Analisi Funzionale (a.a. 2011/12)
DIARIO

Silvano Delladio

May 31, 2012

Contents

CHAPTER 1

Complementi di teoria della misura

[* Prima settimana (20/02/2012); 3 *]

1. Misure esterne metriche, gli esempi di $\mathcal{L}^n$ e $\mathcal{H}^s$

DEFINIZIONE 1.1. *Una misura esterna su uno spazio metrico (X,d) è detta "di Carathéodory" (o anche "metrica") se*

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \in 2^X$ tale che

$$dist(A,B) := \inf\{d(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\} > 0.$$

TEOREMA 1.1 (***). *Sia φ una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico (X,d). Allora ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile.*

OSSERVAZIONE 1.1. Si può provare che vale anche il "viceversa" di Teorema 1.1: Se φ è una misura esterna su uno spazio metrico (X,d) e se ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile, allora φ è di Carathéodory ([**5**, Theorem 1.7]).

PROPOSIZIONE 1.1 ([**1**]). *Sia dato $\mathcal{I} \subset 2^X$ e indichiamo con $\mathcal{A}$ la famiglia delle σ-algebre in X contenenti $\mathcal{I}$. Allora*

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \cap_{\Sigma \in \mathcal{A}} \Sigma$$

è una σ-algebra in X. Essa è detta "la σ-algebra generata da $\mathcal{I}$".

PROPOSIZIONE 1.2 (**). *Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di X. Allora:*

1. *Si ha $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$;*
2. *Se X è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$;*
3. *Se (X,d) è uno spazio metrico separabile, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) = \Sigma(\mathcal{G})$.*

OSSERVAZIONE 1.2. In uno spazio topologico che non sia metrico e separabile può effettivamente accadere che $\Sigma(\mathcal{K}) \neq \Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$. Si consideri per esempio $[0,1]$ con la topologia discreta e cioè $\mathcal{G} = 2^{[0,1]}$. Osserviamo che $\mathcal{K}$ coincide con la famiglia dei sottoinsiemi finiti di $[0,1]$. Se consideriamo la σ-algebra

$$\Sigma_0 := \{E \in 2^X \,|\, \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$$

si ha $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma_0 \subset 2^{[0,1]}$. Inoltre, evidentemente, vale $\Sigma_0 \neq 2^{[0,1]} = \mathcal{G} = \Sigma(\mathcal{G})$.

Definizione 1.2. *Siano X uno spazio topologico, φ una misura esterna su X e $\mathcal{M}_\varphi$ la σ-algebra degli insiemi misurabili rispetto a φ. Allora:*

(i) *La σ-algebra $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ viene indicata con $\mathcal{B}(X)$ e i suoi elementi sono detti "insiemi boreliani";*
(ii) *φ è detta "boreliana" (oppure "di Borel") se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$;*
(iii) *φ è detta "Borel regolare" se è boreliana e se inoltre per ogni insieme $A \in 2^X$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $B \supset A$ e $\varphi(B) = \varphi(A)$;*
(iv) *φ è detta "di Radon" se è Borel regolare e se $\varphi(K) < \infty$ per ogni insieme compatto K in X.*

Da Teorema 1.1 segue subito il seguente risultato.

Corollario 1.1 (°). *Ogni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è boreliana.*

Lemma 1.1 (°). *Consideriamo uno spazio topologico X e sia $\mathcal{D} \subset 2^X$ tale che:*

(i) *$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{D}$;*
(ii) *$\mathcal{D}$ è chiuso rispetto all'unione numerabile e rispetto all'intersezione numerabile.*

Allora $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D}$.

Teorema 1.2 (***). *Sia φ una misura esterna boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(B) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset B$ e $\varphi(B - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $B \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset B$ tale che $\varphi(G - B) \leq \varepsilon$.*

[* Seconda settimana (27/02/2012); 6 *]

Corollario 1.2. *Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset E$ e $\varphi(E - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $E \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset E$ tale che $\varphi(G - E) \leq \varepsilon$.*

Teorema 1.3 ([**1**]). *Si consideri la funzione $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definita da*

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \Big\{ \sum_j v(I_j) \,\Big|\, \{I_j\} \in \mathcal{R}(E) \Big\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{R}(E)$ indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di E costituiti di intervalli aperti in $\mathbb{R}^n$, mentre $v(I_j)$ denota la misura elementare dell'intervallo I_j. Allora $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna detta "misura esterna di Lebesgue n-dimensionale".

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.

TEOREMA 1.4 ([**1**]). *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$;*
(2) *Se I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$;*
(3) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(E+\tau) = \mathcal{L}^n(E)$;*
(4) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$ si ha $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$.*

TEOREMA 1.5 (**). *La misura esterna di Lebesgue n-dimensionale è una misura esterna metrica ed è di Radon.*

ESEMPIO 1.1 (Esistenza di insiemi non misurabili). Consideriamo la seguente relazione di equivalenza in $[0,1]$: $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Grazie all'assioma della scelta possiamo poi "costruire" un insieme E di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, poniamo infine

$$E_i := (E \cap [0, q_i] + 1 - q_i) \cup (E \cap (q_i, 1] - q_i).$$

Allora E non è misurabile. Se lo fosse, lo sarebbero anche tutti gli E_i. Poiché questi sono a-due-a-due disgiunti e la loro unione è $[0,1]$ (osserviamo che, poiché 0 necessita di un "trattamento speciale", è più rapido, ancorché sufficiente, limitarsi a provare che $(0,1] \subset \cup_i E_i$), si giungerebbe all'assurdo:

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) = \mathcal{L}^1\Big(\cup_i E_i\Big) = \sum_i \mathcal{L}^1(E_i) = \sum_i \mathcal{L}^1(E).$$

OSSERVAZIONE 1.3. Senza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

OSSERVAZIONE 1.4. Utilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili rispetto a $\mathcal{L}^n$ ma non sono boreliani.

TEOREMA 1.6 ([**1**]). *Dati $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, indichiamo con $\mathcal{R}_\delta(E)$ la famiglia dei ricoprimenti numerabili $\{C_j\}$ di E tali che $diam(C_j) \leq \delta$ per ogni j. Per $s \in [0, +\infty)$, poniamo anche*

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)}, \qquad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ definita da

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf\left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \,\middle|\, \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\}$$

è una misura esterna.

Teorema 1.7 ([**1**]). *Sia* $s \in [0, +\infty)$ *e* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Allora la funzione* $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ *è monotona decrescente, quindi esiste*

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

La mappa $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ *è una misura esterna metrica.*

Definizione 1.3. $\mathcal{H}^s$ *è detta "misura esterna di Hausdorff s-dimensionale".*

Alcune ulteriori proprietà della misura esterna di Hausdorff sono raccolte in questo teorema.

Teorema 1.8 ([**1**]). *Si ha:*

(1) $\mathcal{H}^0 = \#$ *(misura del conteggio);*
(2) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *(in* $\mathbb{R}^n$*);*
(3) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\mathcal{H}^s(E + \tau) = \mathcal{H}^s(E)$*;*
(4) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *si ha* $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$*;*
(5) *Se* $\mathcal{H}^s(E) < \infty$*, con* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e* $s \geq 0$*, allora* $\mathcal{H}^t(E) = 0$ *per ogni* $t > s$*.*

Osservazione 1.5. Se $t > n$ si ha $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$.

Da Teorema 1.1 e Teorema 1.7 segue subito che $\mathcal{H}^s$ è boreliana. In realtà vale il seguente risultato più forte.

Teorema 1.9 (**). *La misura esterna di Hausdorff è una misura esterna Borel regolare, ma non di Radon (eccetto che per* $s = n$*).*

Come ci si aspetta vale il seguente risultato.

Teorema 1.10. *Nel contesto delle sottovarietà regolari, si ha:*

(1) *Se* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è una curva regolare, allora*

$$\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) = \int_a^b \|\gamma'\|;$$

(2) *Se* $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ *è una superficie regolare, allora*

$$\mathcal{H}^2(\varphi(A)) = \int_A \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\| dsdt.$$

Esempio 1.2. Sia C l'insieme di Cantor. Se esiste s tale che $\mathcal{H}^s(C) \in (0, +\infty)$ allora $s = \ln 2 / \ln 3$.

Definizione 1.4. *La "dimensione di Hausdorff" dell'insieme* $E \subset \mathbb{R}^n$ *è il numero*

$$dim_H(E) := \inf\{s \in [0, +\infty) \,|\, \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Esempio 1.3. Se C è una curva regolare (in $\mathbb{R}^n$), allora $\dim_H(C) = 1$. Se S è una superficie regolare (in $\mathbb{R}^n$), allora $\dim_H(S) = 2$. L'insieme di Cantor ha dimensione di Hausdorff pari a $\ln 2/\ln 3$ (sketch-proof da Esempio 1.2, per una dimostrazione completa vedasi [**4**, Theorem 1.14]).

Osservazione 1.6. La "misura di Lebesgue" $\mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}$ e la "misura di Hausdorff" $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}$, per semplicità sono solitamente indicate con $\mathcal{L}^n$ and $\mathcal{H}^s$ rispettivamente.

[* Terza settimana (05/03/2012); 9 *]

2. Funzioni misurabili
Il Teorema di Egoroff e il Teorema di Lusin

Teorema 2.1 (Egoroff (**)). *Siano dati:*

(i) *uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che $\mu(X) < +\infty$;*
(ii) *una successione di funzioni misurabili $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ($j = 1, 2, \dots$) che converge puntualmente quasi ovunque a $f : X \to \mathbb{R}$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(X - A_\varepsilon) \le \varepsilon$ e f_j converge a f uniformemente in A_ε.

Osservazione 2.1. Il Teorema 2.1 non vale (in generale) se $\mu(X) = +\infty$, nemmeno nel caso speciale della σ-finitezza. Per esempio, consideriamo $[0, +\infty)$ con la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1 \llcorner [0, +\infty)$ e sia

$$f_k(x) := \frac{x}{k}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Si ha che f_k converge puntualmente alla funzione identicamente nulla. Allora, se fosse vero il Teorema di Egoroff, si giungerebbe alla conclusione assurda che f_k converge uniformemente a zero su un insieme illimitato.

Osservazione 2.2. In generale, il teorema di Egoroff può non valere se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Si consideri per esempio $X = (0, 1)$ con la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1 \llcorner (0, 1)$ e $f_j \equiv j$. Allora f_j converge puntualmente a $+\infty$, ma evidentemente la tesi di Teorema 2.1 non vale.

Teorema 2.2 ([**1**]). *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e una funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$. Allora esiste una successione di funzioni semplici e misurabili $s_j : X \to \mathbb{R}$ tali che $0 \le s_j \le s_{j+1} \le f$ e s_j converge puntualmente a f. Inoltre, se f è limitata la convergenza è uniforme.*

Definizione 2.1. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura tale che X sia anche uno spazio topologico e si abbia $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Allora una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice "quasi continua" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso F di X tale che $\mu(X - F) \le \varepsilon$ e $f|F$ è continua.*

TEOREMA 2.3 (Lusin (***)). *Sia dato uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mu(X) < +\infty$ e tale che:*

(i) *X è uno spazio topologico e $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$;*
(ii) *per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso F di A soddisfacente $\mu(A - F) \leq \varepsilon$.*

Allora ogni funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ è quasi continua.

Ricordando Corollario 1.2, si ottiene subito il seguente risultato.

COROLLARIO 2.1 (°). *Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) tale che $\varphi(X) < +\infty$. Allora ogni funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ è quasi continua.*

CHAPTER 2

Spazi L^p e Teorema di Radon-Nikodym.

[* Quarta settimana (12/03/2012); 12 *]

1. Spazi L^p.

Definizione 1.1. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Allora $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è detto "maggiorante essenziale" di f se vale $f(x) \leq M$ quasi ovunque rispetto a μ. L'insieme dei maggioranti essenziali di f è indicato con $\mathcal{M}_f$.*

Osservazione 1.1. Nelle ipotesi di Definizione 1.1, si ha evidentemente $\mathcal{M}_f \ni +\infty$. Anzi, precisamente, si ha

$$\mathcal{M}_f = \{+\infty\} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{M}_f \text{ è una semiretta destra chiusa.}$$

Infatti, se $\mathcal{M}_f \neq \{+\infty\}$ si ha certamente, prima di tutto, che $\mathcal{M}_f$ è una semiretta destra. Per verificare la chiusura, consideriamo una successione m_j decrescente tale che $m_j \to \inf \mathcal{M}_f$. Posto

$$E_j := \{x \in X \mid f(x) > m_j\} \in \mathcal{A}$$

osserviamo che (per ogni j)

$$\mu(E_j) = 0, \qquad E_j \subset E_{j+1}.$$

Ne viene che

$$\mu(\cup_j E_j) = \lim_j \mu(E_j) = 0.$$

Ma

$$\cup_j E_j = \{x \in X \mid f(x) > \inf \mathcal{M}_f\}$$

e quindi $\inf \mathcal{M}_f \in \mathcal{M}_f$.

Definizione 1.2. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Se $p \in [1, +\infty]$, con $L^p(X)$ indicheremo la classe delle funzioni misurabili $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\|f\|_p < \infty$, dove*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} & \textit{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \min \mathcal{M}_{|f|} & \textit{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Nel corso della dimostrazione della sottostante disuguaglianza di Hölder si usa il seguente semplice risultato.

Proposizione 1.1 ([**1**]). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Inoltre sia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione misurabile tale che* $f \geq 0$ *quasi ovunque rispetto a* μ *e soddisfacente*

$$\int f d\mu = 0.$$

Allora $f = 0$ *quasi ovunque rispetto a* μ.

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Hölder (**)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e siano* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *due funzioni misurabili. Allora*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove $p, p' \in [1, +\infty]$ *sono coniugati, cioè tali che* $p = 1$ *e* $p' = +\infty$ *(o viceversa) oppure*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad (\textit{con } p, p' \in (1, +\infty)).$$

Teorema 1.2 (*). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura,* $p \in [1, +\infty]$ *e* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *misurabile. Allora*

(1) $\|f\|_p \geq 0$;
(2) $\|f\|_p = 0$ *se e solo se* $f = 0$ *quasi ovunque (rispetto a* μ*);*
(3) $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$, *per ogni* $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.3 (**). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$. *Allora* $L^p(X)$ *è uno spazio vettoriale e vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (\textit{Disuguaglianza di Minkowski})$$

per ogni $f, g \in L^p(X)$.

Osservazione 1.2. Facendo il quoziente di $L^p(X)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad f = g \text{ q.o.}$$

si ottiene in modo naturale uno spazio vettoriale che, per semplicità, continueremo a indicare con la notazione $L^p(X)$. La funzione che associa a una classe di equivalenza F il numero $\|f\|_p$, dove f è un rappresentante qualsiasi di F, definisce una norma sul quoziente $L^p(X)$. Sempre per semplicità, non indicheremo mai tale norma di F con notazioni del tipo $\|F\|$ ma scriveremo piuttosto $\|f\|_p$.

Teorema 1.4 (Fisher-Riesz (***)). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$. *Allora lo spazio vettoriale normato* $L^p(X)$ *è uno spazio di Banach.*

[* Quinta settimana (19/03/2012); 15 *]

Dalla dimostrazione di Teorema 1.4 segue subito il seguente risultato.

Proposizione 1.2 (°). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$. *Allora ogni successione convergente in* $L^p(X)$ *ha una sottosuccessione convergente q.o.*

Osservazione 1.3. In generale una successione convergente in $L^p(X)$ non converge q.o. Esempio.

Esempio 1.1. Consideriamo lo spazio con misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, dove μ indica la misura del conteggio. Se $p \in [1, +\infty]$, indichiamo con l_p la famiglia delle successioni $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ tali che $\|\{a_j\}\|_{l_p} < +\infty$, dove

$$\|\{a_j\}\|_{l_p} := \begin{cases} \left(\sum_j |a_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_j |a_j| & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Allora $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ è uno spazio normato isometrico a $L^p(\mathbb{N})$ e quindi è anche completo.

Definizione 1.3. *Sia X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Allora una funzione $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta "misura con segno" se sono verificare le seguenti proprietà:*

(i) *ν assume al più uno soltanto dei valori $+\infty$ e $-\infty$;*
(ii) *$\nu(\emptyset) = 0$;*
(iii) *Se $\{A_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ a-due-a-due disgiunti, allora le due serie*

$$\sum_j \nu(A_j) \vee 0, \qquad \sum_j (-\nu(A_j)) \vee 0$$

non divergono mai contemporaneamente e si ha

$$\nu(\cup_j A_j) = \sum_j \nu(A_j).$$

La terna $(X, \mathcal{A}, \nu)$ è detta "spazio con misura con segno". Inoltre si dice che un insieme $A \in \mathcal{A}$ è "positivo (risp. negativo) [risp. nullo] per ν" se $\nu(E) \geq 0$ (risp. $\nu(E) \leq 0$) [risp. $\nu(E) = 0$] per ogni $E \in \mathcal{A}$ tale che $E \subset A$:

Osservazione 1.4. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile tale che almeno una di $f \vee 0$ e $(-f) \vee 0$ sia sommabile. Allora

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{A} \tag{1.1}$$

definisce una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ (Definizione 1.4). Osserviamo che $\{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ è un insieme positivo per ν, mentre $\{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$ è un insieme negativo per ν. L'insieme $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ è nullo per ν. Sorge spontaneamente la seguente questione: se ν è una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ, allora è vero che ν si può rappresentare nella forma integrale (1.1)? Ebbene, a tale questione risponde affermativamente il teorema di Radon Nikodym (Teorema 2.1) che proveremo presto. Le proposizioni che seguono serviranno per dimostrare questo importante risultato.

Lemma 1.1 (**). *Consideriamo uno spazio con misura con segno $(X, \mathcal{A}, \nu)$ e $E \in \mathcal{A}$ tale che $\nu(E) \in (0, +\infty)$. Allora esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $A \subset E$, A è positivo e $\nu(A) > 0$.*

[* Sesta settimana (26/03/2012); 18 *]

Teorema 1.5 (Decomposizione di Hahn (***)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \nu)$ uno spazio con misura con segno. Allora esistono $P, N \in \mathcal{A}$ disgiunti e tali che P è positivo per ν, N è negativo per ν e $X = P \cup N$.*

Osservazione 1.5. Se c'è un insieme non vuoto e nullo per ν, allora esistono più decomposizioni di Hahn.

Definizione 1.4. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X.*

(1) *Se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una misura con segno, allora si dice che "ν è assolutamente continua rispetto a μ" se $\nu(A) = 0$ ogni volta che $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) = 0$. In tal caso si scrive $\nu << \mu$.*
(2) *Se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ sono misure, allora si dice che "μ_1 e μ_2 sono mutuamente singolari" se esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu_1(A) = 0$ e $\mu_2(X - A) = 0$. In tal caso si scrive $\mu_1 \perp \mu_2$.*

Teorema 1.6 (Decomposizione di Jordan (**)). *Dato uno spazio con misura con segno $(X, \mathcal{A}, \nu)$, esiste una ed una sola coppia di misure mutuamente singolari ν^+ e ν^- tale che:*

(i) *almeno una di esse è finita;*
(ii) *vale $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.*

La misura $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ è detta "variazione totale di ν".

Proposizione 1.3 (*). *Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una misura con segno. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *$\nu << \mu$;*
(2) *$|\nu| << \mu$;*
(3) *$\nu^+ << \mu$ e $\nu^- << \mu$.*

Teorema 1.7 (**). *Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una misura e $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una misura con segno (nota bene: ν è finita!). Allora $\nu << \mu$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\mu(E) \leq \delta$ implica $|\nu(E)| \leq \varepsilon$.*

2. Il Teorema di Radon-Nikodym.

Definizione 2.1. *Siano X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Una "partizione (misurabile di X)" è una famiglia finita $\mathcal{P} : \{A_1, \ldots, A_m\}$ di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti tali che $\cup_i A_i = X$. Una partizione $\mathcal{P}'$ è detta "raffinamento" di $\mathcal{P}$ se per ogni $A' \in \mathcal{P}'$ esiste $A \in \mathcal{P}$ tale che $A' \subset A$.*

Lemma 2.1 (**). *Siano X un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X e $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ due misure (nota bene: λ, μ sono finite) tali che $\lambda(A) \leq \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Sia $\mathcal{P} =$*

$\{A_1, \dots, A_m\}$ *una partizione misurabile di* X *e sia* $\mathcal{P}'$ *un raffinamento di* $\mathcal{P}$. *Poniamo*

$$h_{\mathcal{P}} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda(A_i)}{\mu(A_i)} \varphi_{A_i}$$

dove si assume la convenzione $\frac{\lambda(A_i)}{\mu(A_i)} := 0$ *se* $\mu(A_i) = 0$. *Analogamente definiamo* $h_{\mathcal{P}'}$. *Allora, per ogni* $A \in \mathcal{P}$ *si ha*

$$\lambda(A) = \int_A h_{\mathcal{P}}\, d\mu = \int_A h_{\mathcal{P}'}\, d\mu$$

e

$$\int_A h_{\mathcal{P}'}^2\, d\mu - \int_A h_{\mathcal{P}}^2\, d\mu = \int_A (h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}})^2\, d\mu \geq 0.$$

[* Settima settimana (02/04/2012); 21 *]

Teorema 2.1 (Radon-Nikodym "piccolo" (***)). *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura tale che* $\mu(X) < +\infty$ *e sia* λ *una misura su* $\mathcal{A}$ *tale che* $\lambda(A) \leq \mu(A)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$. *Allora esiste una funzione misurabile* $f : X \to [0, 1]$ *tale che*

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\mu$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$ *(nota bene:* f *è sommabile!). Inoltre, se* $g : X \to [0, +\infty]$ *è una funzione misurabile, si ha*

$$\int_X g\, d\lambda = \int_X gf\, d\mu.$$

Teorema 2.2 (Radon-Nikodym (***)). *Siano dati uno spazio con misura* σ*-finita* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e una misura con segno* σ*-finita* $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $\nu << \mu$. *Allora esiste una funzione misurabile* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che almeno una di* $f \vee 0$ *e* $(-f) \vee 0$ *sia sommabile (quindi* f *è integrabile) e vale*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$. *Tale funzione* f *è chiamata "la derivata di Radon-Nikodym di* ν *rispetto a* μ*" e si denota col simbolo* $\frac{d\nu}{d\mu}$.

[* Ottava settimana (09/04/2012); 22 *]

Osservazione 2.1. Il Teorema di Radon-Nikodym non vale senza l'ipotesi di σ-finitezza, per esempio (in $\mathbb{R}^n$) per $\mu = \mathcal{H}^0$ e $\nu = \mathcal{L}^n$.

Il seguente risultato si dimostra sfruttando l'argomento utilizzato all'inizio del primo passo della dimostrazione di Teorema 2.2.

Teorema 2.3 (Decomposizione di Lebesgue (**)). *Si considerino un insieme* X, *una* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *in* X *e due misure* σ*-finite* $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. *Allora esiste una ed una sola coppia di misure* $\nu_0, \nu_1 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *tali che* $\nu = \nu_0 + \nu_1$ *con* $\nu_0 << \mu$ *e* $\nu_1 \perp \mu$. *La coppia* (ν_0, ν_1) *è detta "decomposizione di Lebesgue di* ν *rispetto a* μ*".*

[* Nona settimana (16/04/2012); 25 *]

Dal teorema di Radon-Nikodym "grande"e dal teorema di decomposizione di Lebesgue segue subito il seguente risultato.

Teorema 2.4 (°). *Si considerino un insieme X, una σ-algebra $\mathcal{A}$ in X e due misure σ-finite $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. Allora esiste una unica misura $\nu_1 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ e una unica funzione $f : X \to [0, +\infty]$ integrabile rispetto a μ tali che $\nu_1 \perp \mu$ e vale*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu + \nu_1(E)$$

per ogni $E \in \mathcal{A}$.

CHAPTER 3

Analisi funzionale. Spazi di Banach e di Hilbert.

1. Spazi di Banach, Teorema di Hahn-Banach.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano X e Y spazi vettoriali (su $\mathbb{R}$). Allora $L(X,Y)$ denota lo spazio vettoriale degli operatori lineari $T : X \to Y$. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi vettoriali normati, $BL(X,Y)$ indica il sottospazio vettoriale di $L(X,Y)$ formato dagli operatori lineari e continui $T : X \to Y$. Per semplicità scriveremo X' in luogo di $BL(X,\mathbb{R})$.*

OSSERVAZIONE 1.1. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi vettoriali normati di dimensione finita allora $BL(X,Y) = L(X,Y)$.

OSSERVAZIONE 1.2. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi vettoriali normati e $T \in L(X,Y)$. Allora T è continuo se e solo se T è continuo in un punto fissato qualsiasi $x_0 \in X$.

PROPOSIZIONE 1.1 (**). *Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi vettoriali normati e $T \in L(X,Y)$, le seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*

(1) *$T \in BL(X,Y)$;*
(2) *T è continuo in in un punto fissato qualsiasi $x_0 \in X$;*
(3) *Esiste $M > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$ per ogni $x \in X$;*
(4) *T è Lipschitz;*
(5) *T è limitato, i.e. $T(A)$ è un insieme limitato in Y se A è un insieme limitato in X;*

ESEMPIO 1.1. Sia $X := C^1([0,1])$, $Y := C^0([0,1])$ e $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_Y := \|\cdot\|_\infty$. Allora l'operatore

$$T : X \to Y, \qquad Tf := f'$$

è lineare ma non è continuo (e.g. se $f_j(t) := t^j$, la successione $\{f_j\}$ è limitata mentre $\{Tf_j\}$ è illimitata). Osserviamo che se in X consideriamo la norma $\|\cdot\|_{C^1}$ (al posto di $\|\cdot\|_\infty$) allora l'operatore T risulta essere continuo.

TEOREMA 1.1 (***). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi vettoriali normati. Allora:*

(1) *Per ogni $T \in BL(X,Y)$, l'insieme*

$$\mathcal{M}_T := \{M \geq 0 \,|\, \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X \text{ per ogni } x \in X\}$$

è una semiretta destra propria e chiusa;

(2) *La funzione*

$$BL(X,Y) \ni T \mapsto \|T\|_{BL} := \min \mathcal{M}_T \in \mathbb{R}$$

è una norma in $BL(X,Y)$*;*

(3) *Se* $T \in BL(X,Y)$ *si ha*

$$\|T\|_{BL} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Tx\|_Y; \tag{1.1}$$

(4) *Se se* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *è uno spazio di Banach, allora* $(BL(X,Y), \|\cdot\|_{BL})$ *è uno spazio di Banach.*

Osservazione 1.3. Nel caso che la palla unitaria chiusa di $(X, \|\cdot\|_X)$

$$B_X := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

sia insieme compatto (per esempio se X ha dimensione finita), gli ultimi due "sup" in (1.1) sono in realtà dei "max". Vediamo ora un esempio in cui tale conclusione non è verificata. Consideriamo il caso che $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ coincidano entrambi con lo spazio di Banach $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$ definito in Esempio 1.1 di Chapter 2. Sia poi $T : l_1 \to l_1$ l'operatore lineare che associa a $x = (x_1, x_2, \dots)$ l'elemento $Tx = (y_1, y_2, \dots)$, con

$$y_i := \left(1 - \frac{1}{i}\right) x_i$$

per ogni $i = 1, 2, \dots$ Si vede allora facilmente che $\|T\|_{BL} = 1$ ma che non esiste alcun $x \in B_{l_1}$ tale che $\|Tx\|_{l_1} = \|T\|_{BL} = 1$.

[* Decima settimana (23/04/2012); 28 *]

La precedente osservazione mostra, tra l'altro, che B_{l_1} non è un insieme compatto. In realtà questo fatto si estende a tutti gli spazi normati di dimensione infinita. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.2 (°). *Sia* $(X, \|\cdot\|_X)$ *uno spazio vettoriale normato. Allora* B_X *è un insieme compatto se e soltanto se* X *ha dimensione finita.*

Esso è una conseguenza immediata del seguente lemma.

Lemma 1.1 (**). *Sia* $(X, \|\cdot\|_X)$ *uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita. Allora esiste una famiglia numerabile* $\{x_1, x_2, \dots\}$ *di vettori unitari in* X *tali che*

$$dist(x_j, span\{x_1, \dots, x_{j-1}\}) = 1$$

per ogni $j = 2, 3, \dots$

Teorema 1.3 (Hahn-Banach analitico (***)). *Siano* X *uno spazio vettoriale (su* $\mathbb{R}$*),* G *un sottospazio vettoriale di* X *e* $g : G \to \mathbb{R}$ *un operatore lineare. Supponiamo che esista una funzione* $p : X \to \mathbb{R}$ *positivamente omogenea e subadditiva tale che* $g \leq p|_G$*. Allora esiste un operatore lineare* $f : X \to \mathbb{R}$ *tale che* $f|_G = g$ *e* $f \leq p$*.*

Osservazione 1.4. Se X è uno spazio vettoriale e $p : X \to \mathbb{R}$ è una funzione positivamente omogenea, allora $p(0) = 0$. Infatti $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0)$, da cui la tesi.

2. Separazione di insiemi convessi. Teoremi dell'uniforme limitatezza, dell'applicazione aperta e del grafico chiuso.

Corollario 2.1 ((**)). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se G è un sottospazio vettoriale di X e $g : G \to \mathbb{R}$ è un operatore lineare continuo, allora esiste $f \in X'$ tale che*
$$f|_G = g, \qquad \|f\|_{BL} = \|g\|_{BL(G,\mathbb{R})} := \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \le 1}} |g(x)|;$$
(2) *Per ogni $x_0 \in X$ esiste $f \in X'$ tale che*
$$f(x_0) = \|x_0\|, \qquad \|f\|_{BL} = 1.$$
Si ha pertanto
$$\|x_0\| = \max_{\substack{h \in X' \\ \|h\|_{BL} \le 1}} h(x_0) = \max_{\substack{h \in X' \\ \|h\|_{BL} \le 1}} |h(x_0)|.$$

[* Undicesima settimana (30/04/2012); 29 *]

Come applicazione del Teorema di Hahn-Banach, proveremo Teorema 2.1. Questo importante risultato di analisi convessa stabilisce una proprietà di separazione dei convessi in uno spazio vettoriale normato. Per la dimostrazione ci serviremo, oltre che del Teorema di Hahn-Banach, anche del seguente lemma in cui si introduce la funzione radiale di un convesso e si prova che essa è una seminorma.

Lemma 2.1 (**). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato e sia A un sottoinsieme aperto e convesso di X tale che $0 \in A$. Allora, per ogni $x \in X$, l'insieme*
$$R_x := \{t > 0 \,|\, x/t \in A\}$$
è una semiretta destra. La "funzione radiale di A" così definita
$$\rho_A : X \to [0, +\infty], \quad \rho_A(x) := \inf R_x$$
ha le seguenti proprietà:

(1) *ρ_A è positivamente omogenea;*
(2) *$\rho_A(x) < 1$ se e solo se $x \in A$;*
(3) *ρ_A è subadditiva;*
(4) *Se $r > 0$ è tale che $rB_X \subset A$ allora $\rho_A(x) \le \|x\|/r$, per ogni $x \in X$.*

[* Dodicesima settimana (07/05/2012); 32 *]

Teorema 2.1 (Separazione di convessi (**)). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Consideriamo due sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti A, B di X e supponiamo che A sia aperto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B, cioè esistono $f \in X' \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f|_A \leq \alpha$ e $f|_B \geq \alpha$.*

Vale anche il seguente ulteriore teorema di separazione, per la cui dimostrazione rimandiamo a [**2**, Teorema I.7].

Teorema 2.2 (Separazione stretta di convessi). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Consideriamo due sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti A, B di X con A chiuso e B compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa strettamente A e B, cioè esistono $f \in X' \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $f|_A \leq \alpha - \varepsilon$ e $f|_B \geq \alpha + \varepsilon$.*

Torniamo ora ad L^p, per studiarne lo spazio duale. Vale il seguente teorema.

Teorema 2.3 ((**)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, $p \in [1, +\infty]$ e $g \in L^{p'}(X)$. Allora il funzionale*

$$f \mapsto \int_X fg d\mu, \qquad f \in L^p(X)$$

definisce un elemento di $(L^p(X))'$ indicato con Jg. Inoltre:

(1) *Per $p > 1$ si ha $\|Jg\|_{BL} = \|g\|_{p'}$;*
(2) *Se $p = 1$ e μ è σ-finita, vale $\|Jg\|_{BL} = \|g\|_\infty$.*

Osservazione 2.1. Nel caso $p = 1$ l'ipotesi di σ-finitezza è in generale necessaria, come mostra il seguente esempio. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ lo spazio con misura tale che

$$X := \mathbb{R}, \qquad \mathcal{A} := \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$$

e

$$\mu(A) := \begin{cases} \mathcal{L}^1(A) & \text{se } A \cap (0, +\infty) = \emptyset \\ +\infty & \text{se } A \cap (0, +\infty) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Osserviamo che se $f \in L^1(X)$ allora $f|_{(0,+\infty)} = 0$. Infatti per ogni $x \in (0, +\infty)$ si ha

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu \geq \int_{\{x\}} |f| d\mu$$

che sarebbe assurdo se fosse $f(x) \neq 0$. Se g è la funzione caratteristica della semiretta $(0, +\infty)$, si ha pertanto $fg = 0$ per ogni $f \in L^1(X)$ da cui

$$Jg = 0.$$

Quindi $\|Jg\|_{BL} = 0 < 1 = \|g\|_\infty$.

Nella prossima osservazione esibiremo un esempio di funzionale di $(L^\infty)'$ che non è immagine di $J : L^1 \to (L^\infty)'$. Per costruirlo, ci serviremo del teorema di Hahn-Banach (anzi di Corollario 2.1) e del Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni del quale richiamiamo qui l'enunciato, mentre rimandiamo a [**2**, Corollario IV.24] per una dimostrazione.

Teorema 2.4 (Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni). *Sia $g \in L^1(\Omega)$, con Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che*

$$\int_\Omega \varphi g = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora $g = 0$ q.o. in Ω.

Osservazione 2.2. Per $p = +\infty$ la mappa J, in generale, non è suriettiva. Consideriamo per esempio $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1$ e la mappa

$$\Phi : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \mapsto \Phi(\varphi) := \varphi(0).$$

Ovvialmente $C_c(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $L^\infty(\mathbb{R})$ e si vede subito che (con la notazione di Corollario 2.1)

$$\|\Phi\|_{BL(C_c(\mathbb{R})),\mathbb{R})} = 1.$$

Grazie a Corollario 2.1 esiste $F \in (L^\infty(\mathbb{R}))'$ tale che

$$F|_{C_c(\mathbb{R})} = \Phi, \qquad \|F\|_{BL} = 1.$$

Ragionando per assurdo proviamo ora che $J : L^1(\mathbb{R}) \to (L^\infty(\mathbb{R}))'$ non è suriettiva: se lo fosse, esisterebbe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $Jg = F$ e quindi anche

$$\int_\mathbb{R} \varphi g \, d\mathcal{L}^1 = Jg(\varphi) = F(\varphi) = \Phi(\varphi) = \varphi(0)$$

per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. In particolare

$$\int_\mathbb{R} \varphi g \, d\mathcal{L}^1 = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Da Teorema 2.4 seguirebbe subito che $g = 0$ q.o. e di qui verrebbe la conclusione assurda che $F = 0$. Dobbiamo perciò ammettere che J non è suriettiva.

[* Tredicesima settimana (14/05/2012); 35 *]

Il seguente importante risultato e la successiva osservazione completano il "quadro teorico" relativo allo spazio duale di L^p.

Teorema 2.5 (Rappresentazione di Riesz (***)). *In ognuna delle seguenti ipotesi alternative*

(i) *$p = 1$ e μ è σ-finita*
(ii) $p \in (1, +\infty)$

si ha che la mappa $J : L^{p'}(X) \to (L^p(X))'$ introdotta in Teorema 2.3 è un isomorfismo isometrico.

Osservazione 2.3. Per $p = 1$ esistono misure che non sono σ-finite e per le quali la tesi di Teorema 2.5 non vale. Infatti, nel caso dell'esempio esaminato in Osservazione 2.1 si ha $J\varphi_{(0,\infty)} = 0$ (anzi, $J\varphi_{(r,\infty)} = 0$ per ogni $r \geq 0$!), i.e. J non è iniettiva. Osservazione 2.2 mostra invece che Teorema 2.5 può non valere per $p = +\infty$.

Il seguente risultato servirà per provare il successivo teorema, dovuto a Banach e Steinhaus. Per la sua dimostrazione vedasi [**2**, Lemma II.1].

Teorema 2.6 (Lemma di Baire). *Sia X uno spazio metrico completo. Sia $\{X_i\}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi di X tali che $X_i^\circ = \emptyset$ per ogni i. Allora si ha anche $(\cup_i X_i)^\circ = \emptyset$.*

Teorema 2.7 (Uniforme limitatezza (**)). *Siano dati uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e uno spazio vettoriale normato $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Si consideri una famiglia $\{T_i\}_{i\in I}$ di $BL(X,Y)$, non necessariamente numerabile, tale che $\sup_i \|T_i x\|_Y < +\infty$ per ogni $x \in X$. Allora $\sup_i \|T_i\|_{BL} < +\infty$.*

[* Quattordicesima settimana (21/05/2012); 38 *]

Corollario 2.2 (*). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio di Banach e uno spazio vettoriale normato, rispettivamente. Sia $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione in $BL(X,Y)$ tale che per ogni $x \in X$ esiste $Tx := \lim_i T_i x$ (in Y). Allora $T \in BL(X,Y)$ e $\|T\|_{BL} \leq \sup_i \|T_i\|_{BL} < +\infty$.*

Se $(Z, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato, con la notazione $U_Z(z_0, r_0)$ si indica la palla aperta centrata in $z_0 \in Z$ e di raggio $r_0 > 0$. Vale il seguente importante risultato, di cui proveremo solo il punto (2).

Teorema 2.8 (Applicazione aperta (***)). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach e sia dato $T \in BL(X,Y)$ suriettivo. Allora:*

(1) *Esiste $r > 0$ tale che $U_Y(0,r) \subset T(U_X(0,1))$;*
(2) *T trasforma ogni aperto di X in un aperto di Y.*

Osservazione 2.4. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi di Banach. Allora $X \times Y$ con la norma

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y, \qquad (x,y) \in X \times Y$$

è a sua volta uno spazio di Banach.

Teorema 2.9 (Grafico chiuso (*)). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach e sia dato $T \in L(X,Y)$ tale che il suo grafico $\{(x,Tx) \mid x \in X\}$ è un sottoinsieme chiuso di $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$. Allora T è continuo.*

Osservazione 2.5. Il teorema del grafico chiuso non si estende, in generale, alle mappe non lineari. Per esempio, se $X = Y = \mathbb{R}$, il grafico della funzione così definita

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1/x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Evidentemente, però, f non è continua.

3. Spazi di Hilbert.

Definizione 3.1. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio Banach* $(H, \|\cdot\|)$ *in cui la norma è indotta da un prodotto scalare* $(\cdot,\cdot)$*, cioè vale* $\|h\| = (h,h)^{1/2}$ *per ogni* $h \in H$.

Osservazione 3.1. Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato in cui la norma è indotta da un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, vale la seguente "uguaglianza del parallelogramma":

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

per ogni $x, y \in X$. Tale uguaglianza può servire per escludere che una norma assegnata sia indotta da un prodotto scalare. Per esempio, la seguente norma di $\mathbb{R}^2$ non la verifica e quindi non viene da un prodotto scalare:

$$\|(x_1,x_2)\| := \max\{|x_1|,|x_2|\}, \qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Esempio 3.1. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Allora $(L^2(X), \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert. Infatti la norma $\|\cdot\|_2$ è indotta dal prodotto scalare

$$(f,g) := \int_X fg\,d\mu, \qquad f,g \in L^2(X).$$

[* Quindicesima settimana (28/05/2012); 41 *]

Il seguente risultato di natura geometrica per gli spazi di Hilbert ha importanti applicazioni (per esempio alle disuguaglianze variazionali).

Teorema 3.1 (***). *Sia* K *un sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio di Hilbert* H. *Allora:*

(1) *Per ogni* $x \in H$ *esiste uno e un solo punto* $y \in K$ *tale che* $\|x-y\| = dist(x,K)$. *Tale punto è detto "la proiezione di* x *su* K*" ed è indicato con* $P_K(x)$*;*
(2) *Dati* $x \in H$ *e* $y \in K$ *si ha che* $y = P_K(x)$ *se e solo se* $(x-y, z-y) \leq 0$ *per ogni* $z \in K$*;*
(3) *Per ogni* $x_1, x_2 \in H$ *si ha* $\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$.

Nel caso particolare di un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert si ottiene facilmente il seguente corollario.

Corollario 3.1 (*). *Se K è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H, si ha*

$$Im(I - P_K) = K^{\perp}$$

Vale quindi la decomposizione $H = K \oplus K^{\perp}$.

Teorema 3.2 (Rappresentazione di Riesz (**)). *Dato uno spazio di Hilbert H, consideriamo la mappa $J : H \to H'$ che associa a $h \in H$ il funzionale lineare continuo*

$$Jh : H \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Jh(x) := (h, x).$$

Allora J è un isomorfismo isometrico.

Veniamo ora alla questione dell'esistenza di basi ortonormali in uno spazio di Hilbert.

Definizione 3.2. *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora un sottoinsieme F di H è detto "famiglia ortonormale (in H)" se per ogni $x, y \in F$ si ha*

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq y \\ 1 & se\ x = y. \end{cases}$$

Una "famiglia ortonormale completa (in H)" o "base ortonormale (di F)" è una famiglia ortonormale F che soddisfa la seguente condizione: se $h \in H$ è tale che $(h, x) = 0$ per ogni $x \in F$ allora si ha $h = 0$.

Osservazione 3.2. Sia F una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert H e si indichi con Γ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari finite di elementi di F. Se Γ è denso in H allora F è una famiglia ortonormale completa.

Come applicazione del Lemma di Zorn si prova facilmente l'esistenza delle famiglie ortonormali complete.

Teorema 3.3 (*). *Ogni spazio di Hilbert H contiene una famiglia ortonormale completa. Se H è separabile allora ogni famiglia ortonormale (in particolare, ogni famiglia ortonormale completa) è numerabile.*

4. Serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, teoria L^2.

Teorema 4.1 (**). *Sia $\{u_1, u_2, \dots\}$ una famiglia ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert H. Valgono allora i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni $h \in H$ si ha $\sum_i (h, u_i)^2 \leq \|h\|^2$ (disuguaglianza di Bessel);*
(2) *Se $h \in H$ e $c_1, c_2, \dots$ sono numeri reali, si ha*

$$\Big\| h - \sum_{i=1}^{m} (h, u_i) u_i \Big\| \leq \Big\| h - \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \Big\|$$

per ogni $m \geq 1$. L'uguaglianza vale se e solo se $c_i = (h, u_i)$ per ogni $i = 1, \dots, m$;

(3) *Siano* $c_1, c_2, \dots$ *numeri reali. Allora* $\sum_i c_i u_i$ *converge in* H *se e soltanto se* $\sum_i c_i^2 < +\infty$. *In questo caso la somma della serie non dipende dall'ordine dei suoi addendi (si dice anche che "la serie converge incondizionatamente").*

TEOREMA 4.2. *Sia* F *una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert* H. *Allora, per ogni* $h \in H$:

(1) *L'insieme* $F_h := \{u \in F \,|\, (h, u) \neq 0\}$ *è numerabile;*
(2) *Se* $u_1, u_2, \dots$ *sono gli elementi di* F_h, *la serie* $\sum_j (h, u_j) u_j$ *converge incondizionatamente;*
(3) *Se* F *è una famiglia ortonormale completa e* $u_1, u_2, \dots$ *sono gli elementi di* F_h, *si ha* $\sum_j (h, u_j) u_j = h$.

Un'importante applicazione della teoria precedente si ottiene per $H = L^2(-\pi, \pi)$, dove la misura sottogiacente è ovviamente quella di Lebesgue in $\mathbb{R}$. Si tratta della cosiddetta "teoria L^2 delle serie di Fourier" che qui descriveremo sommariamente.

Prima di tutto è facile provare che il "sistema trigonometrico"

$$F := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \bigcup \left\{ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \,,\, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.1}$$

è una famiglia ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$. Da Teorema 4.2 si ottiene allora che per ogni $f \in L^2(-\pi, \pi)$ la "serie di Fourier di f" definita come segue

$$\frac{1}{2\pi}(f, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi}(f, \cos nt) \cos nt + \frac{1}{\pi}(f, \sin nt) \sin nt \right] \tag{4.2}$$

converge incondizionatamente in $L^2(-\pi, \pi)$.

In realtà l'insieme F definito in (4.1) è una famiglia ortonormale completa. Si può dimostrare questo fatto utilizzando i seguenti due risultati di approssimazione, che enunciamo soltanto. Il primo è una conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass [**6**], mentre il secondo si ottiene per regolarizzazione mediante prodotto di convoluzione [**2**, Corollario IV.23].

TEOREMA 4.3. *Sia* $\varphi \in C(K)$, *con* K *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$. *Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tale che* $\sup_K |\varphi - P| \leq \varepsilon$.

TEOREMA 4.4. *Lo spazio vettoriale* $C_0(-\pi, \pi)$ *è denso in* $(L^2(-\pi, \pi)\,,\, \|\cdot\|_2)$.

Infatti, da Teorema 4.3 e Teorema 4.4 otteniamo:

COROLLARIO 4.1. *Le combinazioni lineari finite di elementi del sistema trigonometrico (4.1) formano uno spazio vettoriale denso in* $(L^2(-\pi, \pi)\,,\, \|\cdot\|_2)$. *Quindi, per Osservazione 3.2, il sistema trigonometrico è una famiglia ortonormale completa.*

Da Corollario 4.1 e Teorema 4.2(3) segue ora subito il seguente risultato.

COROLLARIO 4.2 (°). *Per ogni* $f \in L^2(-\pi, \pi)$*, la serie di Fourier (4.2) converge incondizionatamente a* f *in* $(L^2(-\pi, \pi)\,,\, \|\cdot\|_2)$.

Combinando Corollario 4.2 e Proposizione 1.2, otteniamo:

COROLLARIO 4.3 (°). *Se* $f \in L^2(-\pi, \pi)$*, allora esiste una sottosuccessione di*

$$S_N(t) := \frac{1}{2\pi}(f, 1) + \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{\pi}(f, \cos nt) \cos nt + \frac{1}{\pi}(f, \sin nt) \sin nt \right] \tag{4.3}$$

che converge puntualmente quasi ovunque in $(-\pi, \pi)$.

OSSERVAZIONE 4.1. Nel 1915 Lusin pose la questione della convergenza quasi ovunque di "tutta" la successione (4.3). La risposta affermativa venne oltre cinquant'anni dopo, in un profondo lavoro di Lennart Carleson [**3**].

Bibliography

[1] G. Anzellotti:Diario del corso di Analisi Matematica - III unitá didattica (A.A. 2010/2011)

[2] H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986.

[3] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. **116**, 135-157 (1966).

[4] K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.

[5] P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass_theorem