguaglianza

$$\gamma'(t_0) = \lambda'(\sigma(t_0))\sigma'(t_0). \tag{10}$$

Dalla formula di integrazione per sostituzione, segue che

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt &= \int_{[a,b]} f(\lambda(\sigma(t)))\|\lambda'(\sigma(t))\sigma'(t)\|\,dt \\
&= \int_{[a,b]} f(\lambda(\sigma(t)))\|\lambda'(\sigma(t))\||\sigma'(t)|\,dt \\
&= \int_{[c,d]} f(\lambda(s))\|\lambda'(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.2. *La formula (10) estende la formula di derivazione per le funzioni composte dimostrata nei precedenti corsi di analisi. Essa costituisce un risultato standard del calcolo differenziale che ci sarà utile anche in seguito.*

Osservazione 1.3. *La proposizione precedente si generalizza immediatamente alle curve regolari a tratti (che ricorreranno molto spesso in seguito).*

Osservazione 1.4. *Vari test significativi eseguiti su $\int_{[a,b]}\|\gamma'\|$ (i casi del segmento, della circonferenza e del grafico di una funzione $f \in C^1([a,b])$), l'invarianza rispetto alla traslazione e l'omogeneità rispetto all'omotetia confermano l'ipotesi intuitiva che $\int_C 1$ costituisca la giusta nozione di misura (lunghezza) della curva C.*

A questo punto possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.4. *Siano C una curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l' integrale di f lungo C è il numero*

$$\int_C f := \int_{[a,b]} (f \circ \gamma)\,\|\gamma'\|$$

dove $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi parametrizzazione regolare a tratti tale che $\gamma([a,b]) = C$. Per una tale curva si definisce anche la misura (lunghezza) di C, come segue:

$$m_1(C) := \int_C 1 = \int_{[a,b]} \|\gamma'\|.$$

Notazione alternativa: $\int_C f\,ds$, $\int_C f\,d\mathcal{H}^1$.

Il seguente risultato, interessante di-per-sè, conferma ulteriormente l'opportunità della precedente definizione.

Proposizione 1.7. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione regolare a tratti. Allora*

$$\int_{[a,b]} \|\gamma'\| = \sup_{\Delta\in\mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta)$$

dove $\mathcal{P}([a,b])$ denota l'insieme delle partizioni di $[a,b]$

$$\Delta = (t_0, t_1 \ldots, t_N), \text{ con } t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b$$

mentre $l_\gamma(\Delta)$ *indica la lunghezza della poligonale avente come vertici le immagini* $\gamma(t_j)$ *della partizione* Δ*, cioè*

$$l_\gamma(\Delta) := \sum_{j=0}^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|.$$

DIMOSTRAZIONE: Primo passo: se γ è una parametrizzazione regolare. Posto

$$L := \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta)$$

dimostriamo che

$$L \le m_1(C). \tag{11}$$

Consideriamo $\Delta = (t_0, t_1 \dots, t_N) \in \mathcal{P}([a,b])$ e, fissato j con $0 \le j \le N-1$, definiamo il vettore unitario

$$u := \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|}.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, si trova che

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| &= u \bullet (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) = u \bullet \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} u \bullet \gamma'(t)\, dt \le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{12}$$

e quindi, sommando

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

dalla quale segue subito la disuguaglianza (11).

Per dimostrare il viceversa, scegliamo a', b' tali che

$$a < a' < b' < b$$

e osserviamo che γ' è uniformemente continua in $[a', b']$. Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| \le \varepsilon \tag{13}$$

per ogni $s, t \in [a', b']$ tali che $|t - s| \le \delta$. Se ora consideriamo una partizione

$$\Delta = (t_0, t_1 \dots, t_N) \in \mathcal{P}([a', b'])$$

tale che

$$t_{j+1} - t_j < \delta, \qquad (j = 0, \dots, N-1)$$

segue che

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt &\le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_j)\| dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t_j)\| dt \\ &\le \varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \|\gamma'(t_j)\|(t_{j+1} - t_j) \\ &\le \varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \left\| \gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| (t_{j+1} - t_j) + \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|. \end{aligned}$$

Poiché, come mostreremo fra breve

$$\left\|\gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j}\right\| \leq n\varepsilon \tag{14}$$

si ottiene

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq (n+1)(t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

da cui, sommando

$$\int_{a'}^{b'} \|\gamma'(t)\| dt \leq (n+1)(b' - a')\varepsilon + l_{\gamma|[a',b']}(\Delta) \leq (n+1)(b-a)\varepsilon + L.$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue subito che

$$\int_{a'}^{b'} \|\gamma'\| \leq L$$

e cioè

$$\int_a^b \|\gamma'\| \leq L + \int_a^{a'} \|\gamma'\| + \int_{b'}^b \|\gamma'\| \leq L + (a' - a + b - b') \sup_{[a,b]} \|\gamma'\|.$$

Ricordando che $\|\gamma'\|$ è limitata e che a' e b' possono essere scelti arbitrariamente vicini ad a e b, rispettivamente, se ne conclude che

$$\int_a^b \|\gamma'\| \leq L.$$

Per dimostrare (14), basta applicare il teorema di Lagrange del valor medio alle componenti γ_i di γ. Esso ci garantisce l'esistenza di $s_{ij} \in (t_j, t_{j+1})$ tali che:

$$\left\|\gamma'(t_j) - \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j}\right\| \leq \sum_{i=1}^n \left|\gamma_i'(t_j) - \frac{\gamma_i(t_{j+1}) - \gamma_i(t_j)}{t_{j+1} - t_j}\right| \leq \sum_{i=1}^n \left|\gamma_i'(t_j) - \gamma_i'(s_{ij})\right|.$$

La disuguaglianza (14) segue ora subito da (13).

<u>Secondo passo: il caso generale.</u> Sia

$$a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N := b$$

una suddivisione di $[a, b]$ tale che

$$\gamma|(a_j, a_{j+1}) \in C^1$$

e $\gamma'(t) \neq 0$, per ogni $t \neq a_0, a_1, a_2, \ldots$

Grazie al primo passo, si ha

$$\int_{[a,b]} \|\gamma'\| = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{[a_j,a_{j+1}]} \|\gamma'\| = \sum_{j=0}^{N-1} \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a_j,a_{j+1}])} l_{\gamma|[a_j,a_{j+1}]}(\Delta) =: \Sigma.$$

Rimane da verificare che

$$\Sigma = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta).$$

In effetti, se consideriamo

$$\Delta_j = \{t_{j0}, t_{j1}, \ldots, t_{jN_j}\} \in \mathcal{P}([a_j, a_{j+1}]), \qquad (j = 0, \ldots, N-1)$$

e osserviamo che

$$\Delta_* := \cup_{j=0}^{N-1} \Delta_j = \{t_{00}, \ldots, t_{0N_0} = t_{10}, \ldots, t_{1N_1} = t_{20}, \ldots\} \in \mathcal{P}([a,b]),$$

troviamo subito che

$$\sum_{j=0}^{N-1} l_{\gamma|(a_j,a_{j+1})}(\Delta_j) = l_\gamma(\Delta_*) \leq \sup_{\Delta\in\mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta).$$

Quindi, potendo far variare arbitrariamente le Δ_j in $\mathcal{P}([a_j,a_{j+1}])$, otteniamo

$$\Sigma \leq \sup_{\Delta\in\mathcal{P}([a,b])} l_\gamma(\Delta).$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta (e quindi concludere), consideriamo $\Delta \in \mathcal{P}([a,b])$ e poniamo

$$\Delta_j := \{a_j\} \cup (\Delta \cap (a_j,a_{j+1})) \cup \{a_{j+1}\} \in \mathcal{P}([a_j,a_{j+1}]), \qquad (j=0,\dots,N-1).$$

Allora, per la disuguaglianza triangolare, segue facilmente che

$$l_\gamma(\Delta) \leq \sum_{j=0}^{N-1} l_\gamma(\Delta_j) \leq \Sigma.$$

La conclusione segue ora dall'arbitrarietà di $\Delta \in \mathcal{P}([a,b])$. $\square$

NOTA BENE: La definizione di integrale sottintesa (è la prima volta che la incontriamo!) nella formula (12) è la seguente:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t)dt := \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_1'(t)dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_2'(t)dt, \dots, \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_n'(t)dt\right).$$

NOTA BENE: Se disponessimo del teorema di Lagrange del valor medio per i campi di vettori, potremmo applicarlo a γ per ottenere una dimostrazione più diretta di (14). Eviteremmo così di passare alle componenti scalari γ_i. Purtroppo però un tale teorema non vale. Per esempio $\lambda(t) := (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0,2\pi]$, soddisfa

$$\frac{\lambda(2\pi)-\lambda(0)}{2\pi - 0} = 0$$

mentre $\lambda'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0,2\pi]$.

OSSERVAZIONE 1.5. *Anche alla luce di Proposizione 1.7, si potrebbe essere indotti a pensare che l'estremo superiore delle aree delle superfici poliedrali inscritte in una superficie "liscia" Σ possa essere assunto quale ragionevole definizione dell'area di Σ. Questo però non può essere vero! Infatti tale estremo superiore vale $+\infty$ per tutte le superfici liscie e curve. Il caso del cilindro: esempio di Schwarz.*

DEFINIZIONE 1.5. *Una curva regolare a tratti orientata in $\mathbb{R}^n$ è una coppia (C,τ), dove*

(i) *C è una curva regolare a tratti;*
(ii) *$\tau : C \to \mathbb{R}^n$ è un campo di vettori per cui esiste una parametrizzazione regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma([a,b]) = C$ e*

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|\tau(\gamma(t))$$

per ogni t in cui γ è derivabile.

Le seguenti osservazioni sono preliminari essenziali alla definizione di integrale di un campo vettoriale lungo una curva regolare a tratti orientata (Definizione 1.6).

Osservazione 1.6. *Se (C,τ) è una curva regolare a tratti orientata, allora τ è continuo sui tratti regolari della curva C.*

Osservazione 1.7. *La Definizione 1.4 si estende in modo ovvio alle funzioni discontinue in un numero finito di punti (e.g. quelle continue sui tratti regolari della curva C) e limitate.*

Definizione 1.6. *Sia $\overline{C} = (C,\tau)$ una curva regolare a tratti orientata (in $\mathbb{R}^n$). Se $F : C \to \mathbb{R}^n$ è un campo continuo sui tratti regolari di C, definiamo l'integrale di F lungo $\overline{C}$ come il numero*

$$\int_{\overline{C}} F := \int_C F \bullet \tau.$$

Notazione alternativa: $\int_{\overline{C}} F \bullet ds$ (per $n = 2,3$), $\int_{\overline{C}} F_1 dx + F_2 dy$ (se $n = 2$), $\int_{\overline{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ (se $n = 3$).

Osservazione 1.8. *Sia $\overline{C} = (C,\tau)$ una curva regolare a tratti orientata (in $\mathbb{R}^n$). Allora, se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è come in Definizione 1.5, si ha*

$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C}} F \bullet \tau = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \tau(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)dt. \tag{15}$$

Questa formula giustifica evidentemente l'uso delle notazioni alternative.

OSSERVAZIONE. Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo continuo dotato di un "potenziale" $\varphi \in C^1(A)$ (cioè si abbia $\nabla\varphi \equiv F$). Inoltre sia $\overline{C} = (C,\tau)$ una curva regolare a tratti orientata (in $\mathbb{R}^n$), con $C \subset A$. Allora, per (15), si ha

$$\int_{\overline{C}} F = \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)' = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)). \tag{16}$$

In particolare, ne consegue che:

(1) Curve $\overline{C}$ distinte aventi in comune i punti iniziale e finale danno luogo allo stesso valore dell'integrale $\int_{\overline{C}} F$;
(2) Per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ tale che $C \subset A$ e C è chiusa, si ha

$$\int_{\overline{C}} F = 0.$$

Con riferimento al contesto fisico, in cui $\int_{\overline{C}} F$ può essere interpretato come energia, diremo che i campi soddisfacenti questa condizione (come F) sono "conservativi". Abbiamo così verificato che ogni campo dotato di un potenziale è conservativo. Il viceversa è vero, ma la dimostrazione (che richiede strumenti matematici non ancora disponibili) verrà data in seguito.

Vale la pena di osservare che non tutti i campi sono dotati di un potenziale. Per esempio

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto (0,x)$$

non lo è. Infatti, se F avesse un potenziale φ, questo sarebbe necessariamente di classe C^2. Poiché $\nabla\varphi = F$, troveremmo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x$$

e quindi anche

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1$$

che contraddice il ben noto teorema di Schwarz. Alternativamente, grazie a (2), questo fatto si può provare osservando che esistono curve chiuse lungo le quali l'integrale di F produce un risultato diverso da zero (per esempio la circonferenza unitaria centrata nell'origine).

Infine, è evidente che se F ha un potenziale φ, allora ne ha infiniti altri (per esempio $\varphi + c$, con $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$).

Esempi.

3. Integrale in $\mathbb{R}^n$

Intervalli aperti a destra in $\mathbb{R}^n$. Funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1.7. *Due funzioni semplici*

$$\varphi := \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i}, \qquad \psi := \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_{E_j}$$

si dicono <u>*uguali*</u> *(e si scrive $\varphi = \psi$) se $M = N$ e per ogni $i \in \{1, \dots, M\}$ esiste $j \in \{1, \dots, N\}$ tale che*

$$D_i = E_j, \quad \lambda_i = \mu_j.$$

Le funzioni φ e ψ si dicono <u>*equivalenti*</u> *(e si scrive $\varphi \sim \psi$) se $\varphi(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

OSSERVAZIONE. Se φ è una funzione semplice in $\mathbb{R}^n$, esistono infinite funzioni semplici ψ in $\mathbb{R}^n$ equivalenti a φ. Esempio: le funzioni semplici in $\mathbb{R}^2$

$$\varphi_{[0,2)\times[0,1)}, \qquad \varphi_{[0,1)\times[0,1)} + \varphi_{[1,2)\times[0,1)} \tag{17}$$

sono equivalenti (e inoltre non sono uguali).

OSSERVAZIONE. Si potrebbe esser portati a pensare che se

$$\varphi = \sum_{i=1^M} \lambda_i \varphi_{D_i}, \qquad \psi = \sum_{j=1^N} \mu_j \varphi_{E_j}$$

sono funzioni semplici, con $\lambda_i \neq 0$ per ogni i e $\mu_j \neq 0$ per ogni j, allora debba valere $\cup_i D_i = \cup_j E_j$. Non è così! Per esempio (con $n = 2$), se poniamo

$$D_1 := [0,2) \times [0,1), \quad D_2 := [1,3) \times [0,1), \quad E_1 := [0,1) \times [0,1), \quad E_2 := [2,3) \times [0,1)$$

si ha ovviamente

$$\varphi_{D_1} - \varphi_{D_2} \sim \varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}$$

mentre

$$D_1 \cup D_2 \neq E_1 \cup E_2.$$

OSSERVAZIONE. Il funzionale sulle funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ definito da

$$I_n\Big(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{D_j} \Big) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_n(D_j)$$

produce lo stesso risultato se applicato a funzioni semplici equivalenti. Questo fatto, che proveremo fra poco (Proposizione 1.9) non accade per tutti i funzionali. Per esempio, il funzionale

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{D_j} \mapsto \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_n(D_j)^2$$

valutato sulle funzioni semplici (17), produce 4 e 2, rispettivamente. Osserviamo che $I_n(\varphi)$ si può interpretare intuitivamente come la misura orientata della regione compresa fra $\mathbb{R}^n$ e il grafico di φ. Dunque, senza ambiguità, potremo chiamere tale numero <u>integrale di φ in $\mathbb{R}^n$</u>. Tale interpretazione fornisce anche una prova intuitiva di Proposizione 1.9.

La seguente osservazione e la successiva proposizione si riveleranno utili per provare la menzionata Proposizione 1.9 sull'invarianza dell'integrale per funzioni semplici equivalenti.

Osservazione 1.9. *Sia $\{D_i\}_{i=1}^M$ una qualsiasi famiglia di intervalli aperti a destra. Allora esiste una famiglia $\{F_k\}_{k=1}^P$ di intervalli aperti a destra tali che*

(i) $F_h \cap F_k = \emptyset$ *se* $h \neq k$;
(ii) $\cup_k F_k = \cup_i D_i$;
(iii) *se* $F_k \cap D_i \neq \emptyset$ *allora* $F_k \subset D_i$.

Riassumeremo queste proprietà nella scrittura $\{F_k\}_{k=1}^P \lhd \{D_i\}_{i=1}^M$.

Proposizione 1.8. *Siano dati una fuzione semplice (in $\mathbb{R}^n$)*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_{D_i}$$

e una famiglia $\{F_k\}_{k=1}^P$ di intervalli aperti a destra tale che

$$\{F_k\}_{k=1}^P \lhd \{D_i\}_{i=1}^M.$$

Posto

$$\Im_k := \{i \,|\, i = 1, \dots, M;\ F_k \subset D_i\}, \quad \gamma_k := \sum_{i \in \Im_k} \lambda_i \qquad (k = 1, \dots, P)$$

e

$$\zeta := \sum_{k=1}^{P} \gamma_k \varphi_{F_k},$$

si ha

$$\zeta \sim \varphi, \qquad I_n(\zeta) = I_n(\varphi).$$

DIMOSTRAZIONE: Sia

$$\Gamma := \{(k, i) \,|\, k = 1, \dots, P;\ i = 1, \dots, M;\ F_k \subset D_i\}$$

e osserviamo che $\Im_k$ è la sezione verticale di Γ di ascissa k, cioè

$$\Im_k = \{i \,|\, i = 1, \dots, M;\ (k, i) \in \Gamma\}.$$

Indicata con $\Re_i$ la sezione orizzontale di Γ $(i = 1, \dots, M)$, ossia posto

$$\Re_i := \{k \,|\, k = 1, \dots, P;\ (k, i) \in \Gamma\} = \{k \,|\, k = 1, \dots, P;\ F_k \subset D_i\}.$$

Verifichiamo che $\varphi \sim \zeta$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, \varphi_{D_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \sum_{k \in \Re_i} \varphi_{F_k}(x) = \sum_{(k,i)\in\Gamma} \lambda_i \varphi_{F_k}(x) = \sum_{k=1}^{P} \varphi_{F_k}(x) \sum_{i \in \Im_k} \lambda_i \\
&= \sum_{k=1}^{P} \gamma_k \, \varphi_{F_k}(x) \\
&= \zeta(x).
\end{aligned}$$

In virtù dello stesso argomento, si prova anche che $I_n(\varphi) = I_n(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
I_n(\varphi) &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, m_n(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \sum_{k \in \Re_i} m_n(F_k) = \sum_{(k,i)\in\Gamma} \lambda_i m_n(F_k) = \sum_{k=1}^{P} m_n(F_k) \sum_{i \in \Im_k} \lambda_i \\
&= \sum_{k=1}^{P} \gamma_k \, m_n(F_k) \\
&= I_n(\zeta).
\end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 1.9. *Siano φ e ψ funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ tali che $\varphi \sim \psi$. Allora $I_n(\varphi) = I_n(\psi)$.*

DIMOSTRAZIONE: Siano

$$\varphi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, \varphi_{D_i}, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \, \varphi_{E_j}.$$

Osserviamo che, ovviamente, si ha

$$\varphi \sim \widetilde{\varphi} := \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \, \varphi_{D_i} + \sum_{j=1}^{N} 0 \, \varphi_{E_j}, \qquad \psi \sim \widetilde{\psi} := \sum_{i=1}^{M} 0 \, \varphi_{D_i} + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \, \varphi_{E_j}$$

e

$$I_n(\widetilde{\varphi}) = I_n(\varphi), \qquad I_n(\widetilde{\psi}) = I_n(\psi). \tag{18}$$

Consideriamo ora una famiglia di intervalli aperti a destra $\{F_h\}_{h=1}^H$ tale che

$$\{F_h\}_{h=1}^H \lhd \{D_i\}_{i=1}^M \cup \{E_j\}_{j=1}^N.$$

Da Proposizione 1.8 segue che esistono numeri reali α_h, β_h $(h = 1, \dots, H)$ tali che

$$\widetilde{\varphi} \sim \zeta := \sum_{h=1}^{H} \alpha_h \, \varphi_{F_h}, \quad \widetilde{\psi} \sim \zeta' := \sum_{h=1}^{H} \beta_h \, \varphi_{F_h}$$

e

$$I_n(\zeta) = I_n(\widetilde{\varphi}), \quad I_n(\zeta') = I_n(\widetilde{\psi}). \tag{19}$$

Allora, per ogni $k = 1, \dots, H$, possiamo considerare $x \in F_k$ e osservare che

$$\alpha_k = \zeta(x) = \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = \psi(x) = \widetilde{\psi}(x) = \zeta'(x) = \beta_k.$$

Ne viene che $\zeta = \zeta'$ e quindi anche $I_n(\zeta) = I_n(\zeta')$. La conclusione segue ora subito da (18) e (19). □

OSSERVAZIONE 1.10. *Dalla definizione di I_n e da Proposizione 1.9 si ricavano facilmente le seguenti proprietà:*

(1) *il funzionale I_n è lineare, ossia*

$$I_n(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda I_n(\varphi) + \mu I_n(\psi)$$

per ogni coppia di funzioni semplici φ, ψ e per ogni coppia di numeri reali λ, μ;

(2) *se φ e ψ sono funzioni semplici tali che $\varphi(x) \le \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora $I_n(\varphi) \le I_n(\psi)$.*

Sia ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

(P1) f è limitata;
(P2) f è nulla nel complementare di un insieme limitato.

Indichiamo con $\Sigma_-(f)$ l'insieme delle funzioni semplici φ in $\mathbb{R}^n$ tali che $\varphi \le f$. Analogamente $\Sigma_+(f)$ è l'insieme delle funzioni semplici φ in $\mathbb{R}^n$ tali che $\varphi \ge f$.

OSSERVAZIONE 1.11. *Grazie alle ipotesi assunte su f, gli insiemi $\Sigma_-(f)$ e $\Sigma_+(f)$ risultano essere non vuoti. Si possono dunque definire i numeri reali*

$$I_n^-(f) := \sup\{I_n(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_-(f)\}, \qquad I_n^+(f) := \inf\{I_n(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_+(f)\}$$

e naturalmente si ha

$$I_n^-(f) \le I_n^+(f).$$

DEFINIZIONE 1.8. *Diremo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (nulla fuori di un insieme limitato e limitata) è <u>integrabile secondo Riemann (o Riemann integrabile)</u> se*

$$I_n^-(f) = I_n^+(f).$$

In tal caso si pone

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := I_n^-(f) = I_n^+(f).$$

L'insieme di tali funzioni è indicato con $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

Notazione alternativa: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$, $\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1dx_2 \dots dx_n$.

OSSERVAZIONE 1.12. *Non tutte le funzioni che soddisfano (P1) e (P2) sono Riemann integrabili. Per esempio, se $n = 1$ e indichiamo con f la funzione caratteristica di $\mathbf{Q} \cap [0, 1)$, si trova subito che $I_1^-(f) = 0$ e $I_1^+(f) = 1$.*

OSSERVAZIONE 1.13. *L'integrale su $\mathbb{R}^n$ estende l'operatore I_n dall'insieme delle funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$ a tutto $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Più precisamente: se φ è una funzione semplice in $\mathbb{R}^n$, allora $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = I_n(\varphi).$$

Infatti, poiché $\varphi \in \Sigma_-(\varphi)$, si ha

$$I_n^-(\varphi) = \sup \{I_n(\psi) \,|\, \psi \in \Sigma_-(\varphi)\} = I_n(\varphi)$$

e analogamente, poiché $\varphi \in \Sigma_+(\varphi)$, si ha

$$I_n^+(\varphi) = \inf \{I_n(\psi) \,|\, \psi \in \Sigma_+(\varphi)\} = I_n(\varphi).$$

PROPOSIZIONE 1.10. *$\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale e la mappa*

$$\mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f :$$

è lineare.

DIMOSTRAZIONE: Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Dimostriamo che allora

$$f + g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Infatti, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esistono

$$\varphi_- \in \Sigma_-(f), \quad \varphi_+ \in \Sigma_+(f), \quad \psi_- \in \Sigma_-(g), \quad \psi_+ \in \Sigma_+(g)$$

tali che

$$I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) \leq \varepsilon, \qquad I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \leq \varepsilon. \tag{20}$$

Ma

$$\varphi_- + \psi_- \in \Sigma_-(f+g), \qquad \varphi_+ + \psi_+ \in \Sigma_+(f+g)$$

e si ha

$$\begin{aligned} I_n(\varphi_+ + \psi_+) - I_n(\varphi_- + \psi_-) &= I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+) - I_n(\varphi_-) - I_n(\psi_-) \\ &= I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

per (20). A maggior ragione dunque

$$I_n^+(f+g) - I_n^-(f+g) \leq 2\varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue che

$$I_n^-(f+g) = I_n^+(f+g)$$

e cioè che $f+g$ è Riemann integrabile. Inoltre, poiché

$$I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_-) = I_n(\varphi_- + \psi_-) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) \leq I_n(\varphi_+ + \psi_+) = I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+)$$

e

$$I_n(\varphi_-) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \leq I_n(\varphi_+), \qquad I_n(\psi_-) \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \leq I_n(\psi_+)$$

si trova anche

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) \right| \leq I_n(\varphi_+) + I_n(\psi_+) - I_n(\varphi_-) - I_n(\psi_-) \leq 2\varepsilon.$$

Invocando nuovamente l'arbitrarietà di ε, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g - \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) = 0$$

ossia
$$\int_{\mathbb{R}^n}(f+g)=\int_{\mathbb{R}^n}f+\int_{\mathbb{R}^n}g.$$

Procedendo in modo analogo, si prova che se $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ allora $\lambda f\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e si ha
$$\int_{\mathbb{R}^n}\lambda f=\lambda\int_{\mathbb{R}^n}f.$$
$\square$

PROPOSIZIONE 1.11. *$\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ è un reticolo rispetto alle operazioni di massimo e di minimo. In altri termini, se $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ allora si ha anche $f\wedge g, f\vee g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE: Siano $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Dato che
$$f\wedge g=-((-f)\vee(-g))$$
sarà sufficiente dimostrare che
$$f\vee g\in\mathcal{R}(\mathbb{R}^n). \tag{21}$$
Per farlo, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon>0$ e consideriamo
$$\varphi_-\in\Sigma_-(f),\quad \varphi_+\in\Sigma_+(f),\quad \psi_-\in\Sigma_-(g),\quad \psi_+\in\Sigma_+(g)$$
tali che
$$I_n(\varphi_+)-I_n(\varphi_-)\le\varepsilon,\qquad I_n(\psi_+)-I_n(\psi_-)\le\varepsilon. \tag{22}$$
Ovviamente
$$\varphi_-\vee\psi_-\in\Sigma_-(f\vee g),\qquad \varphi_+\vee\psi_+\in\Sigma_+(f\vee g).$$
Inoltre, non è difficile verificare che
$$0\le(\varphi_+\vee\psi_+)-(\varphi_-\vee\psi_-)\le\varphi_+-\varphi_-+\psi_+-\psi_-. \tag{23}$$
Infatti:

- Se in un punto si ha $\varphi_+\ge\psi_+$ e $\varphi_-\ge\psi_-$, allora
$$(\varphi_+\vee\psi_+)-(\varphi_-\vee\psi_-)=\varphi_+-\varphi_-\le\varphi_+-\varphi_-+\psi_+-\psi_-;$$
- Se $\varphi_+\le\psi_+$ e $\varphi_-\le\psi_-$, allora
$$(\varphi_+\vee\psi_+)-(\varphi_-\vee\psi_-)=\psi_+-\psi_-\le\varphi_+-\varphi_-+\psi_+-\psi_-;$$
- Se $\varphi_+\ge\psi_+$ e $\varphi_-\le\psi_-$ (quindi anche $\varphi_-\le\psi_+$) , allora
$$\begin{aligned}(\varphi_+\vee\psi_+)-(\varphi_-\vee\psi_-)&=\varphi_+-\psi_-\le\varphi_+-\psi_-+\psi_+-\varphi_-\\&=\varphi_+-\varphi_-+\psi_+-\psi_-;\end{aligned}$$
- Se $\varphi_+\le\psi_+$ e $\varphi_-\ge\psi_-$ (quindi anche $\varphi_+\ge\psi_-$) , allora
$$\begin{aligned}(\varphi_+\vee\psi_+)-(\varphi_-\vee\psi_-)&=\psi_+-\varphi_-\le\psi_+-\varphi_-+\varphi_+-\psi_-\\&=\varphi_+-\varphi_-+\psi_+-\psi_-;\end{aligned}$$

Grazie alle proprietà di linearità e monotonia di cui gode l'operatore I_n, da (23) si ottiene subito

$$0 \leq I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) \leq I_n(\varphi_+) - I_n(\varphi_-) + I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-).$$

Da questa e da (22) troviamo subito che

$$I_n(\varphi_+ \vee \psi_+) - I_n(\varphi_- \vee \psi_-) \leq 2\varepsilon$$

e quindi, a maggior ragione, si ha

$$I_n^+(f \vee g) - I_n^-(f \vee g) \leq 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue ora la (21). □

Come facile conseguenza delle precedenti proposizioni otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 1.12. *Siano $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

(1) *Se $f \geq g$, si ha $\int_{\mathbb{R}^n} f \geq \int_{\mathbb{R}^n} g$;*
(2) *$|f| \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} |f| \geq |\int_{\mathbb{R}^n} f|$.*

DIMOSTRAZIONE: Prima di tutto, Proposizione 1.10 implica che $f - g$ è Riemann integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f - g) = \int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Dopodiché (1) segue subito notando che la funzione identicamente nulla appartiene a $\Sigma_-(f - g)$, quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f - g) = \sup_{\varphi \in \Sigma_-(f-g)} I_n(\varphi) \geq I_n(0) = 0.$$

Per dimostrare (2), osserviamo che

$$|f| = f \vee 0 - f \wedge 0.$$

Proposizione 1.10 e Proposizione 1.11 garantiscono allora che $|f|$ è Riemann integrabile e, tenendo conto anche di (1), si trova

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f \vee 0 + f \wedge 0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 + \int_{\mathbb{R}^n} f \wedge 0 \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \wedge 0 \right| = \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 - \int_{\mathbb{R}^n} f \wedge 0 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f \vee 0 - f \wedge 0 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|.
\end{aligned}$$

□

Definizione 1.9. *Siano dati una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$. Si dice allora che <u>f è Riemann integrabile in A</u> se $f\varphi_A \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$. In tal caso si pone*

$$\int_A f := \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_A$$

L'insieme delle funzioni Riemann integrabili in A è indicato con $\mathcal{R}(A)$.

Osservazione 1.14. *Si può ora facilmente dimostrare che per $\mathcal{R}(A)$ sussistono i risultati corrispondenti a Proposizione 1.10, Proposizione 1.11 e Proposizione 1.12.*

Osservazione 1.15. *Perfino una funzione "molto bella" può risultare non integrabile in un insieme, se quest'ultimo è "sufficientemente brutto". Per esempio, la funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$$

non è integrabile in $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Vale il seguente teorema di integrabilità di una funzione continua.

Teorema 1.1. *Sia A un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che valga la seguente condizione (che riassumeremo dicendo che "∂A ha misura zero"): per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due pluriintervalli aperti a destra P_I e P_E tali che*

$$P_I \subset A \subset P_E, \qquad m_n(P_E \backslash P_I) \leq \varepsilon. \tag{24}$$

Allora ogni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che sia continua in A è anche Riemann integrabile in A.

DIMOSTRAZIONE (di Teorema 1.1): Osserviamo che f è uniformemente continua in A. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$, ogni volta che $x, x' \in A$ soddisfano $|x - x'| \leq \delta$. Ora, presi P_I e P_E come in (24), possiamo supporre (suddividendo gli intervalli, se necessario) che

(i) la famiglia di intervalli $\{D_j\}_{j=1}^N$ costituenti P_I sia una sottofamiglia degli intervalli costituenti P_E, che potremo quindi indicare con $\{D_j\}_{j=1}^{N+k}$;
(ii) il diametro di ogni D_j, con $j = 1, \dots, N$, non superi δ.

Posto

$$M := \max_A |f|$$

definiamo

$$\psi_- := \sum_{j=1}^{N} \left(\min_{\overline{D_j}} f \right) \varphi_{D_j} + \sum_{j=N+1}^{N+k} (-M) \varphi_{D_j}$$

$$\psi_+ := \sum_{j=1}^{N} \left(\max_{\overline{D_j}} f \right) \varphi_{D_j} + \sum_{j=N+1}^{N+k} M \varphi_{D_j}$$

e osserviamo che

$$\psi_- \in \Sigma_-(f \varphi_A), \qquad \psi_+ \in \Sigma_+(f \varphi_A).$$

Se indichiamo con I_0 un qualsiasi intervallo fissato contenente A e scegliamo $\xi_j, \eta_j \in \overline{D_j}$ in modo che

$$f(\xi_j) = \max_{\overline{D_j}} f, \qquad f(\eta_j) = \min_{\overline{D_j}} f,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
I_n^+(f\varphi_A) - I_n^-(f\varphi_A) &\leq I_n(\psi_+) - I_n(\psi_-) \\
&= \sum_{j=1}^N f(\eta_j) m_n(D_j) - \sum_{j=1}^N f(\xi_j) m_n(D_j) + \sum_{j=N+1}^{N+k} 2M\, m_n(D_j) \\
&= \sum_{j=1}^N \left(f(\eta_j) - f(\xi_j)\right) m_n(D_j) + 2M m_n(P_E \backslash P_I) \\
&\leq \varepsilon \sum_{j=1}^N m_n(D_j) + 2\varepsilon M \\
&\leq \varepsilon \left(m_n(I_0) + 2M\right).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $I_n^+(f\varphi_A) = I_n^-(f\varphi_A)$. □

Argomenti intuitivi (agricoli!) a favore della validità delle segunti formule di "integrazione iterata":

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_z} f(x,y,z)\, dxdy \right) dz, \qquad A_z := \{(x,y) \,|\, (x,y,z) \in A\};$$

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y) dx \right) dy, \qquad A_y := \{x \,|\, (x,y) \in A\}; \tag{25}$$

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy, \qquad A_{(x,y)} := \{z \,|\, (x,y,z) \in A\}.$$

Osservazione 1.16. *Il fatto che siano verificate le condizioni per l'esistenza del secondo membro nelle formule precedenti, detto "integrale iterato", non implica, in generale, l'integrabilità di f in A. Per esempio, con riferimento a (25), consideriamo $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che*

$$A_y = \begin{cases} [0,1) & \text{se } y \in [0,1) \cap \mathbf{Q} \\ [1,2) & \text{se } y \in [0,1) \backslash \mathbf{Q} \\ \emptyset & \text{se } y \in \mathbb{R} \backslash [0,1) \end{cases}$$

e sia f la funzione identicamente uguale a 1 in $\mathbb{R}^2$. Vediamo allora subito che $x \mapsto f(x,y)$ è Riemann integrabile in A_y per ogni y e che si ha

$$\int_{A_y} f(x,y) dx = \varphi_{[0,1)}(y), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

In particolare, quindi, anche $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$. Tuttavia la funzione f non è integrabile in A poiché, come si vede facilmente, si ha

$$I_2^-(f\varphi_A) = I_2^-(\varphi_A) = 0, \qquad I_2^+(f\varphi_A) = I_2^+(\varphi_A) = 2.$$

Valgono i seguenti teoremi che dimostreremo in seguito.

Teorema 1.2. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se* $x \mapsto f(x,y)$ *è Riemann integrabile in* $A_y := \{x \,|\, (x,y) \in A\}$, *per ogni* y, *allora la funzione* $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy = \int_A f;$$

(2) *Se* $y \mapsto f(x,y)$ *è Riemann integrabile in* $A_x := \{y \,|\, (x,y) \in A\}$, *per ogni* x, *allora la funzione* $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y)dy$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_x} f(x,y)dy \right) dx = \int_A f.$$

TEOREMA 1.3. *Sia* A *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$ *e sia* $f \in \mathcal{R}(A)$. *Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se* $(x,y) \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_z := \{(x,y) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* z, *allora la funzione* $z \mapsto \int_{A_z} f(x,y,z)dxdy$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_A f;$$

(2) *Se* $(x,z) \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_y := \{(x,z) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* y, *allora la funzione* $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y,z)dxdz$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_y} f(x,y,z)dxdz \right) dy = \int_A f;$$

(3) *Se* $(y,z) \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_x := \{(y,z) \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* x, *allora la funzione* $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y,z)dydz$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_x} f(x,y,z)dydz \right) dx = \int_A f.$$

TEOREMA 1.4. *Sia* A *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$ *e sia* $f \in \mathcal{R}(A)$. *Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se* $z \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(x,y)} := \{z \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* (x,y), *allora la funzione* $(x,y) \mapsto \int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_A f;$$

(2) *Se* $y \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(x,z)} := \{y \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* (x,z), *allora la funzione* $(x,z) \mapsto \int_{A_{(x,z)}} f(x,y,z)dy$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(x,z)}} f(x,y,z)dy \right) dxdz = \int_A f;$$

(3) *Se* $x \mapsto f(x,y,z)$ *è Riemann integrabile in* $A_{(y,z)} := \{x \,|\, (x,y,z) \in A\}$, *per ogni* (y,z), *allora la funzione* $(y,z) \mapsto \int_{A_{(y,z)}} f(x,y,z)dx$ *è Riemann integrabile in* $\mathbb{R}^2$ *e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{A_{(y,z)}} f(x,y,z)dx \right) dydz = \int_A f.$$

Esempi.

Osservazione 1.17. *Sia A una regione "elementare", come per esempio: il rettangolo, il disco, il prisma, il cilindro, il cono, la piramide, la sfera. Allora, com' è facile verificare, ∂A ha misura zero e dunque la funzione identicamente 1 è integrabile secondo Riemann in A (grazie a Teorema 1.1). Il calcolo esplicito di $\int_A 1$ in questi casi elementari conduce a risultati coerenti a quelli noti fin dall'antichità. Questo fatto, insieme con le proprietà generali di $\int_A 1$ (invarianza rispetto ad alcune classi di trasformazioni), costituisce una buona motivazione per la seguente definizione.*

Definizione 1.10. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Riemann (in $\mathbb{R}^n$) se la sua funzione caratteristica è Riemann integrabile in $\mathbb{R}^n$, cioè se la funzione che vale identicamente 1 appartiene a $\mathcal{R}(A)$. In tal caso, si definisce la misura n-dimensionale di A (secondo Riemann) come il numero*

$$m_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_A = \int_A 1.$$

Notazione alternativa: $\mathcal{L}^n(A)$, $\mathcal{H}^n(A)$.

Esempio: la misura del "solido a punta".

DIMOSTRAZIONE (di Teorema 1.2: Sarà sufficiente provare (1), essendo la dimostrazione di (2) identica a quella di (1).

Primo passo: $A = \mathbb{R}^2$. Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare

$$\psi_- \in \Sigma_-(f), \qquad \psi_+ \in \Sigma_+(f)$$

tali che

$$I_2(\psi_+) - I_2(\psi_-) \leq \varepsilon.$$

Senza perdere in generalità possiamo supporre che esse siano combinazione lineare delle stesse funzioni caratteristiche, cioè

$$\psi_- = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{D_j}, \qquad \psi_+ = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{D_j}$$

con

$$D_j = A_j \times B_j, \qquad (A_j, B_j \text{ intervalli aperti a destra in } \mathbb{R}).$$

Osserviamo che , per ogni y fissato, le funzioni $x \mapsto \psi_-(x,y)$ e $x \mapsto \psi_+(x,y)$ sono semplici. Si ha più precisamente

$$\psi_-(\cdot,y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{B_j}(y)\varphi_{A_j}, \qquad \psi_+(\cdot,y) = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{B_j}(y)\varphi_{A_j}.$$

Poiché inoltre

$$\psi_-(\cdot,y) \leq f(\cdot,y) \leq \psi_+(\cdot,y)$$

per ogni y, segue da Proposizione 1.12 che

$$I_1(\psi_-(\cdot,y)) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \leq I_1(\psi_+(\cdot,y))$$

e cioè

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{B_j}(y) m_1(A_j) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \leq \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_{B_j}(y) m_1(A_j)$$

per ogni y. Se poniamo

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx, \qquad \Psi_-(y) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_1(A_j)\varphi_{B_j}(y), \qquad \Psi_+(y) := \sum_{j=1}^{N} \mu_j m_1(A_j)\varphi_{B_j}(y)$$

allora si ha

$$\Psi_- \in \Sigma_-(F), \qquad \Psi_+ \in \Sigma_+(F).$$

Osservando che

$$I_1(\Psi_-) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_1(A_j) m_1(B_j) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m_1(D_j) = I_2(\psi_-)$$

e

$$I_1(\Psi_+) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j m_1(A_j) m_1(B_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j m_1(D_j) = I_2(\psi_+)$$

troviamo prima di tutto che

$$I_1^+(F) - I_1^-(F) \le I_1(\Psi_+) - I_1(\Psi_-) = I_2(\psi_+) - I_2(\psi_-) \le \varepsilon$$

e cioè, essendo ε arbitrario, che F è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$. Inoltre

$$I_2(\psi_-) \le I_1(\Psi_-) \le \int_{\mathbb{R}} F \le I_1(\Psi_+) \le I_2(\psi_+).$$

Poiché si ha anche

$$I_2(\psi_-) \le \int_{\mathbb{R}^2} f \le I_2(\psi_+)$$

si ottiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f - \int_{\mathbb{R}} F \right| \le \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} F.$$

Ciò conclude la dimostrazione di (1), nel caso $A = \mathbb{R}^2$.

Secondo passo: $A \subset \mathbb{R}^2$ qualsiasi. In tal caso, basta applicare il primo passo alla funzione $f\varphi_A$ dopo aver osservato che

(i) $f\varphi_A$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}^2$;
(ii) $x \mapsto (f\varphi_A)(x,y)$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$. Infatti si ha

$$\varphi_A(x,y) = \varphi_{A_y}(x)$$

e inoltre, per ogni y, la funzione $f(\cdot,y)\varphi_{A_y}$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ per ipotesi.

Se ne deduce che

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\varphi_A(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\varphi_{A_y}(x)dx = \int_{A_y} f(x,y)dx$$

è Riemann integrabile e si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{A_y} f(x,y)dx\right)dy &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\varphi_A(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f\varphi_A\\ &= \int_A f.\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 1.18. *L'argomento usato per la dimostrazione precedente si adatta in modo naturale e semplice per provare Teorema 1.3 e Teorema 1.4.*

Osservazione 1.19. *Considerata una funzione $f : \Omega \to [0, +\infty)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, definiamo il suo "sottografico":*

$$S_f := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \Omega,\ 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

Vale la seguente

Proposizione 1.13. *Sia S_f è misurabile secondo Riemann. Allora f è integrabile in Ω e si ha*

$$\int_\Omega f = m_3(S_f).$$

DIMOSTRAZIONE: Poiché

$$(S_f)_{(x,y)} = \begin{cases} [0, f(x,y)] & se\ (x,y) \in \Omega \\ \emptyset & se\ (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

risulta banalmente che la funzione $z \mapsto 1$ è Riemann integrabile in $(S_f)_{(x,y)}$, per ogni (x,y). Dal Teorema 1.4 segue subito che

$$(x,y) \mapsto \int_{(S_f)_{(x,y)}} 1\, dz = f(x,y)\varphi_\Omega(x,y)$$

è a sua volta Riemann integrabile in $\mathbb{R}^2$ e si ha

$$m_3(S_f) = \int_{S_f} 1 = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{(S_f)_{(x,y)}} 1\, dz\right)dxdy = \int_\Omega f(x,y)\, dxdy. \tag{26}$$

$\square$

Un caso notevole in cui S_f risulta misurabile secondo Riemann (e vale quindi la formula (39)), si verifica quando f è continua e Ω è un compatto con frontiera di misura zero. Più precisamente:

- *La continuità di f e la compattezza di Ω, insieme, implicano che S_f è compatto;*
- *Le stesse ipotesi su f, Ω e l'ulteriore assunzione che $\partial\Omega$ abbia misura zero comportano facilmente che ∂S_f ha misura zero;*
- *La conclusione segue subito da Teorema 1.1.*

Dimostrazione di $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \pi^{1/2}$.

INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA: [**1**] è un possibile testo di riferimento per la teoria dell'integrazione secondo Riemann, coerente con l'esposizione fattane a lezione e in queste note.

4. Integrale su una superficie

PROPOSIZIONE 1.14. *Poniamo:*

$$\mathbb{P}(u,v) := \{ru + sv \,|\, r, s \in [0,1]\}, \qquad \textit{per } u, v \in \mathbb{R}^n \ (n = 2, 3)$$

e

$$\mathbb{P}(u,v,w) := \{ru + sv + tw \,|\, r, s, t \in [0,1]\}, \qquad \textit{per } u, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

allora si ha:

$$m_2\left(\mathbb{P}(u,v)\right) = \begin{cases} \|u \times v\| & \textit{se } u, v \in \mathbb{R}^3 \\ |\det(u|v)| & \textit{se } u, v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

e

$$m_3\left(\mathbb{P}(u,v,w)\right) = |(u \times v) \bullet w| = |\det(u|v|w)|, \qquad \textit{se } u, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

DIMOSTRAZIONE: La prima formula segue subito dalla definizione di prodotto vettoriale data nel corso di Fisica.

La seconda formula si ottiene dalla prima, come segue. Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, poniamo

$$\tilde{u} := (u_1, u_2, 0), \qquad \tilde{v} = (v_1, v_2, 0).$$

Allora, per la prima formula, si ha

$$m_2\left(\mathbb{P}(u,v)\right) = m_2\left(\mathbb{P}(\tilde{u},\tilde{v})\right) = \|(u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0)\| = |\det(u|v)|.$$

Per provare la terza formula, osserviamo che la misura della proiezione di w nella direzione ortogonale al piano generato da u e v è data da

$$H := \left| w \bullet \frac{u \times v}{\|u \times v\|} \right|.$$

Quindi, di nuovo ricordando la prima formula, troviamo

$$m_3\left(\mathbb{P}(u,v,w)\right) = H\, m_2\left(\mathbb{P}(u,v)\right) = |w \bullet (u \times v)|.$$

La conclusione segue facilmente ricordando la formula per il calcolo del prodotto vettoriale attraverso il determinante formale. $\square$

Esempi di parametrizzazione di una superficie (grafico di una funzione di due variabili, grafici di rotazione, sfera, cono).

OSSERVAZIONE 1.20. *Ogni superficie liscia ammette parametrizzazioni non liscie. Inoltre esistono superfici non liscie con parametrizzazioni liscie (esempio: $\varphi(s,t) := (s^3, s^2, t)$, $(s,t) \in [-1,1]^2$).*

Nella seguente proposizione si introduce una condizione di regolarità (omologa a quella delle curve) e si dimostra come essa serva a prevenire situazioni come quella descritta nella precedente osservazione.

PROPOSIZIONE 1.15. *Sia $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, con A un aperto di $\mathbb{R}^2$, mappa di classe C^1 soddisfacente la seguente condizione (detta di regolarità):*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(P) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(P) \neq 0 \tag{27}$$

per ogni $P \in A$. Allora $\varphi(A)$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1.

DIMOSTRAZIONE: Sia $(s_0, t_0) \in A$. Per (27), deve essere verificata almeno una delle seguenti equazioni:

$$\det \left(\nabla \varphi_1(s_0, t_0) \middle| \nabla \varphi_2(s_0, t_0)\right) \neq 0 \tag{28}$$

$$\det \left(\nabla \varphi_1(s_0, t_0) \middle| \nabla \varphi_3(s_0, t_0)\right) \neq 0 \tag{29}$$

$$\det \left(\nabla \varphi_2(s_0, t_0) \middle| \nabla \varphi_3(s_0, t_0)\right) \neq 0. \tag{30}$$

Proveremo adesso che se è verificata (28), allora, vicino a $P_0 := \varphi(s_0, t_0)$, l'immagine $\varphi(A)$ è grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile (x, y).

In tal caso infatti, per il teorema di invertibilità locale (che è una facile conseguenza del teorema delle funzioni implicite di Dini; vedasi [**1, 2**]), deve esistere un intorno U di (s_0, t_0), $U \subset A$, tale che

$$\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)|U : U \to V := \Phi(U)$$

è invertibile con inversa di classe C^1. A questo punto è facile verificare che $\varphi(U)$ è grafico di una funzione di classe C^1 e precisamente di

$$\varphi_3 \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}.$$

Infatti, dire che $(x, y, z) \in \varphi(U)$ equivale a dire che

$$(x, y) = \Phi(s, t), \qquad z = \varphi_3(s, t)$$

per un certo $(s, t) \in U$, il che implica subito $z = \varphi_3 \circ \Phi^{-1}(x, y)$.

Analogamente si può provare che se è verificata (29) (risp. (30)), allora, vicino a P_0, l'immagine $\varphi(A)$ è grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile (x, z) (risp. (y, z)). $\square$

OSSERVAZIONE 1.21. *Sia I un intorno di 0 in $\mathbb{R}$ e*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$$

una curva derivabile in 0. Sia poi A un intorno di $\gamma(0)$ e

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : A \to \mathbb{R}^3$$

una mappa differenziabile in $\gamma(0)$. Allora, per $j = 1, 2, 3$, la funzione $\varphi_j \circ \gamma$ è derivabile in 0 e si ha

$$(\varphi_j \circ \gamma)'(0) = \nabla \varphi_j(\gamma(0)) \bullet \gamma'(0).$$

In altri termini, il campo $\varphi \circ \gamma$ è derivabile in 0 e se $d\varphi_{(s_0,t_0)}$ indica il differenziale di φ in (s_0, t_0), cioè la matrice

$$d\varphi_{(s_0,t_0)} := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \,\middle|\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right)$$

allora

$$
\begin{aligned}
(\varphi\circ\gamma)'(0) &= (\nabla\varphi_1(\gamma(0))\bullet\gamma'(0), \nabla\varphi_2(\gamma(0))\bullet\gamma'(0), \nabla\varphi_3(\gamma(0))\bullet\gamma'(0)) \\
&= d\varphi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\
&= \gamma_1'(0)\frac{\partial\varphi}{\partial s}(\gamma(0)) + \gamma_2'(0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\gamma(0)).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Proposizione 1.16. *Sia A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e*

$$\varphi : A \to \mathbb{R}^3$$

una mappa tale che

(i) *φ sia differenziabile in $(s_0, t_0) \in A$;*
(ii) *la condizione di regolarità sia verificata in (s_0, t_0), i.e.*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \neq 0.$$

Allora:

(1) *lo spazio vettoriale $d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$ ha dimensione due e una sua base è data da*

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0)\right\};$$

(2) *$v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$ se e soltanto se esiste*

$$\gamma : I \to A$$

dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intorno di 0, derivabile in 0 e tale che

$$\gamma(0) = (s_0, t_0), \qquad (\varphi\circ\gamma)'(0) = v. \tag{32}$$

DIMOSTRAZIONE: (1) Segue banalmente da (ii) e dalla definizione di $d\varphi_{(s_0,t_0)}$.

(2) Sia $v \in d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$, cioè $v = d\varphi_{(s_0,t_0)}(w)$ per un certo $w \in \mathbb{R}^2$. Se poniamo ($\varepsilon > 0$, sufficientemente piccolo)

$$\gamma(\rho) := (s_0,t_0) + \rho w, \quad \rho \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

e ci ricordiamo della formula (31), otteniamo subito che vale (32).

Anche il viceversa è una conseguenza, stavolta immediata, di (31). □

Proposizione 1.17. *Siano A e B sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^2$ e*

$$\varphi : A \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi : B \to \mathbb{R}^3$$

mappe iniettive di classe C^1, entrambe soddisfacenti la condizione di regolarità. Supponiamo inoltre che

$$\varphi(A) = \psi(B).$$

Allora, se $(s_0,t_0) \in A$ e $(u_0,v_0) \in B$ sono tali che

$$\varphi(s_0,t_0) = \psi(u_0,v_0)$$

si ha

$$d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2) = d\psi_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2).$$

DIMOSTRAZIONE: Fissato arbitrariamente $w \in \mathbb{R}^2$, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, possiamo definire

$$\lambda(\rho) := \psi^{-1} \circ \varphi((s_0,t_0) + \rho w), \qquad \rho \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Allora $\lambda(0) = (u_0, v_0)$ e inoltre, mediante un argomento simile a quello invocato in Proposizione 1.6, si può dimostrare che λ è derivabile in 0.

Poiché

$$\varphi((s_0,t_0) + \rho w) = \psi \circ \lambda(\rho), \qquad \rho \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

si ottiene che

$$d\varphi_{(s_0,t_0)}(w) = d\psi_{(u_0,v_0)}(\lambda'(0)).$$

Così l'inclusione

$$d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2) \subset d\psi_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2)$$

segue dall'arbitrarietà di $w \in \mathbb{R}^2$, mentre quella opposta si ricava scambiando i ruoli di φ e ψ. $\square$

La Proposizione 1.16 motiva la seguente definizione, che risulta ben posta per Proposizione 1.17.

DEFINIZIONE 1.11. *Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ una mappa iniettiva di classe C^1 soddisfacente la condizione di regolarità. Allora, per $(s_0,t_0) \in A$, lo spazio vettoriale bidimensionale $d\varphi_{(s_0,t_0)}(\mathbb{R}^2)$ è denominato piano tangente a $S := \varphi(A)$ in $P_0 := \varphi(s_0,t_0)$ e viene indicato con la notazione $T_{P_0}S$. Ogni suo elemento viene detto vettore tangente a S in P_0.*

Vogliamo definire l'integrale di una funzione su una superficie e, in particolare, una nozione di misura delle superfici che estenda coerentemente l'area nota di superfici "elementari" come la porzione poligonale di piano, il cono, il cilindro o la sfera. Volendo riprendere l'idea di considerare le superfici poliedrali (triangolari), ci si deve ricordare dell'esempio di Schwarz (vedi Oss. 1.5). Esso ci indica che i triangoli debbono essere scelti di modo che, passando al limite, essi tendano a disporsi "in posizione tangente".

OSSERVAZIONE 1.22. *Sia $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, una mappa che supporremo iniettiva, regolare e di classe C^1. Preso $(s_0,t_0) \in A$, siano poi $T(\varepsilon)$ e $T_\varphi(\varepsilon)$, rispettivamente, il triangolo interno ad A di vertici (s_0,t_0), $(s_0+\varepsilon,t_0)$, $(s_0,t_0+\varepsilon)$ e quello inscritto in*

$$S := \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$$

di vertici $\varphi(s_0,t_0)$, $\varphi((s_0+\varepsilon,t_0)$, $\varphi((s_0,t_0+\varepsilon)$. Le ben note uguaglianze

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(s_0+\varepsilon,t_0) - \varphi(s_0,t_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(s_0,t_0+\varepsilon) - \varphi(s_0,t_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0).$$

ci mostrano che il triangolo $T_\varphi(\varepsilon)$ tende (quando $\varepsilon \to 0$) a disporsi "in posizione tangente" a S in $\varphi(s_0,t_0)$. Inoltre si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_2(T_\varphi(\varepsilon))}{m_2(T(\varepsilon))} = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) \right\|. \tag{33}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\frac{m_2(T_\varphi(\varepsilon))}{m_2(T(\varepsilon))} &= \frac{\|[\varphi(s_0+\varepsilon,t_0)-\varphi(s_0,t_0)]\times[\varphi(s_0,t_0+\varepsilon)-\varphi(s_0,t_0)]\|/2}{\varepsilon^2/2} \\ &= \left\|\frac{\varphi(s_0+\varepsilon,t_0)-\varphi(s_0,t_0)}{\varepsilon}\times\frac{\varphi(s_0,t_0+\varepsilon)-\varphi(s_0,t_0)}{\varepsilon}\right\|\end{aligned}$$

per Proposizione 1.14. Il numero al secondo membro di (33) si candida dunque ad essere il "fattore di trasformazione dell'area" indotto da φ in (s_0, t_0).

Ci aspettiamo quindi che, data una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ e sotto opportune ulteriori ipotesi, il numero

$$\int_C f\circ\varphi\,\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|$$

costituisca il candidato naturale per la definizione dell'integrale su S di f.

Esempio: l'area "presunta" della sfera coincide con quella nota elementarmente.

Nella seguente definizione si precisa la natura del dominio di integrazione, per l'integrale di superficie.

Definizione 1.12. *Diremo che $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ è una* <u>*parametrizzazione regolare (di superficie)*</u> *se*

(i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera è una curva regolare a tratti;*
(ii) *φ è continua;*
(iii) *$\varphi|A$ è iniettiva, di classe C^1 e la mappa*

$$P \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial u}(P)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(P), \qquad P\in A$$

è limitata e sempre diversa da zero;
(iv) *se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una parametrizzazione regolare a tratti tale che $\gamma([a,b]) = \partial C$, allora $\varphi\circ\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione regolare a tratti.*

Una <u>*superficie regolare*</u> *è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ per cui esiste una parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(C)$.*

Questa definizione si estende naturalmente al caso "regolare a tratti", come segue.

Definizione 1.13. *Una* <u>*parametrizzazione regolare a tratti (di superficie)*</u> *è una mappa*

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3$$

tale che $\varphi|(C\setminus\partial C)$ è iniettiva e gode della seguente ulteriore proprietà. Esistono $C_1,\dots,C_N$ insiemi compatti tali che

(i) *$C = \cup_{j=1}^N C_j$;*
(ii) *$C_i\cap C_j = \partial C_i\cap\partial C_j$, se $i\neq j$;*
(iii) *per ogni $j = 1,\dots,N$, la mappa $\varphi|C_j$ è una parametrizzazione regolare.*

Ogni sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ per cui esiste una parametrizzazione regolare a tratti $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(C)$ è detto superficie regolare a tratti.

Vale il seguente risultato sull'indipendenza dalla parametrizzazione, omologo di Proposizione 1.6 per le curve.

Proposizione 1.18. *Se $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$, $\psi : K \to \mathbb{R}^3$ sono parametrizzazioni regolari a tratti tali che*

$$\varphi(C) = \psi(K)$$

e se è data una qualsiasi funzione continua

$$f : \varphi(C) = \psi(K) \to \mathbb{R},$$

allora si ha

$$\int_C f \circ \varphi \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \int_K f \circ \psi \left\| \frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|.$$

La seguente definizione è ben posta, in virtù di Proposizione 1.18.

Definizione 1.14. *Siano S una superficie regolare a tratti e $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'integrale di f su S è il numero*

$$\int_S f := \int_C f \circ \varphi \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

dove $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ è una qualsiasi parametrizzazione regolare a tratti tale che $\varphi(C) = S$. In particolare, si può definire l'area di S:

$$m_2(S) := \int_S 1 = \int_C \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

Notazione alternativa: $\int_S f \, d\sigma$, $\int_S f \, d\mathcal{H}^2$.

Osservazione 1.23. *La definizione precedente di misura di una superficie gode delle proprietà naturalmente attese per questa nozione. Per esempio, per le superfici di cui sia nota elementarmente l'area (una porzione poligonale di piano, un cilindro, un cono, una sfera, ...), allora tale area coincide con la corrispondente misura m_2. Inoltre, si prova molto facilmente che*

$$m_2(S + v) = m_2(S)$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ (invarianza rispetto alla traslazione) e

$$m_2(\lambda S) = \lambda^2 m_2(S)$$

per ogni numero reale non nullo λ (invarianza rispetto alle omotetie).

Osservazione 1.24. *Per dare la Definizione 1.14, nel caso regolare, sono sufficienti ipotesi più deboli di quelle previste dalla nostra definizione di superficie regolare (a tratti). Più precisamente essa potrebbe essere sostituita dalla versione debole sottostante (che distingueremo aggiungendo il simbolo *). La più forte Definizione 1.12 tornerà utile nella trattazione dei teoremi di Gauss, Green e Stokes.*

Definizione 1.15. *Diremo che $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione regolare* (di superficie) se*

(i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A con frontiera con frontiera di misura zero;*
(ii) *φ è continua;*
(iii) *$\varphi|A$ è iniettiva, di classe C^1 e la mappa*

$$P \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial u}(P) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(P), \qquad P \in A$$

è limitata e sempre diversa da zero.

Una superficie regolare è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ per cui esiste una parametrizzazione regolare* $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(C)$.*

Osservazione 1.25. *Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto la cui frontiera abbia misura zero. Sia poi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in C. Allora*

(1) *f è integrabile in C (per il Teorema 1.1);*
(2) *l'insieme $\widetilde{C} := \{(x, y, 0) \,|\, (x, y) \in C\}$ è una superficie regolare (con parametrizzazione scontata: $\varphi(s, t) := (s, t, 0)$, $(s, t) \in C$);*
(3) *se si considera la funzione continua $\widetilde{f} : \widetilde{C} \to \mathbb{R}$ definita come segue*

$$\widetilde{f}(x, y, z) := f(x, y)$$

e si applica Definizione 1.14 tenendo conto di Osservazione 1.24, si trova

$$\int_{\widetilde{C}} \widetilde{f} = \int_C (\widetilde{f} \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = \int_C f. \tag{34}$$

Quest'ultima uguaglianza ci permette di interpretare l'integrale d'area come integrale di superficie.

Osservazione 1.26. *Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera abbia misura zero. Consideriamo una mappa $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ continua tale che $\Phi|A$ sia iniettiva e di classe C^1. Supponiamo inoltre che la mappa*

$$P \mapsto \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(P) \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial v}(P) \right), \qquad P \in A$$

sia limitata e sempre diversa da zero. Infine assumiamo che la frontiera di $\Phi(C)$ abbia misura zero. La mappa

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(P) := (\Phi_1(P), \Phi_2(P), 0)$$

soddisfa

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \right|.$$

ed è una parametrizzazione regolare. Se ora consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in $\Phi(C)$ e poniamo

$$\tilde{f}(x, y, z) := f(x, y), \qquad (x, y) \in \Phi(C)$$

possiamo osservare che $\tilde{f} \circ \varphi = f \circ \Phi$. Ricordando (34), si ottiene di conseguenza

$$\int_{\Phi(C)} f = \int_{\varphi(C)} \tilde{f} = \int_C (\tilde{f} \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \int_C (f \circ \Phi) \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \right|.$$

Questa uguaglianza, che riformuleremo e proveremo in seguito sotto ipotesi più generali, è la cosiddetta "formula per il cambiamento di variabile nell'integrale".

Definizione 1.16. *Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e*

$$\Phi : A \to \mathbb{R}^n$$

una mappa di classe C^1. Si chiama fattore di trasformazione della misura (associato a Φ) la funzione continua $J\Phi : A \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$J\Phi := \begin{cases} \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right|, & \text{se } n = 2 \\ \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\middle|\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\right|, & \text{se } n = 3. \end{cases}$$

Ecco la versione della formula per il cambiamento di variabile negli integrali d'area e di volume, di cui daremo una dimostrazione in seguito.

Teorema 1.5. *Sia A un sottoinsieme aperto e misurabile di $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e sia*

$$\Phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^n$$

una mappa continua tale che:

(i) *$\Phi|A$ è iniettiva e di classe C^1 con derivate parziali uniformemente continue;*
(ii) *la funzione $J(\Phi|A)$ è sempre diversa da zero.*

Allora l'insieme $\Phi(A)$ è misurabile e, se $f : \Phi(\overline{A}) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, vale la seguente uguaglianza

$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi)\, J\Phi.$$

Esempi

DIMOSTRAZIONE di Teorema 1.5 (Sketch): Esporremo l'argomento dimostrativo nell'ipotesi che sia $n = 2$ (per $n = 3$ il ragionamento è identico) e $f \equiv 1$ (l'estensione alle funzioni semplici e in seguito al caso generale non è difficile). In quanto segue, un triangolo di vertici P, Q, R verrà denotato col simbolo $[\![P; Q; R]\!]$.

Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, consideriamo la rete a maglia quadrata di lato ε (supponiamo che l'origine ne sia un nodo). Indichiamo poi con $\{(s_j, t_j)\}$ tutti i nodi di questa rete per i quali accade che entrambi i triangoli

$$A_j := [\![(s_j, t_j); (s_j + \varepsilon, t_j); (s_j, t_j + \varepsilon)]\!] \quad \text{e} \quad B_j := [\![(s_j, t_j); (s_j - \varepsilon, t_j); (s_j, t_j - \varepsilon)]\!]$$

sono inclusi in A.

Poniamo anche

$$A_j^\Phi := [\![\Phi(s_j, t_j); \Phi(s_j + \varepsilon, t_j); \Phi(s_j, t_j + \varepsilon)]\!], \qquad B_j^\Phi := [\![\Phi(s_j, t_j); \Phi(s_j - \varepsilon, t_j); \Phi(s_j, t_j - \varepsilon)]\!].$$

Allora si ha

$$\left|\int_{\Phi(A)} f \; - \int_A (f \circ \Phi)\, J\Phi\right| = \left|m_2(\Phi(A)) - \int_A J\Phi\right| \le I_1 + I_2 + L_1 + L_2 \tag{35}$$

dove

$$I_1 = I_1(\varepsilon) := \Big| m_2(\Phi(A)) - \sum_j m_2(A_j^\Phi) - \sum_j m_2(B_j^\Phi) \Big|,$$

$$I_2 = I_2(\varepsilon) := \Big| \sum_j \int_{A_j} J\Phi + \sum_j \int_{B_j} J\Phi - \int_A J\Phi \Big|$$

e

$$L_1 = L_1(\varepsilon) := \sum_j \Big| m_2(A_j^\Phi) - \int_{A_j} J\Phi \Big|, \qquad L_2 = L_2(\varepsilon) := \sum_j \Big| m_2(B_j^\Phi) - \int_{B_j} J\Phi \Big|.$$

Per Proposizione 1.14 si ha

$$\begin{aligned} m_2(A_j^\Phi) - \int_{A_j} J\Phi &= \frac{|\det[\Phi(s_j+\varepsilon,t_j) - \Phi(s_j,t_j) \,|\, \Phi(s_j,t_j+\varepsilon) - \Phi(s_j,t_j)]|}{2} - \int_{A_j} J\Phi \\ &= \frac{1}{2}\Big| \det\Big[\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_j,t_j) + o(\varepsilon) \,\Big|\, \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s_j,t_j) + o(\varepsilon) \Big] \Big| - \int_{A_j} J\Phi \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \Big| \det\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_j,t_j) \,\Big|\, \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s_j,t_j) \Big] \Big| + o(\varepsilon^2) - \int_{A_j} J\Phi \\ &= m_2(A_j) J\Phi(s_j,t_j) + m_2(A_j) \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} - \int_{A_j} J\Phi \end{aligned}$$

e anzi non è difficile dimostrare che il valore assoluto dell'infinitesimo $o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2$, presente in quest'ultima espressione, si può maggiorare con un infinitesimo $\sigma(\varepsilon)$ indipendente da j, sicché

$$\begin{aligned} \Big| m_2(A_j^\Phi) - \int_{A_j} J\Phi \Big| &\le \Big| m_2(A_j) J\Phi(s_j,t_j) - \int_{A_j} J\Phi \Big| + m_2(A_j)\sigma(\varepsilon) \\ &= \Big| \int_{A_j} J\Phi(s_j,t_j) - J\Phi \Big| + m_2(A_j)\sigma(\varepsilon) \\ &\le \int_{A_j} |J\Phi(s_j,t_j) - J\Phi| + m_2(A_j)\sigma(\varepsilon). \end{aligned}$$

Pertanto

$$L_1 \le \sum_j \int_{A_j} |J\Phi(s_j,t_j) - J\Phi| + \sigma(\varepsilon) \sum_j m_2(A_j) \le \sum_j \int_{A_j} |J\Phi(s_j,t_j) - J\Phi| + \sigma(\varepsilon) m_2(A)$$

da cui, richiamando anche l'uniforme continuità di $J\Phi$, segue subito

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} L_1(\varepsilon) = 0.$$

Con lo stesso ragionamento si trova anche

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} L_2(\varepsilon) = 0.$$

Dall'ipotesi di misurabilità di A (i.e. dall'integrabilità di φ_A) si deduce poi facilmente che "∂A ha misura zero"e quindi

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m_2\Big(A \backslash \bigcup_j (A_j \cup B_j) \Big) = 0.$$

Analogamente (una volta provato che $\Phi(A)$ è misurabile) si trova

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m_2\Big(\Phi(A) \backslash \bigcup_j (A_j^\Phi \cup B_j^\Phi) \Big) = 0.$$

Queste ultime due uguaglianze implicano subito che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_1(\varepsilon) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_2(\varepsilon) = 0.$$

La conclusione segue finalmente da (35). $\square$

Definizione 1.17. *Una superficie regolare orientatata è una coppia (S, N) tale che:*

(i) *S è una superficie regolare;*
(ii) *$N : S \to \mathbb{R}^3$ è un campo ortogonale a S, unitario e continuo.*

Esempio di S liscia per la quale non esiste N tale che (S, N) è una superficie regolare orientata: il nastro di Moebius.

Definizione 1.18. *Siano (S, N) e $F : S \to \mathbb{R}^3$, rispettivamente, una superficie regolare orientatata e un campo continuo di vettori. Allora l'integrale di F su (S, N) è definito come segue:*

$$\int_{(S,N)} F := \int_S F \bullet N.$$

Notazione alternativa: $\int_{\overline{S}} F \bullet d\sigma$.

Osservazione 1.27. *Sia (S, N) una superficie regolare orientata e sia φ una parametrizzazione regolare di S. Allora, in virtù di Proposizione 1.16(1), si ha*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sigma \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\| N \circ \varphi$$

dove σ vale identicamente 1 (risp. -1) se i vettori collineari

$$N \circ \varphi, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

hanno verso coincidente (risp. opposto). Ne segue che

$$\int_{(S,N)} F = \int_A (F \circ \varphi) \bullet (N \circ \varphi) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \sigma \int_A (F \circ \varphi) \bullet \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right).$$

Osserviamo che nel caso particolare che S sia il grafico di una funzione f di classe C^1 e considerata la parametrizzazione "naturale"

$$\varphi(s, t) := (s, t, f(s, t)),$$

si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Big(-\frac{\partial f}{\partial s}, -\frac{\partial f}{\partial t}, 1 \Big).$$

5. Teoremi di Gauss, Green, Stokes

Enunceremo ora il Teorema di Gauss della divergenza ($n = 2, 3$), di cui daremo la dimostrazione in una delle prossime lezioni.

Teorema 1.6 (Gauss). *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ compatto, chiusura di un insieme aperto A con frontiera regolare a tratti. Indichiamo con N il campo normale a ∂C uscente da C e sia $F : C \to \mathbb{R}^n$ continuo, di classe C^1 in A e con derivate parziali limitate. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\partial C} F \bullet N = \int_C \operatorname{div} F.$$

Osservazione 1.28. *Consideriamo il caso $n = 2$ e supponiamo che C e F soddisfino alle ipotesi di Teorema 1.6. Indichiamo con τ il campo unitario tangente che orienta positivamente ∂C, cioè quello ottenuto ruotando N (il campo normale a ∂C uscente da C) di $\pi/2$ in senso antiorario. Allora il Teorema di Gauss implica che*

$$\int_{\partial C} F \bullet \tau = \int_{\partial C} F \bullet RN = \int_{\partial C} RF \bullet R(RN) = \int_{\partial C} (F_2, -F_1) \bullet N = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Vale pertanto il seguente risultato.

Teorema 1.7 (Green). *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ compatto, chiusura di un insieme aperto A con frontiera regolare a tratti. Indichiamo con τ il campo unitario tangente che orienta positivamente ∂C e sia $F : C \to \mathbb{R}^2$ continuo, di classe C^1 in A e con derivate parziali limitate. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\partial C} F \bullet \tau = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Frontiera orientata $\partial \overline{S}$ di una superficie regolare a tratti orientata $\overline{S} = (S, N)$ tale che ∂S è regolare a tratti.

Teorema 1.8 (Stokes). *Sia $\overline{S} = (S, N)$ una superficie regolare orientata tale che ∂S è regolare a tratti. Allora, se $F : A \to \mathbb{R}^3$ è un campo di classe C^1, con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e $S \subset A$, si ha*

$$\int_{\overline{S}} \operatorname{rot} F = \int_{\partial \overline{S}} F.$$

Due dimostrazioni della formula dell'area dell'ellisse:

(1) mediante la formula per il cambiamento di variabile negli integrali;
(2) mediante il teorema di Green.

Esempi.

Prima di dimostrare il Teorema 1.6 di Gauss, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.19. *Un insieme compatto $C \subset \mathbb{R}^3$ si dice semplice se esso è la chiusura di un aperto A e se nelle direzioni degli assi coordinati è compreso fra grafici di funzioni lisce a tratti, cioè*

$$\begin{aligned} C &= \left\{ (x, y, z) \,|\, a(x, y) \leq z \leq b(x, y), \quad (x, y) \in \overline{A^{(z)}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \,|\, c(x, z) \leq y \leq d(x, z), \quad (x, z) \in \overline{A^{(y)}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \,|\, e(y, z) \leq x \leq f(y, z), \quad (y, z) \in \overline{A^{(x)}} \right\} \end{aligned}$$

dove $A^{(x)}$, $A^{(y)}$, $A^{(z)}$ sono le proiezioni ortogonali di A, rispettivamente nei piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e inoltre:

- *le funzioni a, b sono continue in $\overline{A^{(z)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(z)}$;*
- *le funzioni c, d sono continue in $\overline{A^{(y)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(z)}$;*
- *le funzioni e, f sono continue in $\overline{A^{(x)}}$ e di classe C^1 a tratti in $A^{(x)}$.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS (per $n = 3$): Ci limiteremo a dimostrare il teorema per insiemi C che sono unione finita di insiemi semplici.

Passo 1: C semplice.

Dimostreremo che si hanno le seguenti uguaglianze

$$\int_C \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int_{\partial C} F_1 N_1, \qquad \int_C \frac{\partial F_2}{\partial y} = \int_{\partial C} F_2 N_2, \qquad \int_C \frac{\partial F_3}{\partial z} = \int_{\partial C} F_3 N_3 \tag{36}$$

dalle quali, sommando, si ottiene subito la formula di Gauss. Cominciamo col provare la terza uguaglianza. Si ha

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial F_3}{\partial z} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{C_{(x,y)}} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy = \int_{A^{(z)}} \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \int_{A^{(z)}} F_3(x, y, b(x, y)) - F_3(x, y, a(x, y))\, dxdy \end{aligned} \tag{37}$$

per Teorema 1.4. Indichiamo con G_a e G_b rispettivamente i grafici di a e di b e poniamo

$$S := \partial C \backslash (G_a \cup G_b).$$

Per $(x, y) \in \overline{A^{(z)}}$ definiamo inoltre

$$\varphi(x, y) := (x, y, a(x, y)), \qquad \psi(x, y) := (x, y, b(x, y))$$

e osserviamo che

$$N_3 | S \equiv 0, \qquad (N_3 \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = -1, \qquad (N_3 \circ \psi) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| = 1.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} F_3 N_3 &= \int_{G_a} F_3 N_3 + \int_{G_b} F_3 N_3 \\ &= \int_{A^{(z)}} (F_3 \circ \varphi)(N_3 \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| + \int_{A^{(z)}} (F_3 \circ \psi)(N_3 \circ \psi) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| \\ &= \int_{A^{(z)}} F_3 \circ \psi - F_3 \circ \varphi \end{aligned}$$

da cui, tenuto conto di (37), segue la terza uguaglianza di (36). Lo stesso ragionamento permette di dimostrare le prime due uguaglianze di (36). Come abbiamo già spiegato sopra, a questo punto si conclude sommando le tre uguaglianze di (36).

Passo 2: $C = \cup_{j=1}^h C_j$, dove i C_j sono semplici e si intersecano al più in regioni di frontiera, e cioè

$$C_j \cap C_k = \partial C_j \cap \partial C_k \qquad (j \neq k).$$

Per illustrare il regionamento, sarà sufficiente capire il caso $h = 2$. Supponiamo pertanto che $C = C_1 \cup C_2$, con C_1, C_2 insiemi semplici tali che

$$C_1 \cap C_2 = \partial C_1 \cap \partial C_2.$$

Se indichiamo con N' e N'' rispettivamente i campi normali a ∂C_1 e ∂C_2, uscenti da C_1 e C_2, e poniamo

$$I := \partial C_1 \cap \partial C_2, \qquad \partial^* C_1 := \partial C_1 \backslash I, \qquad \partial^* C_2 := \partial C_2 \backslash I$$

allora si vede subito che

- $N''|I = -N'|I$, cioè $N' + N'' \equiv 0$ in I;
- $\partial^* C_1 \cap \partial^* C_2 = \emptyset$ e $\partial^* C_1 \cup \partial^* C_2 = \partial C$;
- $N|\partial^* C_1 = N'|\partial^* C_1$ e $N|\partial^* C_2 = N''|\partial^* C_2$.

Otteniamo così, tenendo conto anche di quanto dimostrato nel primo passo, che vale

$$\begin{aligned}
\int_C \operatorname{div} F &= \int_{C_1} \operatorname{div} F + \int_{C_2} \operatorname{div} F = \int_{\partial C_1} F \bullet N' + \int_{\partial C_2} F \bullet N'' \\
&= \int_{\partial^* C_1} F \bullet N' + \int_{\partial^* C_2} F \bullet N'' + \int_I F \bullet N' + \int_I F \bullet N'' \\
&= \int_{\partial^* C_1} F \bullet N + \int_{\partial^* C_2} F \bullet N + \int_I F \bullet (N' + N'') \\
&= \int_{\partial C} F \bullet N.
\end{aligned}$$

□

La dimostrazione del Teorema di Gauss per $n = 2$ (identica a quella per $n = 3$) è lasciata come esercizio.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI STOKES: Ci limiteremo a dimostrare il risultato nel caso che:

(i) S sia il grafico di una funzione $f|C$, dove $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e C soddisfa le ipotesi di Teorema 1.7 (Green);
(ii) il campo normale a S scelto sia quello per cui risulta $N_3 > 0$.

L'estensione al caso in cui C è unione finita e disgiunta (a meno di regioni di frontiera) di insiemi siffatti si ottiene con un argomento analogo a quello utilizzato nel secondo passo della dimostrazione del Teorema della divergenza.

Proviamo dapprima che la formula vale per il campo $(F_1, 0, 0)$ e cioè che

$$\int_{\overline{S}} \operatorname{rot}(F_1, 0, 0) = \int_{\partial \overline{S}} (F_1, 0, 0). \tag{38}$$

Sia dunque $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione regolare a tratti di ∂C (coerente con la sua orientazione positiva) e poniamo

$$\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), f(\gamma(t))) = (\gamma(t); f(\gamma(t))), \qquad t \in [a, b].$$

Si ha allora

$$\int_{\partial \overline{S}} (F_1, 0, 0) \ = \ \int_a^b ((F_1, 0, 0) \circ \Gamma) \bullet \Gamma' = \int_a^b F_1(\gamma(t); f(\gamma(t)))\gamma_1'(t)\, dt$$

Applicando il Teorema 1.7 (Green) al campo $G := (G_1, G_2) : C \to \mathbb{R}^2$, dove

$$\begin{cases} G_1(x,y) := F_1(x,y,f(x,y)) \\ G_2(x,y) := 0 \end{cases}$$

otteniamo

$$\int_{\partial \overline{S}} (F_1, 0, 0) = \int_a^b (G \circ \gamma) \bullet \gamma' = \int_{\partial C} G = \int_C \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = -\int_C \frac{\partial G_1}{\partial y}. \tag{39}$$

D'altra parte, parametrizzando S con

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$$

e osservando che

$$(N \circ \varphi) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

si ottiene anche

$$\begin{aligned} \int_{\overline{S}} \mathrm{rot}\ (F_1, 0, 0) &= \int_{\overline{S}} \frac{\partial F_1}{\partial z} N_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} N_3 \\ &= \int_C \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \circ \varphi \right) (N_2 \circ \varphi) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \circ \varphi \right) (N_3 \circ \varphi) \right] \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \\ &= -\int_C \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,f(x,y))\, dxdy \\ &= -\int_C \frac{\partial G_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza (38) segue ora immediatamente da (39). In maniera analoga si provano anche le uguaglianze

$$\int_{\overline{S}} \mathrm{rot}(0, F_2, 0) = \int_{\partial \overline{S}} (0, F_2, 0), \qquad \int_{\overline{S}} \mathrm{rot}(0, 0, F_3) = \int_{\partial \overline{S}} (0, 0, F_3).$$

Sommando queste e la (38), si ottiene finalmente la conclusione. $\square$

CHAPTER 2

Campi di vettori, potenziali

Definizione 2.1. *Sia A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo un campo continuo $F : A \to \mathbb{R}^n$. Allora ogni funzione $\varphi \in C^1(A)$ tale che $\nabla\varphi \equiv F$ è detta potenziale di F.*

Osservazione 2.1. *Capita sovente che il campo F non abbia nemmeno un potenziale. Infatti l'esistenza di un potenziale "restringe alquanto la libertà di scelta del campo", affermazione resa precisa dalla sottostante Proposizione 2.2. Tale proposizione consente, in particolare, di produrre immediatamente esempi di campo senza potenziale, e.g. il campo $F(x,y) := (0,x)$.*

Osservazione 2.2. *Da un potenziale di F se ne possono ottenere infiniti altri. Infatti, indicato con φ il potenziale dato e con A_j $(j = 1, \dots)$ le componenti connesse di A, allora ogni funzione così definita*

$$\psi(x) := \varphi(x) + c_j, \qquad \textit{se } x \in A_j \tag{40}$$

$(c_j \in \mathbb{R})$ è un potenziale di F. Anzi, è facile convincersi anche del viceversa e cioè che ogni potenziale di F è della forma (40). Una dimostrazione rigorosa di quest'ultima affermazione segue subito dal seguente risultato (intuitivamente scontato).

Proposizione 2.1. *Se Ω è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$ e se f è una funzione differenziabile in Ω con $\nabla f \equiv 0$, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo $P_0 \in \Omega$ e definiamo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{P \in \Omega \,|\, f(P) = f(P_0)\} \qquad (\neq \emptyset, \text{ in quanto } P_0 \in \Omega_1) \\ \Omega_2 &:= \{P \in \Omega \,|\, f(P) \neq f(P_0)\} = \Omega \backslash \Omega_1. \end{aligned}$$

La conclusione seguirà una volta dimostrato che

$$\Omega_1 \text{ e } \Omega_2 \text{ sono entrambi aperti.} \tag{41}$$

Infatti da questo e dal fatto che Ω è connesso si deduce subito che $\Omega_2 = \emptyset$. Ciò significa che $f(P) = f(P_0)$, per ogni $P \in \Omega$.

Dimostriamo dunque (41). La continuità di f implica subito che Ω_2 è aperto. Per provare che anche Ω_1 lo è, consideriamo $P \in \Omega_1$ e una palla B centrata in P tale che $B \subset \Omega$. Allora, per ogni $Q \in B$, si ha

$$\begin{aligned} f(Q) - f(P_0) &= f(Q) - f(P) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(P + t(Q-P))dt \\ &= \int_0^1 \nabla f(P + t(Q-P)) \bullet (Q-P)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $B \subset \Omega_1$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di $P \in \Omega_1$. $\square$

Osservazione 2.3. *D'ora in poi ci occuperemo di campi $F : A \to \mathbb{R}^n$ (A aperto in $\mathbb{R}^n$) di classe C^1. Ogni potenziale di F sarà dunque di classe C^2.*

Definizione 2.2. *Diremo che F soddisfa la condizione delle derivate incrociate (CDI) se vale l'uguaglianza*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \textit{(nel caso che sia } n = 2\textit{)}$$

oppure

$$\mathrm{rot}\ F \equiv 0 \qquad \textit{(nel caso che sia } n = 3\textit{)}.$$

Vale il seguente risultato che dimostreremo in seguito.

Proposizione 2.2. *Se esiste un potenziale φ di F , allora*

(i) *Il campo F soddisfa la CDI;*
(ii) *Se $\overline{C}$ è una curva regolare a tratti orientata, $C \subset A$, con punto iniziale P e punto finale Q, allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

DIMOSTRAZIONE di Prop. 2.2: (i) È una facile conseguenza del teorema di Schwartz. Infatti, limitandosi a considerare il caso $n = 2$, si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Lo stesso argomento funziona anche nel caso $n = 3$ (lasciato per esercizio).

(ii) Segue subito dalla formula (16), dimostrata in Sez. 2. $\square$

Osservazione 2.4. *Il fatto che F soddisfi la CDI non è sufficiente, in generale, a garantire l'esistenza di un potenziale. Lo capiremo subito attraverso un esempio che riusciremo presto ad interpretare come "rivelatore particolare" di un fenomeno generale. Sia F il campo così definito*

$$A := \mathbb{R}^2 \backslash (0,0), \qquad F(x,y) := \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

che soddisfa CDI, come si verifica facendo il conto. Mostreremo ora come supporre l'esistenza di un potenziale di F conduca ad una contraddizione. Infatti, se consideriamo la curva regolare a tratti $\overline{C} = (C, \tau)$ dove C è il cerchio unitario centrato nell'origine e τ è il campo unitario tangente compatibile con l'orientazione "antioraria", i.e.

$$\tau(x,y) = R(x,y), \qquad (x,y) \in C,$$

troviamo subito

$$\int_{\overline{C}} F = \int_C F \bullet \tau = \int_C \frac{\|R(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} = \int_C 1 = 2\pi. \tag{42}$$

D'altra parte, se esistesse un potenziale φ di F, si avrebbe anche

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per (ii) in Proposizione 2.2. Da questa contraddizione segue che F non ha potenziale.

Prima di dare la definizione di "campo conservativo", osserviamo che vale il seguente risultato.

Proposizione 2.3. *Queste due affermazioni sono fra loro equivalenti:*

(i) *Vale*
$$\int_{\overline{C}} F = 0$$
per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$, con C chiusa e contenuta in A;

(ii) *Per ogni coppia ordinata (P, Q) di punti appartenenti ad una medesima componente connessa di A e per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ che congiunge P (punto iniziale) a Q, con $C \subset A$, l'integrale*
$$\int_{\overline{C}} F$$
dipende solo da (P, Q).

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che (i) implica (ii). Presi P, Q in una medesima componente connessa di A, siano $\overline{C_1}$ e $\overline{C_2}$ due curve regolari a tratti orientate che congiungono P (punto iniziale) a Q, con $C_1, C_2 \subset A$. Applicando (i) a $\overline{C} := \overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})$, otteniamo
$$0 = \int_{\overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})} F = \int_{\overline{C_1}} F - \int_{\overline{C_2}} F$$
e cioè quanto volevamo provare.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Consideriamo una curva regolare a tratti orientata e chiusa $\overline{C}$, con $C \subset A$. Preso $P_0 \in C$, indichiamo con $\overline{C_1}$ la curva banale costituita dal solo P_0 e applichiamo (ii) con $P = Q = P_0$. Otteniamo
$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C_1}} F = 0.$$

□

Definizione 2.3. *Il campo F si dice conservativo (in A) se*
$$\int_{\overline{C}} F = 0$$
per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$, con C chiusa e contenuta in A (oppure, equivalentemente, se vale la "condizione di indipendenza dal percorso (CIP)" (ii) in Proposizione 2.3).

Ora, come corollario di (ii) in Proposizione 2.2, otteniamo immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 2.4. *Se F ha un potenziale, allora F è conservativo.*

La seguente proposizione ci servirà per provare che vale anche il viceversa.

Proposizione 2.5. *Sia A un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Allora considerata una qualsiasi coppia di punti in A esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A, che li congiunge (il che si esprime dicendo che A è connesso per archi regolari a tratti).*

DIMOSTRAZIONE: Basterà verificare che per ogni $P \in A$ l'insieme Γ_P dei punti Q per i quali esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A e congiungente P a Q, coincide con l'insieme A. Poiché A è connesso e Γ_P è non vuoto (esso contiene P!), sarà sufficiente dimostrare che gli insiemi Γ_P e $A \backslash \Gamma_P$ sono entrambi aperti, per concludere che allora si ha proprio $\Gamma_P = A$.

A questo scopo, consideriamo una palla $B \subset A$ e osserviamo che in B esiste un punto congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A, se e solo se ogni punto di B è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A. Quindi si possono verificare soltanto le seguenti due situazioni:

Ogni punto di B è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti in A, ossia $B \subset \Gamma_P$;

oppure

nessun punto di B è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti in A, ossia $B \subset A \backslash \Gamma_P$.

Ricordando che per ogni $P \in A$ esiste una palla B_P centrata in P e inclusa in A, tale osservazione implica subito che:

- $B_P \subset \Gamma_P$ per ogni $P \in \Gamma_P$, cioè Γ_P è aperto;
- $B_P \subset A \backslash \Gamma_P$ per ogni $P \in A \backslash \Gamma_P$, cioè $A \backslash \Gamma_P$ è aperto.

$\square$

Possiamo finalmente provare il risultato opposto a quello stabilito in Proposizione 2.4.

PROPOSIZIONE 2.6. *Se F è conservativo, allora F ha un potenziale. Più precisamente siano A_j ($j = 1, \dots$) le componenti connesse di A, si consideri $P_j \in A_j$ e si ponga*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{C}} F \qquad (\textit{se } P \in A_j)$$

dove $\overline{C}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti orientata, con $C \subset A_j$, congiungente P_j (punto iniziale) a P. Allora φ è un potenziale di F (quello che si annulla nei P_j).

<u>Nota bene:</u> *una siffatta curva $\overline{C}$ esiste, quale che sia P, grazie a Proposizione 2.5. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta di $\overline{C}$, per Proposizione 2.3. La funzione φ risulta pertanto ben definita.*

DIMOSTRAZIONE di Prop.2.6: Senza compromettere la generalità dell'argomento dimostrativo, possiamo supporre $n = 2$. Dimostreremo che $\partial\varphi/\partial x = F_1$ (allo stesso modo si prova che $\partial\varphi/\partial y = F_2$).

Si consideri dunque $P \in A_j$ e sia $\overline{C}$ una curva come sopra. Poiché A_j è aperto, si può trovare r tale che il disco D_r di raggio r e centrato in P sia contenuto in A_j. Se per $|\varepsilon| < r$ indichiamo con Σ_ε il segmento orientato congiungente P a $P + \varepsilon(1,0)$, parametrizzato da

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto P + t\varepsilon(1,0),$$

(osserviamo che $\Sigma_\varepsilon \subset D_r \subset A_j$) si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(P+\varepsilon(1,0))-\varphi(P)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\overline{C}\cup\Sigma_\varepsilon} F - \int_{\overline{C}} F\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon} F \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (F\circ\gamma)\bullet\gamma' = \int_0^1 F_1(P+t\varepsilon(1,0))dt \\
&= F_1(P) + \int_0^1 F_1(P+t\varepsilon(1,0)) - F_1(P)dt.
\end{aligned}$$

Dalla continuità di F_1 in P segue che esiste $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P)$ e che si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = F_1(P).$$

$\square$

La seguente definizione ci servirà per formulare ipotesi sotto le quali la prima implicazione di Proposizione 2.2 si può invertire.

DEFINIZIONE 2.4. *L'insieme A si dice <u>stellato rispetto a P_0</u> ($P_0 \in A$) se il segmento*

$$P_0P := \{P_0 + t(P-P_0)\,|\, t\in[0,1]\}$$

è contenuto in A per ogni $P\in A$.

OSSERVAZIONE 2.5. *Valgono i seguenti fatti.*

- *Se A è stellato (rispetto a $P_0 \in A$) allora A è connesso; in generale il viceversa è falso. Per esempio gli insiemi*

  $$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \qquad \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$$

  sono connessi e non stellati;
- *Se A è convesso, allora A è stellato rispetto ad ogni suo punto (e viceversa);*
- *Si prova, e si intuisce facilmente, che se A è stellato (rispetto a $P_0 \in A$) allora A è semplicemente connesso; in generale non è vero il viceversa. E.g. l'insieme connesso e non stellato $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso.*

Esempi di insiemi stellati, non stellati, semplicemente connessi.

PROPOSIZIONE 2.7. *Se F soddisfa la CDI e se ogni componente connessa A_j di A è un insieme stellato rispetto a $P_j \in A_j$, allora F ha potenziale. In particolare, il potenziale che si annulla nei P_j è dato da*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{P_jP}} F \qquad (\textit{se } P\in A_j)$$

dove l'orientazione del segmento è scelta di modo che P_j sia il punto iniziale.

DIMOSTRAZIONE: Come nella dimostrazione di Proposizione 2.6, possiamo ridurci a supporre che $n=2$ e a provare che $\partial\varphi/\partial x = F_1$.

Considerato $P\in A_j$, come prima possiamo determinare r per cui il disco D_r di raggio r e centro P risulta incluso in A_j.

Osserviamo che se $|\varepsilon| < r$ allora il triangolo chiuso T di vertici

$$P_j, \quad P, \quad Q := P + \varepsilon(1,0)$$

è contenuto in A_j, in quanto A_j è stellato rispetto a P_j. Dal Teorema 1.7 di Green (useremmo invece il Teorema 1.8 di Stokes se stessimo supponendo $n = 3$) otteniamo allora che

$$\int_{\overline{P_jQ}} F + \int_{-\Sigma_\varepsilon} F + \int_{-\overline{P_jP}} F = \int_{\overline{\partial T}} F = \int_T \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

dove Σ_ε è definito esattamente come nella dimostrazione di Proposizione 2.6. Segue subito che

$$\frac{\varphi(P + \varepsilon(1,0)) - \varphi(P)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\overline{P_jQ}} F - \int_{\overline{P_jP}} F\Big) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon} F.$$

Si procede ora come nella dimostrazione di Proposizione 2.6. $\square$

Osservazione 2.6. *La Proposizione 2.7 può essere estesa al caso in cui le componenti connesse di A sono semplicemente connesse.*

Esempi.

Richiami su numeri complessi, funzioni complesse, limiti di funzioni complesse. Notazioni canoniche: $z = (x, y) = x+iy$ (per i punti), $f = (u, v) = u+iv$ (per le funzioni). Esempi di funzioni complesse, la funzione esponenziale. D'ora in poi Ω denoterà un sottoinsieme aperto di $\mathbf{C}$ ed f una funzione a valori complessi definita e continua in Ω.

CHAPTER 3

Derivazione e integrazione complessa

Definizione 3.1. *La funzione f si dice derivabile (o anche olomorfa) in $z_0 \in \Omega$ se esiste il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

indicato in tal caso con $f'(z_0)$. Se f è derivabile in tutti i punti di Ω, si dice che f è derivabile (oppure olomorfa) in Ω.

Come per le funzioni reali, vale questo risultato.

Proposizione 3.1. *Se f è derivabile in $z_0 \in \Omega$, allora f è continua in z_0.*

DIMOSTRAZIONE: Analogamente al caso di una funzione reale, la tesi segue subito osservando che

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

per ogni $z \in \Omega \backslash \{z_0\}$. □

Nel seguente risultato e nel seguito R indica, come in passato, l'operatore di rotazione di $\pi/2$ (in senso antiorario) nel piano, ossia

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto R(x, y) := (-y, x).$$

Teorema 3.1. *Data $f = (u, v) : \Omega \to \mathbf{C}$ e $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *La funzione f è derivabile in z_0;*
(ii) *Le funzioni u, v sono differenziabili in z_0 e vale*

$$\nabla v(z_0) = R \nabla u(z_0)$$

detta condizione di Cauchy-Riemann (CCR) in z_0.

Inoltre, se f è derivabile in z_0, si ha

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

(da questa e dalla CCR si ottengono poi, ovviamente, altre uguaglianze equivalenti, e.g. $f'(z_0) = v_y(z_0) - i u_y(z_0)$).

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo prima di tutto che f è derivabile in z_0 se e solo se esistono

$$w = a + ib \in \mathbf{C}, \qquad \sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z))$$

con $\sigma(z) = o(|z - z_0|)$, o equivalentemente

$$\sigma_1(z) = o(|z - z_0|), \qquad \sigma_2(z) = o(|z - z_0|),$$

tali che

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + \sigma(z).$$

Osserviamo che quest'ultima uguaglianza equivale al seguente sistema

$$\begin{cases} u(z) = u(z_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \sigma_1(z) \\ v(z) = v(z_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + \sigma_2(z). \end{cases} \tag{43}$$

Segue pertanto che

- Se f è derivabile in z_0, allora vale (43) con $a + ib = f'(z_0)$. Questo implica che u e v sono differenziabili (e quindi derivabili parzialmente) in z_0 e che si ha

  $$\nabla u(z_0) = (a, -b), \qquad \nabla v(z_0) = (b, a)$$

  da cui segue subito la CCR.
- Viceversa, se u e v sono differenziabili in z_0 e se inoltre vale la CCR, allora il sistema (43) è soddisfatto con

  $$a := u_x(z_0), \qquad b := v_x(z_0)$$

  e

  $$\begin{aligned}\sigma_1(z) &:= u(z) - u(z_0) - \nabla u(z_0) \cdot (z - z_0) = u(z) - u(z_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ &= o(|z - z_0|)\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}\sigma_2(z) &:= v(z) - v(z_0) - \nabla v(z_0) \cdot (z - z_0) = v(z) - v(z_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0) \\ &= o(|z - z_0|).\end{aligned}$$

  Di conseguenza f è derivabile in z_0 e si ha $f'(z_0) = w = a + ib = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.

□

Dal Teorema del differenziale totale (dimostrato nel corso di Analisi III) segue immediatamente il seguente corollario.

PROPOSIZIONE 3.2. *Siano u e v derivabili parzialmente in un intorno di $z_0 \in \Omega$. Supponiamo inoltre che i gradienti ∇u e ∇v siano continui in z_0 e che sia verificata la CCR in z_0. Allora f è derivabile in z_0 e si ha*

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

In particolare:

PROPOSIZIONE 3.3. *Se $u, v \in C^1(\Omega)$ e la CCR è soddisfatta in tutti i punti di Ω, allora f è derivabile in Ω e si ha*

$$f' = u_x + iv_x.$$

Esempio: La funzione $\exp : z \mapsto e^z$ è derivabile in $\mathbf{C}$ e si ha $\exp' = \exp$.

Teorema 3.2. *Le seguenti affermazioni, relative a $f = u + iv : \Omega \to \mathbf{C}$, sono equivalenti:*

(i) *la funzione f è derivabile in Ω;*
(ii) *la funzione f è derivabile infinite volte in Ω;*
(iii) *si ha $u, v \in C^\infty(\Omega)$ e, in ogni punto di Ω, vale la CCR;*
(iv) *si ha $u, v \in C^1(\Omega)$ e, in ogni punto di Ω, vale la CCR.*

DIMOSTRAZIONE: Che (i) implichi (ii) segue subito dalla formula di rappresentazione di Cauchy, di cui tratteremo in seguito (Teorema 3.3).

Assumiamo (ii) e dimostriamo (iii). A questo scopo, osserviamo che se fissiamo arbitrariamente un intero $n \geq 1$, allora esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j},\ \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Inoltre queste sono differenziabili in Ω, valgono le CCR

$$\nabla\left(\frac{\partial^{j-1} v}{\partial x^{j-1}}\right) = R\,\nabla\left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}}\right) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{44}$$

e si ha

$$f^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + i\frac{\partial^j v}{\partial x^j} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{45}$$

per Teorema 3.1. Tutto questo implica facilmente che $u, v \in C^n(\Omega)$. Per esempio:

- Se $n = 1$ le funzioni u_x e v_x sono continue, per (45) e Proposizione 3.1. A questo punto anche le derivate u_y e v_y sono continue, per (44). Quindi $u, v \in C^1(\Omega)$.
- Analogamente, se $n = 2$ le derivate u_{xx} e v_{xx} sono continue (per (45) e Proposizione 3.1). La continuità di tutte le altre derivate parziali seconde segue subito dal set (44) di CCR.

Infine (iii) implica (iv) banalmente, mentre (iv) implica (i) per il Teorema 3.1. □

Definizione 3.2. *Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice armonica (in Ω) se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \equiv 0$.*

Proposizione 3.4. *Se $f = u + iv$ è derivabile in Ω, allora u e v sono armoniche in Ω.*

DIMOSTRAZIONE: Le funzioni u e v sono di classe C^2 e vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u, \text{ i.e. } \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

per Teorema 3.2. Ricordando anche il Teorema di Schwartz, si ottiene allora

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

da cui $\Delta u \equiv 0$. Analogamente si prova che $\Delta v \equiv 0$. □

Proposizione 3.5. *Sia data una funzione armonica $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e supponiamo che le componenti connesse di Ω siano insiemi stellati (oppure, più debolmente, semplicemente connessi). Allora esiste una funzione armonica $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (detta armonica coniugata di u) tale che $u + iv$ è derivabile in Ω. Essa è un potenziale del campo $R\nabla u$.*

DIMOSTRAZIONE: la prova è (più che) suggerita nell'enunciato stesso. Infatti, per il Teorema 3.1, se v esiste deve soddisfare la CCR, i.e $\nabla v = R\nabla u$. Ma una tale v esiste di sicuro, grazie alla Proposizione 2.7 e osservando che il campo $R\nabla u$, essendo u armonica, soddisfa la CDI. $\square$

Come facile conseguenza di Proposizione 3.5 e di Teorema 3.2, si ha il seguente risultato.

COROLLARIO 3.1. *Se u è armonica in Ω, allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia D un disco qualsiasi incluso in Ω. Allora, per Proposizione 3.5, esiste v armonica in D tale che $u + iv$ è derivabile in D. Il Teorema 3.2 implica allora che u è di classe C^∞ in D. La conclusione segue, ovviamente, dall'arbitrarietà di D. $\square$

Prima di enunciare e dimostrare il prossimo risultato, definiamo l'integrale di una funzione complessa.

DEFINIZIONE 3.3. *Sia f continua in Ω e sia $\overline{C}$ una curva regolare a tratti orientata, con $C \subset \Omega$. Definiamo allora*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz := \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds$$

Coerenza con le "regole formali" della notazione di Leibniz.

Il seguente facile risultato è spesso utile nel calcolo esplicito di integrali.

PROPOSIZIONE 3.6. *Nelle ipotesi di Definizione 3.3, sia $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una parametrizzazione regolare a tratti di $\overline{C}$. Allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

dove il prodotto nell'integrando del secondo membro è quello complesso e dove si sottintende la seguente definizione di integrale di $\alpha + i\beta : [a, b] \to \mathbf{C}$ (con α e β continue)

$$\int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t))dt := \int_a^b \alpha(t)dt + i \int_a^b \beta(t)dt.$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))\,(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)) + i\,(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t))\,dt + i \int_a^b (v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \bullet \gamma'(t)dt + i \int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \bullet \gamma'(t)dt \\
&= \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Proveremo ora un risultato che corrisponde, nel contesto dei campi, a Proposizione 2.2.

Proposizione 3.7. *Se esiste una primitiva F di f (in Ω), allora*

(i) *La funzione f è derivabile in Ω (i.e. $u, v \in C^1(\Omega)$ e vale la CCR, per Teorema 3.2);*
(ii) *Se $\overline{C}$ è una curva regolare a tratti orientata, $C \subset \Omega$, con punto iniziale P e punto finale Q, allora si ha*
$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = F(Q) - F(P).$$

DIMOSTRAZIONE: (i) Poiché F è derivabile, il Teorema 3.2 implica che anche $F' = f$ è derivabile.

(ii) Sia $F = U + iV$. Allora $U, V \in C^\infty(\Omega)$, vale la CCR
$$\nabla V = R\nabla U, \text{ i.e. } \begin{cases} V_x = -U_y \\ V_y = U_x \end{cases}$$
e
$$u + iv = U_x + iV_x$$
per Teorema 3.1 e Teorema 3.2. Segue subito che U è un potenziale del campo $(u, -v)$ e che V è un potenziale del campo (v, u). Dalla (ii) di Proposizione 2.2, otteniamo allora
$$\begin{aligned} \int_{\overline{C}} f(z)dz &= \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds \\ &= U(Q) - U(P) + i\,(V(Q) - V(P)) \\ &= F(Q) - F(P). \end{aligned}$$
□

Osservazione 3.1. *(Confrontare con l'osservazione che segue la Proposizione 2.2). La derivabilità di f non implica, in generale, che esista una primitiva di f. Per esempio, la funzione*
$$f(z) := \frac{1}{z}, \qquad z \in \Omega := \mathbf{C}\backslash\{0\}$$
è derivabile in Ω ma, come stiamo per verificare, non è dotata di primitive in Ω. Infatti , se $\overline{C}$ indica il circolo parametrizzato da
$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t) = e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$
si ha
$$\int_{\overline{C}} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\, dt = 2\pi i. \tag{46}$$
D'altra parte se f avesse una primitiva F, dovremmo avere anche
$$\int_{\overline{C}} \frac{1}{z}\, dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0$$
per (ii) di Proposizione 3.7. Si rimuove l'assurdo ammettendo che f non ha primitiva.

Osserviamo che
$$\int_{\overline{C}} (v, u) = 2\pi \neq 0$$
per (46). In altri termini, il campo (v, u) non è conservativo pur soddisfacendo CDI (come discende subito da CCR che vale in quanto f è derivabile). In effetti tale campo coincide proprio con quello

indicato nell' osservazione menzionata sopra, fatta nell'ambito della teoria del potenziale. Infatti si ha

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

e cioè

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Definizione 3.4. *Si dice che una funzione continua $f : \Omega \to \mathbf{C}$ soddisfa la condizione di indipendenza dal percorso (CIP) se per ogni coppia ordinata (P, Q) di punti appartenenti ad una medesima componente connessa di Ω e per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ che congiunge P (punto iniziale) a Q, con $C \subset \Omega$, l'integrale*

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz$$

dipende solo da (P, Q).

Per provare i due sottostanti risultati sull'esistenza della primitiva, ci servirà il seguente lemma.

Proposizione 3.8. *Se U è un potenziale del campo $(u, -v)$ e se V è un potenziale di (v, u), allora $F := U + iV$ è derivabile e si ha $F' = f$.*

DIMOSTRAZIONE: La derivabilità di F seguirà subito dal Teorema 3.1, una volta dimostrato che F soddisfa la CCR. In effetti, si ha che $U, V \in C^1(\Omega)$ e vale

$$R\nabla U = R(u, -v) = (v, u) = \nabla V.$$

Infine, sempre per Teorema 3.1, si trova

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

□

Proposizione 3.9. *Supponiamo che $f : \Omega \to \mathbf{C}$ sia continua e soddisfi CIP. Allora f ha una primitiva. Più precisamente: $(u, -v)$ ha un potenziale U, (v, u) ha un potenziale V e $U + iV$ è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché vale CIP e, per definizione, si ha

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz = \int_{\overline{C}} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \bullet ds,$$

segue subito che i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono conservativi in Ω (Proposizione 2.3) e quindi hanno un potenziale (Proposizione 2.6). La conclusione segue subito da Proposizione 3.8. □

Come conseguenza immediata di Proposizione 3.9, Proposizione 3.7(i) e Teorema 3.2, si ottiene il seguente

Corollario 3.2. *Se $f : \Omega \to \mathbf{C}$ è continua e soddisfa CIP, allora f è derivabile infinite volte.*

Dimostreremo adesso un risultato che "corrisponde" alla Proposizione 2.7 della teoria del potenziale. Esso afferma che, proprio sotto le ipotesi supplementari assunte sul dominio in Proposizione 2.7, la prima implicazione di Proposizione 3.7 si può invertire.

Proposizione 3.10. *Supponiamo che la funzione f sia derivabile in Ω e che ogni componente connessa di Ω sia un insieme stellato. Allora f ha una primitiva. Più precisamente: $(u, -v)$ ha un potenziale U, (v, u) ha un potenziale V e $U + iV$ è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE: Da Teorema 3.2 segue che le funzioni u e v sono di classe C^1 in Ω e che vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Questo implica subito che i campi $(u, -v)$ e (v, u) soddisfano la CDI. Quindi, per Proposizione 2.7 tali campi hanno un potenziale. Come per Proposizione 3.9, la conclusione segue da Proposizione 3.8. □

Osservazione 3.2. *Grazie all'osservazione che segue la dimostrazione di Proposizione 2.7, la Proposizione 3.10 si può estendere al caso di insiemi le cui componenti connesse siano semplicemente connesse.*

Il seguente risultato ci servirà fra poco per dimostrare la formula di rappresentazione integrale di Cauchy. Osserviamo che esso non prescrive alcuna restrizione sul genere topologico di Ω. Peraltro, nel caso in cui le componenti connesse di Ω siano insiemi stellati, tale proposizione deriva immediatamente dalla combinazione di Proposizione 3.10 e Proposizione 3.7(ii).

Proposizione 3.11. *Consideriamo un sottoinsieme aperto E di Ω tale che ∂E sia una curva regolare a tratti, con $\partial E \subset \Omega$. Sia inoltre f una funzione derivabile in Ω. Allora*

$$\int_{\partial E} f(z)dz = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Per Teorema 3.1 vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Allora, da una versione sufficientemente generale della formula di Green (NB: Le funzioni u e v risultano essere differenziabili, ma non necessariamente di classe C^1. Tuttavia ∇u e ∇v sono misurabili e inoltre, essendo valida la CCR, si ha $\partial(-v)/\partial x - \partial u/\partial y = \partial u/\partial x - \partial v/\partial y = 0$), si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E} f(z)dz &= \int_{\partial E} (u, -v) \bullet ds + i \int_{\partial E} (v, u) \bullet ds \\
&= \int_E \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \int_E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Possiamo finalmente enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione integrale di Cauchy.

Teorema 3.3. *Siano E ed f come in Proposizione 3.11. Allora, per ogni $w \in E$, si ha*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia D_ε il disco di raggio ε centrato in w. Supporremo ε sufficientemente piccolo, di modo che $D_\varepsilon \subset E$. Poiché $z \mapsto f(z)/(z-w)$ è derivabile in $\Omega\backslash\{w\}$, dalla Proposizione 3.11 segue che

$$0 = \int_{\partial(E\backslash D_\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial E} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Parametrizzando ∂D_ε con

$$\gamma(t) := w + \varepsilon e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e ricordando Proposizione 3.7, si ottiene allora

$$\int_{\partial E} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it}) dt$$

per ogni ε sufficientemente piccolo. A questo punto la conclusione segue subito osservando che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it}) dt = 2\pi f(w) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it}) - f(w)\, dt = 2\pi f(w)$$

per la continuità di f in w. $\square$

OSSERVAZIONE 3.3. *Come affermato nella dimostrazione di Teorema 3.2, dalla formula di Cauchy segue che una funzione derivabile in Ω è derivabile infinite volte in Ω. Vale infatti il seguente facile corollario di Teorema 3.3 (dimostrazione per induzione).*

PROPOSIZIONE 3.12. *Siano E ed f come in Proposizione 3.11. Allora f è derivabile indefinitamente in E e vale la formula*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz, \quad w \in E \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Esempi.

Bibliography

[1] S. Campanato: Lezioni di Analisi Matematica, 2^a parte. Libreria Scientifica Pellegrini, Pisa.
[2] E. Giusti: Analisi Matematica 2. Bollati Boringhieri.