Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA III - AA 11/12

4 giugno 2012

1. Sia E il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse z della regione compatta del piano yz delimitata dall'arco di parabola $z = y^2 - y$ con $y \geq 0$, dalla retta $z = 2$ e dall'asse z. Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente da E del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{y}{1+z^2}, \frac{x}{1+z^2}, (1+z^2)\sqrt{x^2+y^2} \right), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Calcolare $\mathcal{H}^2(\partial E)$, dove E è il solido definito nell'esercizio 1.

3. Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, chiusura di un aperto A la cui frontiera ha misura nulla e siano $u, v : C \to \mathbb{R}$ tali che:

(i) la mappa $\Phi := (u, v) : C \to \mathbb{R}^2$ soddisfa le ipotesi del teorema del cambiamento della variabile nell'integrale;

(ii) $u + iv$ è derivabile in A.

Provare che

$$m_2(\Phi(A)) = \frac{1}{2} \int_A (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2).$$