Seminari per il Percorso di Eccellenza
Secondo Anno del Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2009/2010
*** * ***

DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE COMPLESSA: UNA INTRODUZIONE

Silvano Delladio

CHAPTER 1

Seminario del 21 Ottobre 2009

Richiami su numeri complessi, funzioni complesse, limiti di funzioni complesse. Notazioni canoniche: $z = (x, y) = x+iy$ (per i punti), $f = (u, v) = u+iv$ (per le funzioni). Esempi di funzioni complesse, la funzione esponenziale. D'ora in poi Ω denoterà un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed f una funzione a valori complessi definita e continua in Ω.

Definizione 1.1. *La funzione f si dice derivabile (o anche olomorfa) in $z_0 \in \Omega$ se esiste il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

indicato in tal caso con $f'(z_0)$. Se f è derivabile in tutti i punti di Ω, si dice che f è derivabile (oppure olomorfa) in Ω.

Come per le funzioni reali, vale questo risultato.

Proposizione 1.1. *Se f è derivabile in $z_0 \in \Omega$, allora f è continua in z_0.*

DIMOSTRAZIONE: Analogamente al caso di una funzione reale, la tesi segue subito osservando che

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

per ogni $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. $\square$

Nel seguente risultato e nel seguito R indica, come in passato, l'operatore di rotazione di $\pi/2$ (in senso antiorario) nel piano, ossia

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto R(x, y) := (-y, x).$$

Teorema 1.1. *Data $f = (u, v) : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *La funzione f è derivabile in z_0;*
(ii) *Le funzioni u, v sono differenziabili in z_0 e vale*

$$\nabla v(z_0) = R \nabla u(z_0)$$

detta condizione di Cauchy-Riemann (CCR) in z_0.

Inoltre, se f è derivabile in z_0, si ha

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

(da questa e dalla CCR si ottengono poi, ovviamente, altre uguaglianze equivalenti, e.g. $f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$*).*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo prima di tutto che f è derivabile in z_0 se e solo se esistono

$$w = a + ib \in \mathbb{C}, \qquad \sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z))$$

con $\sigma(z) = o(|z - z_0|)$, o equivalentemente

$$\sigma_1(z) = o(|z - z_0|), \qquad \sigma_2(z) = o(|z - z_0|),$$

tali che

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + \sigma(z).$$

Osserviamo che quest'ultima uguaglianza equivale al seguente sistema

$$\begin{cases} u(z) = u(z_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \sigma_1(z) \\ v(z) = v(z_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + \sigma_2(z). \end{cases} \tag{1}$$

Segue pertanto che

- Se f è derivabile in z_0, allora vale (1) con $a + ib = f'(z_0)$. Questo implica che u e v sono differenziabili (e quindi derivabili parzialmente) in z_0 e che si ha
$$\nabla u(z_0) = (a, -b), \qquad \nabla v(z_0) = (b, a)$$
da cui segue subito la CCR.
- Viceversa, se u e v sono differenziabili in z_0 e se inoltre vale la CCR, allora il sistema (1) è soddisfatto con
$$a := u_x(z_0), \qquad b := v_x(z_0)$$
e
$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &:= u(z) - u(z_0) - \nabla u(z_0) \cdot (z - z_0) = u(z) - u(z_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ &= o(|z - z_0|) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \sigma_2(z) &:= v(z) - v(z_0) - \nabla v(z_0) \cdot (z - z_0) = v(z) - v(z_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0) \\ &= o(|z - z_0|). \end{aligned}$$
Di conseguenza f è derivabile in z_0 e si ha $f'(z_0) = w = a + ib = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.

□

Dal Teorema del differenziale totale (dimostrato nel corso di Analisi III) segue immediatamente il seguente corollario.

PROPOSIZIONE 1.2. *Siano u e v derivabili parzialmente in un intorno di $z_0 \in \Omega$. Supponiamo inoltre che i gradienti ∇u e ∇v siano continui in z_0 e che sia verificata la CCR in z_0. Allora f è derivabile in z_0 e si ha*

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

In particolare:

Proposizione 1.3. *Se $u, v \in C^1(\Omega)$ e la CCR è soddisfatta in tutti i punti di Ω, allora f è derivabile in Ω e si ha*

$$f' = u_x + iv_x.$$

Esempio: La funzione $\exp : z \mapsto e^z$ è derivabile in $\mathbf{C}$ e si ha $\exp' = \exp$. Esercizi.

Esercizi

1. Determinare due numeri reali a e b di modo che la funzione

$$f(z) = f(x,y) = x^3 + axy^2 \, + \, i(bx^2y - y^3)$$

sia derivabile in $\mathbf{C}$. Calcolare poi $f'(z)$.

2. Data la funzione

$$u(x,y) := x^2 - y^2 - 2x,$$

si determini una nuova funzione $v(x,y)$ tale che $u + iv$ sia derivabile in $\mathbf{C}$.

3. Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto 2xy \, + \, i(x - y + x^2)$$

è derivabile.

4. Determinare

$$\alpha \in \mathbb{R}, \qquad v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

tali che la funzione complessa

$$2x^3 + \alpha xy^2 + x^2 - y^2 - x - \alpha + 1 \, + \, iv(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{C}$$

è derivabile in $\mathbb{C}$.

CHAPTER 2

Seminario del 28 Ottobre 2009

Una curva ammette infinite parametrizzazioni. Esempi. Ogni curva liscia ammette parametrizzazioni non liscie. Inoltre esistono curve non liscie con parametrizzazioni liscie (esempio: $\gamma(t) := (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$).

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una mappa derivabile in t_0, con $\gamma'(t_0) \neq 0$, e consideriamo la seguente parametrizzazione della retta per $\gamma(t_0)$ avente direzione $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:*

$$\lambda_v(t) := \gamma(t_0) + (t - t_0)v, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si ha allora che $\gamma(t) - \lambda_v(t)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $t - t_0$, per $t \to t_0$, se e soltanto se $v = \gamma'(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti

$$\frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - v.$$

Ne segue che

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \lambda_v(t)}{t - t_0} = 0$$

se e soltanto se $v = \gamma'(0)$. □

La precedente proposizione ci mostra che, fra tutte le λ_v, ce n'è una (e una sola) che meglio approssima γ vicino a t_0. Essa si ottiene prendendo $v = \gamma'(t_0)$. Risulta pertanto naturale dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.1. *Nelle ipotesi di Proposizione 2.1, la retta*

$$t \mapsto \lambda_{\gamma'(t_0)}(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$$

è detta retta tangente (affine) alla curva γ in t_0.

DEFINIZIONE 2.2. *Una mappa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è detta parametrizzazione regolare a tratti (di curva) se essa è semplice, continua e se si può trovare una suddivisione*

$$a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N := b$$

tale che, per ogni j, la mappa $\gamma|(a_j, a_{j+1})$ sia di classe C^1 e

$$t \mapsto \gamma'(t), \qquad t \in (a_j, a_{j+1})$$

sia limitata e sempre diversa da zero. Nel caso in cui le precedenti condizioni possano essere verificate con $N = 1$, si dice che γ è una parametrizzazione regolare. Una curva regolare (risp. curva regolare a tratti) è un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^2$ per cui esiste una parametrizzazione regolare (risp. regolare a tratti) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $C = \gamma([a, b])$.

Proposizione 2.2. *Se* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *è una parametrizzazione regolare (di curva) allora* $\gamma((a,b))$ *è localmente grafico di una funzione di classe* C^1*.*

La dimostrazione di Proposizione 2.2 seguirà facilmente dal seguente lemma.

Proposizione 2.3. *Sia* $\varphi : (c,d) \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *e supponiamo che per un certo* $t_* \in (c,d)$ *si abbia* $\varphi'(t_*) \neq 0$*. Allora esiste un intervallo aperto* I *tale che*

- $\overline{I} \subset (c,d)$ *e* $t_* \in I$*;*
- *la funzione* $\varphi|\overline{I}$ *è strettamente monotona. In particolare* $J := \varphi(I)$ *è un intervallo aperto e*
$$\varphi|I : I \to J$$
è invertibile. Inoltre
$$(\varphi|I)^{-1} : J \to I$$
è una funzione di classe C^1*.*

DIMOSTRAZIONE: Senza intaccare la generalità della prova, possiamo supporre che $\varphi'(t_*) > 0$. Poiché φ' è continua, esiste allora (per il teorema della permanenza del segno) un intervallo aperto I tale che
$$t_* \in I, \qquad \overline{I} \subset (c,d), \qquad \varphi'|\overline{I} > 0.$$
Per verificare che $(\varphi|I)^{-1}$ è derivabile, consideriamo
$$x \in J, \qquad \{x_h\} \subset J \backslash \{x\}$$
tali che $x_h \to x$ e siano
$$t \in I, \qquad \{t_h\} \subset I$$
tali che
$$\varphi(t) = x, \qquad \varphi(t_h) = x_h.$$
Osserviamo che, ovviamente, si ha $t_h \neq t$ per ogni h. Proviamo che
$$t_h \to t. \tag{2}$$
Se non fosse così esisterebbero $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione $\{t_{h_i}\}$ tali che
$$|t - t_{h_i}| \geq \varepsilon \tag{3}$$
per ogni i. Poiché $\{t_{h_i}\}$ è limitata, esisterebbe una sottosuccessione $\{t_{h_{i_j}}\}$ convergente a un certo $\overline{t} \in \overline{I}$. Si avrebbe che
$$x_{h_{i_j}} = \varphi(t_{h_{i_j}}) \to \varphi(\overline{t}) \qquad (j \to +\infty)$$
e quindi $\varphi(\overline{t}) = x = \varphi(t)$. Ne seguirebbe che $\overline{t} = t$, mentre (3) implica che $|t - \overline{t}| \geq \varepsilon$. Questa conclusione assurda prova che vale (2).

Ne segue che
$$\frac{(\varphi|I)^{-1}(x_h) - (\varphi|I)^{-1}(x)}{x_h - x} = \frac{t_h - t}{\varphi(t_h) - \varphi(t)} = \left(\frac{\varphi(t_h) - \varphi(t)}{t_h - t}\right)^{-1}.$$

Quindi $(\varphi|I)^{-1}$ è derivabile in x e si ha

$$D(\varphi|I)^{-1}(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\varphi'((\varphi|I)^{-1}(x))} \tag{4}$$

per ogni $x \in J$. In particolare $(\varphi|I)^{-1}$ è continua in J, per cui la stessa formula (4) mostra che $(\varphi|I)^{-1} \in C^1(J)$.

Osservazione 2.1. *La mappa $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, non è una parametrizzazione regolare in quanto $\gamma'(0) = (0, 0)$ (ma è regolare a tratti). Pertanto: il fatto che $\gamma((-1, 1))$ non possa coincidere, intorno al punto $\gamma(0) = (0, 0)$, col grafico di una funzione di classe C^1 non contrasta con Proposizione 2.2.*

Proposizione 2.4. *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ e $\lambda : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzazioni regolari e iniettive tali che*

$$\gamma([a, b]) = \lambda([c, d]) =: C.$$

Allora, se $F : C \to \mathbb{R}^2$ è un campo di vettori continuo, si ha

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_c^d F(\lambda(s)) \cdot \lambda'(s)\, ds.$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione

$$\sigma := \lambda^{-1} \circ \gamma : [a, b] \to [c, d].$$

Osserviamo che σ è iniettiva, oltre che (ovviamente) suriettiva. Infatti, se $t_1, t_2 \in [a, b]$ e $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, allora si ha

$$\gamma(t_1) = \lambda \circ \sigma(t_1) = \lambda \circ \sigma(t_2) = \gamma(t_2)$$

e quindi $t_1 = t_2$, per l'iniettività di γ.

Verifichiamo che σ è continua. Se non lo fosse, esisterebbero $t_0 \in [a, b]$ e $\varepsilon_0 > 0$ tali che

$$|\sigma(t_i) - \sigma(t_0)| \geq \varepsilon_0 \tag{5}$$

per una certa successione di $t_i \in [a, b]$, $i = 1.2, \ldots$, con $t_i \to t_0$ $(i \to \infty)$. Poiché $[c, d]$ è un insieme compatto e $\sigma(t_i) \in [c, d]$, potremmo trovare una sottosuccessione $\{t_{i_j}\}$ e $s_0 \in [c, d]$ tali che

$$\sigma(t_{i_j}) \to s_0 \qquad (j \to \infty). \tag{6}$$

Ne seguirebbe che

$$\lambda(s_0) = \lim_j \lambda(\sigma(t_{i_j})) = \lim_j \gamma(t_{i_j}) = \gamma(t_0) = \lambda(\sigma(t_0))$$

e quindi $s_0 = \sigma(t_0)$, per l'iniettività di λ. Ma questo risultato contraddice evidentemente (5) e (6) e prova pertanto la continuità di σ.

Dimostriamo ora che $\sigma \in C^1(a, b)$. Fissato arbitrariamente $t_0 \in (a, b)$ e ricordando che σ è iniettiva, si trova

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} &= \frac{\lambda(\sigma(t_0 + h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{h} \\ &= \frac{\lambda(\sigma(t_0 + h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)} \cdot \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h} \end{aligned} \tag{7}$$

per ogni $h \neq 0$ sufficientemente prossimo a zero (affinché $t_0 + h \in (a, b)$). Osserviamo che, grazie alla continuità di σ, si ha

$$R(h) := \frac{\lambda(\sigma(t_0 + h)) - \lambda(\sigma(t_0))}{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)} \to \lambda'(\sigma(t_0)) \neq 0 \tag{8}$$

per $h \to 0$. In particolare, per $|h|$ sufficientemente piccolo, vale

$$R(h) \neq 0$$

e dunque da (7) otteniamo subito (per $|h|$ sufficientemente piccolo)

$$\frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h} = \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \cdot \frac{R(h)}{\|R(h)\|^2}.$$

Ricordando anche (8), ne segue che σ è derivabile in t_0 e si ha

$$\sigma'(t_0) = \frac{\gamma'(t_0) \cdot \lambda'(\sigma(t_0))}{\|\lambda'(\sigma(t_0))\|^2}.$$

Rimane così provato che $\sigma \in C^1(a, b)$.

Osserviamo che, a questo punto, sempre da (7) si deduce l'uguaglianza

$$\gamma'(t_0) = \lambda'(\sigma(t_0))\sigma'(t_0). \tag{9}$$

Dalla formula di integrazione per sostituzione, segue che

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt &= \int_{[a,b]} F(\lambda(\sigma(t))) \cdot \lambda'(\sigma(t))\, \sigma'(t)\, dt \\ &= \int_{[c,d]} F(\lambda(s)) \cdot \lambda'(s)\, ds. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.2. *La proposizione precedente si generalizza immediatamente alle curve regolari a tratti (che ricorreranno molto spesso in seguito).*

A questo punto possiamo dare le seguenti definizioni.

Definizione 2.3. *Una curva regolare a tratti orientata in $\mathbb{R}^2$ è una coppia (C, τ), dove*

(i) *C è una curva regolare a tratti;*
(ii) *$\tau : C \to \mathbb{R}^2$ è un campo di vettori per cui esiste una parametrizzazione regolare a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma([a, b]) = C$ e*

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|\tau(\gamma(t))$$

per ogni t in cui γ è derivabile.

Definizione 2.4. *Siano (C, τ) una curva regolare a tratti orientata in $\mathbb{R}^2$ e $F : C \to \mathbb{R}^2$ un campo di vettori continuo. Allora l' integrale di F lungo (C, τ) è il numero*

$$\int_{(C,\tau)} F := \int_{[a,b]} (F \circ \gamma) \cdot \gamma'$$

dove $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è una qualsiasi parametrizzazione regolare a tratti tale che $\gamma([a, b]) = C$.

Osservazione 2.3. *Vari test significativi eseguiti su*

$$\int_{(C,\tau)} \tau = \int_{[a,b]} \tau(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_{[a,b]} \|\gamma'\|$$

(i casi del segmento, della circonferenza e del grafico di una funzione $f \in C^1([a,b])$), l'invarianza rispetto alla traslazione e l'omogeneità rispetto all'omotetia confermano l'ipotesi intuitiva che $\int_{(C,\tau)} \tau$ costituisca la giusta nozione di misura (lunghezza) della curva (C,τ). Ciò conferma il senso di Definizione 2.4.

OSSERVAZIONE. Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $F : A \to \mathbb{R}^2$ un campo continuo dotato di un "potenziale" $\varphi \in C^1(A)$ (cioè si abbia $\nabla\varphi \equiv F$). Inoltre sia $\overline{C} = (C,\tau)$ una curva regolare a tratti orientata (in $\mathbb{R}^2$), con $C \subset A$. Allora si ha

$$\int_{\overline{C}} F = \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)' = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)). \tag{10}$$

In particolare, ne consegue che:

(1) Curve $\overline{C}$ distinte aventi in comune i punti iniziale e finale danno luogo allo stesso valore dell'integrale $\int_{\overline{C}} F$;
(2) Per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ tale che $C \subset A$ e C è chiusa, si ha

$$\int_{\overline{C}} F = 0.$$

Con riferimento al contesto fisico, in cui $\int_{\overline{C}} F$ può essere interpretato come energia, diremo che i campi soddisfacenti questa condizione (come F) sono "conservativi". Abbiamo così verificato che ogni campo dotato di un potenziale è conservativo. Come vedremo, anche il viceversa è vero.

Vale la pena di osservare che non tutti i campi sono dotati di un potenziale. Per esempio

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto (0,x)$$

non lo è. Infatti, se F avesse un potenziale φ, questo sarebbe necessariamente di classe C^2. Poiché $\nabla\varphi = F$, troveremmo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x$$

e quindi anche

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1$$

che contraddice il ben noto teorema di Schwarz. Alternativamente, grazie a (2), questo fatto si può provare osservando che esistono curve chiuse lungo le quali l'integrale di F produce un risultato diverso da zero (per esempio la circonferenza unitaria centrata nell'origine).

Osservazione 2.4. *Da un potenziale di F se ne possono ottenere infiniti altri. Infatti, indicato con φ il potenziale dato e con A_j $(j = 1, \dots)$ le componenti connesse di A, allora ogni funzione così definita*

$$\psi(x) := \varphi(x) + c_j, \qquad \textit{se } x \in A_j \tag{11}$$

($c_j \in \mathbb{R}$) è un potenziale di F. Anzi, è facile convincersi anche del viceversa e cioè che ogni potenziale di F è della forma (11). Una dimostrazione rigorosa di quest'ultima affermazione segue subito dal seguente risultato (intuitivamente scontato).

PROPOSIZIONE 2.5. *Se Ω è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^2$ e se f è una funzione differenziabile in Ω con $\nabla f \equiv 0$, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo $P_0 \in \Omega$ e definiamo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{P \in \Omega \,|\, f(P) = f(P_0)\} \qquad (\neq \emptyset, \text{ in quanto } P_0 \in \Omega_1) \\ \Omega_2 &:= \{P \in \Omega \,|\, f(P) \neq f(P_0)\} = \Omega \setminus \Omega_1. \end{aligned}$$

La conclusione seguirà una volta dimostrato che

$$\Omega_1 \text{ e } \Omega_2 \text{ sono entrambi aperti.} \tag{12}$$

Infatti da questo e dal fatto che Ω è connesso si deduce subito che $\Omega_2 = \emptyset$. Ciò significa che $f(P) = f(P_0)$, per ogni $P \in \Omega$.

Dimostriamo dunque (12). La continuità di f implica subito che Ω_2 è aperto. Per provare che anche Ω_1 lo è, consideriamo $P \in \Omega_1$ e una palla B centrata in P tale che $B \subset \Omega$. Allora, per ogni $Q \in B$, si ha

$$\begin{aligned} f(Q) - f(P_0) &= f(Q) - f(P) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(P + t(Q-P))dt \\ &= \int_0^1 \nabla f(P + t(Q-P)) \cdot (Q-P)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $B \subset \Omega_1$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di $P \in \Omega_1$. $\square$

OSSERVAZIONE 2.5. *D'ora in poi ci occuperemo di campi $F : A \to \mathbb{R}^2$ (A aperto in $\mathbb{R}^2$) di classe C^1. Ogni potenziale di F sarà dunque di classe C^2.*

DEFINIZIONE 2.5. *Diremo che F soddisfa la <u>condizione delle derivate incrociate</u> (CDI) se vale l'uguaglianza*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Vale il seguente risultato che dimostreremo in seguito.

PROPOSIZIONE 2.6. *Se esiste un potenziale φ di F , allora*

(i) *Il campo F soddisfa la CDI;*
(ii) *Se $\overline{C}$ è una curva regolare a tratti orientata, $C \subset A$, con punto iniziale P e punto finale Q, allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

DIMOSTRAZIONE: (i) È una facile conseguenza del teorema di Schwartz:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

(ii) Segue subito dalla formula (10). □

OSSERVAZIONE 2.6. *CDI non garantisce l'esistenza di un potenziale. Per esempio, sia F il campo così definito*

$$A := \mathbb{R}^2 \backslash (0,0), \qquad F(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Allora F soddisfa CDI, come si verifica facendo il conto. D'altra parte se $\overline{C} = (C,\tau)$ è il cerchio unitario centrato nell'origine con l'orientazione "antioraria", troviamo subito

$$\int_{\overline{C}} F = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi. \tag{13}$$

Se esistesse un potenziale φ di F, si avrebbe anche

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per (ii) in Proposizione 2.6. Da questa contraddizione segue che F non ha potenziale.

Prima di dare la definizione di "campo conservativo", osserviamo che vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.7. *Queste due affermazioni sono fra loro equivalenti:*

(i) *Vale*

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$, con C chiusa e contenuta in A;

(ii) *Per ogni coppia ordinata (P,Q) di punti appartenenti ad una medesima componente connessa di A e per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$ che congiunge P (punto iniziale) a Q, con $C \subset A$, l'integrale*

$$\int_{\overline{C}} F$$

dipende solo da (P,Q).

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che (i) implica (ii). Presi P, Q in una medesima componente connessa di A, siano $\overline{C_1}$ e $\overline{C_2}$ due curve regolari a tratti orientate che congiungono P (punto iniziale) a Q, con $C_1, C_2 \subset A$. Applicando (i) a $\overline{C} := \overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})$, otteniamo

$$0 = \int_{\overline{C_1} \cup (-\overline{C_2})} F = \int_{\overline{C_1}} F - \int_{\overline{C_2}} F$$

e cioè quanto volevamo provare.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Consideriamo una curva regolare a tratti orientata e chiusa $\overline{C}$, con $C \subset A$. Preso $P_0 \in C$, indichiamo con $\overline{C_1}$ la curva banale costituita dal solo P_0 e applichiamo (ii) con $P = Q = P_0$. Otteniamo

$$\int_{\overline{C}} F = \int_{\overline{C_1}} F = 0.$$

□

Definizione 2.6. *Il campo F si dice* <u>*conservativo*</u> *(in A) se*

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per ogni curva regolare a tratti orientata $\overline{C}$, con C chiusa e contenuta in A (oppure, equivalentemente, se vale la "condizione di indipendenza dal percorso (CIP)" (ii) in Proposizione 2.7).

Ora, come corollario di (ii) in Proposizione 2.6, otteniamo immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 2.8. *Se F ha un potenziale, allora F è conservativo.*

La seguente proposizione ci servirà per provare che vale anche il viceversa.

Proposizione 2.9. *Sia A un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^2$. Allora considerata una qualsiasi coppia di punti in A esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A, che li congiunge (il che si esprime dicendo che A è* <u>*connesso per archi regolari a tratti*</u>*).*

DIMOSTRAZIONE: Basterà verificare che per ogni $P \in A$ l'insieme Γ_P dei punti Q per i quali esiste una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A e congiungente P a Q, coincide con l'insieme A. Poiché A è connesso e Γ_P è non vuoto (esso contiene P!), sarà sufficiente dimostrare che gli insiemi Γ_P e $A \backslash \Gamma_P$ sono entrambi aperti, per concludere che allora si ha proprio $\Gamma_P = A$.

A questo scopo, consideriamo una palla $B \subset A$ e osserviamo che in B esiste un punto congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A, se e solo se ogni punto di B è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti, tutta contenuta in A. Quindi si possono verificare soltanto le seguenti due situazioni:

> *Ogni punto di B è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti in A, ossia $B \subset \Gamma_P$;*

oppure

> *nessun punto di B è congiungibile a P mediante una curva regolare a tratti in A, ossia $B \subset A \backslash \Gamma_P$.*

Ricordando che per ogni $P \in A$ esiste una palla B_P centrata in P e inclusa in A, tale osservazione implica subito che:

- $B_P \subset \Gamma_P$ per ogni $P \in \Gamma_P$, cioè Γ_P è aperto;
- $B_P \subset A \backslash \Gamma_P$ per ogni $P \in A \backslash \Gamma_P$, cioè $A \backslash \Gamma_P$ è aperto.

$\square$

Possiamo finalmente provare il risultato opposto a quello stabilito in Proposizione 2.8.

Proposizione 2.10. *Se F è conservativo, allora F ha un potenziale. Più precisamente siano A_j $(j = 1, \dots)$ le componenti connesse di A, si consideri $P_j \in A_j$ e si ponga*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{C}} F \qquad (\text{se } P \in A_j)$$

dove $\overline{C}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti orientata, con $C \subset A_j$, congiungente P_j (punto iniziale) a P. Allora φ è un potenziale di F (quello che si annulla nei P_j).

<u>Nota bene:</u> una siffatta curva $\overline{C}$ esiste, quale che sia P, grazie a Proposizione 2.9. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta di $\overline{C}$, per Proposizione 2.7. La funzione φ risulta pertanto ben definita.

DIMOSTRAZIONE: Si consideri dunque $P \in A_j$ e sia $\overline{C}$ una curva come sopra. Poiché A_j è aperto, si può trovare r tale che il disco D_r di raggio r e centrato in P sia contenuto in A_j. Se per $|\varepsilon| < r$ indichiamo con Σ_ε il segmento orientato congiungente P a $P + \varepsilon(1,0)$, parametrizzato da

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto P + t\varepsilon(1,0),$$

(osserviamo che $\Sigma_\varepsilon \subset D_r \subset A_j$) si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(P+\varepsilon(1,0)) - \varphi(P)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\overline{C}\cup\Sigma_\varepsilon} F - \int_{\overline{C}} F\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon} F \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (F\circ\gamma)\cdot\gamma' = \int_0^1 F_1(P + t\varepsilon(1,0))dt \\
&= F_1(P) + \int_0^1 F_1(P+t\varepsilon(1,0)) - F_1(P)dt.
\end{aligned}$$

Dalla continuità di F_1 in P segue che esiste $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P)$ e che si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(P) = F_1(P).$$

Analogamente si prova che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = F_2(P).$$

Rimane così dimostrato che $\nabla\varphi$ esiste ovunque in A_j e si ha $\nabla\varphi = F$. □

La seguente definizione ci servirà per formulare ipotesi sotto le quali la prima implicazione di Proposizione 2.6 si può invertire.

Definizione 2.7. *L'insieme A si dice <u>stellato rispetto a P_0</u> $(P_0 \in A)$ se il segmento*

$$P_0P := \{P_0 + t(P - P_0) \,|\, t \in [0,1]\}$$

è contenuto in A per ogni $P \in A$.

Osservazione 2.7. *Valgono i seguenti fatti.*

- *Se A è stellato (rispetto a $P_0 \in A$) allora A è connesso; in generale il viceversa è falso. Per esempio gli insiemi*

  $$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \qquad \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$$

  sono connessi e non stellati;
- *Se A è convesso, allora A è stellato rispetto ad ogni suo punto (e viceversa);*

- *Si prova, e si intuisce facilmente, che se A è stellato (rispetto a $P_0 \in A$) allora A è semplicemente connesso; in generale non è vero il viceversa. E.g. l'insieme connesso e non stellato $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso.*

PROPOSIZIONE 2.11. *Se F soddisfa la CDI e se ogni componente connessa A_j di A è un insieme stellato rispetto a $P_j \in A_j$, allora F ha potenziale. In particolare, il potenziale che si annulla nei P_j è dato da*

$$\varphi(P) := \int_{\overline{P_j P}} F \qquad (\textit{se } P \in A_j)$$

dove l'orientazione del segmento è scelta di modo che P_j sia il punto iniziale.

DIMOSTRAZIONE: Considerato $P \in A_j$, come prima possiamo determinare r per cui il disco D_r di raggio r e centro P risulta incluso in A_j.

Osserviamo che se $|\varepsilon| < r$ allora il triangolo chiuso T di vertici

$$P_j, \quad P, \quad Q := P + \varepsilon(1,0)$$

è contenuto in A_j, in quanto A_j è stellato rispetto a P_j. Dal Teorema di Green otteniamo allora che

$$\int_{\overline{P_j Q}} F + \int_{-\Sigma_\varepsilon} F + \int_{-\overline{P_j P}} F = \int_{\overline{\partial T}} F = \int_T \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

dove Σ_ε è definito esattamente come nella dimostrazione di Proposizione 2.10. Segue subito che

$$\frac{\varphi(P + \varepsilon(1,0)) - \varphi(P)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\overline{P_j Q}} F - \int_{\overline{P_j P}} F \Big) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} F.$$

Si procede ora come nella dimostrazione di Proposizione 2.10. □

Ritorniamo ora all'analisi complessa. Come nella prima lezione, Ω denoterà un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f = u + iv$ una funzione a valori complessi definita e continua in Ω. Definiamo l'integrale di f lungo una curva regolare a tratti orientata contenuta in Ω.

DEFINIZIONE 2.8. *Sia $\overline{C}$ una curva regolare a tratti orientata con $C \subset \Omega$. Poniamo allora*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz := \int_{\overline{C}} (u, -v) \cdot ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \cdot ds.$$

Esercizi

1. Provare che il campo vettoriale

$$F(x,y) := (e^x(1 + x - y)\,,\, -e^x)$$

è conservativo. Determinarne il potenziale che si annulla nell'origine.

2. Determinare un campo F con potenziale

$$\Phi(x,y) := x - 3y + x^2, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Esistono altri campi con lo stesso potenziale? Motivare la risposta. Calcolare infine

$$\int_P F$$

dove P é la poligonale congiungente, nell'ordine, i punti:

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (0,2), \quad (3,3), \quad (0,4), \quad (5,5), \quad (0,6), \quad (7,7), \quad (0,8).$$

3. Considerato il campo di vettori

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\,, \frac{y+\alpha}{1+x^2+y^2} \right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

determinare un valore di α per cui si abbia

$$\int_C F = 0$$

per ogni circonferenza C centrata nell'origine e percorsa in senso orario.

CHAPTER 3

Seminario del 05 Novembre 2009

Come al solito, sia $f = u + iv$ una funzione a valori complessi definita e continua in un aperto Ω. Il seguente facile risultato è spesso utile nel calcolo esplicito di integrali.

PROPOSIZIONE 3.1. *Nelle ipotesi di Definizione 2.8, sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una parametrizzazione regolare a tratti di $\overline{C}$. Allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

dove il prodotto nell'integrando del secondo membro è quello complesso e dove si sottintende la seguente definizione di integrale di $\alpha + i\beta : [a,b] \to \mathbb{C}$ (con α e β continue)

$$\int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t))dt := \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt.$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))\left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right)dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right) + i\left(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right)dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right)dt + i\int_a^b \left(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right)dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t)dt + i\int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t)dt \\
&= \int_{\overline{C}} (u, -v) \cdot ds + i\int_{\overline{C}} (v, u) \cdot ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Proveremo ora il teorema fondamentale del calcolo integrale complesso. Esso corrisponde, nel contesto dei campi, a Proposizione 2.6.

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia F una primitiva di f in Ω. Se $\overline{C}$ è una curva regolare a tratti orientata, $C \subset \Omega$, con punto iniziale P e punto finale Q, allora si ha*

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = F(Q) - F(P).$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $F = U + iV$. Allora $U, V \in C^1(\Omega)$ soddisfano

$$U_x + iV_x = u + iv$$

e la CCR

$$\nabla V = R\nabla U, \text{ i.e. } \begin{cases} V_x = -U_y \\ V_y = U_x. \end{cases}$$

per Teorema 1.1. Segue subito che U è un potenziale del campo $(u, -v)$ e che V è un potenziale del campo (v, u). Dalla (ii) di Proposizione 2.6, otteniamo allora

$$\begin{aligned} \int_{\overline{C}} f(z)dz &= \int_{\overline{C}} (u, -v) \cdot ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \cdot ds \\ &= U(Q) - U(P) + i\,(V(Q) - V(P)) \\ &= F(Q) - F(P). \end{aligned}$$

□

Ne segue subito il seguente corollario.

PROPOSIZIONE 3.3. *Se f ha una primitiva, l'integrale di f lungo una qualsiasi curva chiusa (regolare a tratti orientata) di Ω è nullo.*

Vale anche il viceversa.

PROPOSIZIONE 3.4. *Supponiamo che l'integrale di f lungo una qualsiasi curva chiusa (regolare a tratti orientata) di Ω sia nullo. Allora f ha una primitiva. Più precisamente: $(u, -v)$ ha un potenziale U, (v, u) ha un potenziale V e $U + iV$ è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE: Ricordando la definizione di integrale (se $\overline{C}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti e orientata in Ω)

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = \int_{\overline{C}} (u, -v) \cdot ds + i \int_{\overline{C}} (v, u) \cdot ds,$$

vediamo subito che i campi $(u, -v)$ e (v, u) sono conservativi in Ω (Proposizione 2.7) e quindi hanno un potenziale (Proposizione 2.10) che indicheremo con U e V, rispettivamente. Poiché

$$R\nabla U = R(u, -v) = (v, u) = \nabla V$$

si ha che $F := U + iV$ è derivabile, per Teorema 1.1. Inoltre

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

□

Dimostriamo ora la prima formula integrale di Cauchy.

PROPOSIZIONE 3.5. *Consideriamo un sottoinsieme aperto E di Ω tale che ∂E sia una curva regolare a tratti, con $\partial E \subset \Omega$. Sia inoltre f derivabile in Ω. Allora*

$$\int_{\partial E} f(z)dz = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Per Teorema 1.1 vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Allora, da una versione sufficientemente generale della formula di Green (NB: Le funzioni u e v risultano essere differenziabili, ma non necessariamente di classe C^1. Tuttavia ∇u e ∇v sono misurabili e inoltre, essendo valida la CCR, si ha $\partial(-v)/\partial x - \partial u/\partial y = \partial u/\partial x - \partial v/\partial y = 0$), si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} f(z)dz &= \int_{\partial E} (u,-v)\cdot ds + i\int_{\partial E}(v,u)\cdot ds \\ &= \int_E \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Possiamo ora enunciare e dimostrare la seconda formula integrale di Cauchy (formula di rappresentazione).

Teorema 3.1. *Siano E ed f come in Proposizione 3.5. Allora, per ogni $w \in E$, si ha*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia D_ε il disco di raggio ε centrato in w. Supporremo ε sufficientemente piccolo, di modo che $D_\varepsilon \subset E$. Poiché $z \mapsto f(z)/(z-w)$ è derivabile in $\Omega\backslash\{w\}$, dalla Proposizione 3.5 segue che

$$0 = \int_{\partial(E\backslash D_\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz - \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

Parametrizzando ∂D_ε con

$$\gamma(t) := w + \varepsilon e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e ricordando Proposizione 3.1, si ottiene allora

$$\int_{\partial E}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})dt$$

per ogni ε sufficientemente piccolo. A questo punto la conclusione segue subito osservando che

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})dt = 2\pi f(w) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it}) - f(w)\, dt = 2\pi f(w)$$

per la continuità di f in w. □

Come conseguenza della seconda formula integrale di Cauchy, si ottiene facilmente il seguente risultato.

Proposizione 3.6. *Siano E ed f come in Proposizione 3.5. Allora f è derivabile infinite volte in w e vale la formula*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial E}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz, \quad w \in E \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

A questo punto rimane provato il seguente teorema.

Teorema 3.2. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *la funzione f è derivabile in Ω;*
(ii) *la funzione f è derivabile infinite volte in Ω;*

(iii) *si ha* $u, v \in C^\infty(\Omega)$ *e, in ogni punto di* Ω*, vale la CCR;*
(iv) *si ha* $u, v \in C^1(\Omega)$ *e, in ogni punto di* Ω*, vale la CCR.*

Dimostriamo il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 3.7. *Se* f *ha una primitiva allora* f *è derivabile. Sul viceversa si può dire quanto segue: in generale non vale, ma è vero se le componenti connesse di* Ω *sono insiemi stellati.*

DIMOSTRAZIONE: Per Teorema 3.2, le primitive F di f sono derivabili infinite volte. In particolare f è derivabile. Per verificare che il viceversa in generale non è vero, consideriamo la funzione

$$f(z) := \frac{1}{z}, \qquad z \in \Omega := \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Se $\overline{C}$ indica la circonferenza unitaria centrata in 0 e percorsa in senso antiorario, si ha

$$\int_{\overline{C}} f(z)\, dz = \int_{\overline{C}} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} = i2\pi \neq 0$$

per Proposizione 3.1. Da Proposizione 3.3 segue allora che f non può avere primitive. Supponiamo infine che f sia derivabile e che le componenti connesse di Ω siano insiemi stellati. Da Teorema 3.2 segue che le funzioni u e v sono di classe C^1 in Ω e che vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u.$$

Questo implica subito che i campi $(u, -v)$ e (v, u) soddisfano la CDI. Quindi, per Proposizione 2.11 tali campi hanno un potenziale. Indicandoli con U e V rispettivamente, lo stesso argomento di Proposizione 3.4 prova che $F := U + iV$ è derivabile e si ha $F' = f$. □

Ricordiamo ora la definizione di funzione armonica.

DEFINIZIONE 3.1. *Una funzione* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *si dice* <u>*armonica in* Ω</u> *se* $u \in C^2(\Omega)$ *e* $\Delta u \equiv 0$*.*

Si ha la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.8. *Se* $f = u + iv$ *è derivabile in* Ω*, allora* u *e* v *sono armoniche in* Ω*.*

DIMOSTRAZIONE: Le funzioni u e v sono di classe C^2 e vale la CCR

$$\nabla v = R\nabla u, \text{ i.e. } \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

per Teorema 3.2. Ricordando anche il Teorema di Schwartz, si ottiene allora

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

da cui $\Delta u \equiv 0$. Analogamente si prova che $\Delta v \equiv 0$. □

Proviamo infine il seguente sorprendente risultato.

COROLLARIO 3.1. *Se* u *è armonica in* Ω*, allora* $u \in C^\infty(\Omega)$*.*

DIMOSTRAZIONE: Sia D un disco qualsiasi incluso in Ω. Osserviamo che il campo

$$R\nabla(u|D) = (-(u|D)_y, (u|D)_x)$$

soddisfa CDI. Infatti:

$$[(u|D)_x]_x = (u|D)_{xx} = -(u|D)_{yy} = [-(u|D)_y]_y.$$

Allora, dato che D è stellato, possiamo applicare Proposizione 2.11 per ottenere $v \in C^1(D)$ tale che

$$\nabla v = R\nabla(u|D).$$

Ne consegue che la funzione $(u|D) + iv$ è derivabile in D. Il Teorema 3.2 implica allora che $u|D \in C^\infty(D)$. La conclusione segue, ovviamente, dall'arbitrarietà di D. $\square$

Esercizi

1. Data la funzione complessa

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2 - i},$$

determinarne il campo di esistenza. Stabilire poi dove f è derivabile e calcolare $f'(z)$ nei punti dove esiste.

2. Sia C_α la curva congiungente $(0,0)$ a $(1,1)$, definita come il grafico della funzione

$$t \mapsto t^\alpha, \qquad t \in [0,1]$$

dove $\alpha > 0$. Si consideri inoltre la funzione complessa

$$f(z) = f(x,y) := x^2 - y^2 + ax \,+\, i2y(x-1).$$

Determinare un valore di a per il quale l'integrale

$$\int_{C_\alpha} f(z)dz$$

risulta non dipendere da α.

3. Verificare che

$$u(x,y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$$

è armonica in $\mathbf{C}\backslash\{(0,0)\}$. Determinare una funzione v tale che $u + iv$ è derivabile in $\mathbf{C}\backslash\{(0,0)\}$.

4. Provare che in Teorema 3.2 la (ii) implica la (iii).