Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA III - AA 12/13

6 settembre 2013

1. Sia E il solido ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$$

intorno all'asse delle x. Calcolare

$$\int_E \frac{yz}{(1+x)^\pi}+1\,dxdydz.$$

2. Per $\varepsilon>0$, definiamo $C_\varepsilon := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, \varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$ e indichiamo con S_ε il grafico della funzione

$$f_\varepsilon : C_\varepsilon \to (0,+\infty), \qquad f_\varepsilon(x,y) := (x^2+y^2)^{-1/4}.$$

Provare che

$$\mathcal{H}^2(S_\varepsilon)\leq (3-\varepsilon^{1/2})\pi.$$

3. Descrivere, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, l'insieme dei punti in cui la funzione complessa

$$\mathbb{C}\ni x+iy \longmapsto \alpha xy\ +\ i(\alpha x^2-y^2)$$

è derivabile. Calcolare l'integrale complesso di tale funzione sul segmento che congiunge l'origine (punto iniziale) e $2+i$.