

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA III - AA 11/12

6 febbraio 2013

1. Per $t \in (0, 1)$, si consideri l'insieme

$$E_t := \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{(1-t)^2} \right\}.$$

Disegnare il grafico della funzione $t \rightarrow m_3(E_t)$ e determinare per quale valore di t tale funzione raggiunge il suo massimo.

2. Sia S il sottoinsieme limitato del paraboloide $z = x^2 + y^2$ compreso fra i piani di equazioni $z = 2y$ e $z = 4y$. Calcolare poi l'integrale

$$\int_S (1 + 4x^2 + 4y^2)^{-1/2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

3. Determinare una funzione derivabile $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la funzione complessa

$$z = x + iy \mapsto f(z) := x^3 - x\varphi(y) + i(y\varphi(x) - y^3)$$

risulti derivabile in ogni punto di \mathbb{C} . Calcolare poi

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz$$

dove \overline{C} è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con $x, y \geq 0$, orientata in senso antiorario.